Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 12 (1959)

Heft: 4

Artikel: Note sur la théorie de la diffusion

Autor: Di Fazio, Mauro

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739081

Mauro di Fazio. — *Note sur la théorie de la diffusion* *.

I. Le but de cette note est une remarque concernant la théorie de diffusion dans un processus multiple. C'est le cas d'une particule diffusée, dont les produits de réaction peuvent encore présenter une nouvelle réaction.

II. L'Hamiltonien du système est composé de l'énergie K et des interactions V_1 et V_2. (Dans nos considérations, nous n'envisageons qu'un processus double.) L'énergie K est l'énergie en absence de diffusion, et peut être considérée soit comme l'énergie cinétique soit comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle entre deux particules. Si nous considérons, le cas d'interaction d'une particule avec deux noyaux, nous appellerons H_2 l'énergie totale du système et H_1 l'énergie totale de la particule incidente et du premier noyau avec lequel cette particule interagit.

L'équation de Schroedinger ($\hbar = 1$) pour le système en interaction est:

$$i \frac{\partial \Psi (t)}{\partial t} = (K + V_1 + V_2) \Psi (t) \qquad (II, 1)$$

et indiquons par $\Phi_j (t) = \Phi_j e^{-i E_j (t)}$ les solutions de l'état stationnaire (normalisées à 1) de l'équation de Schroedinger en absence d'interaction:

$$i \frac{\partial \Phi (t)}{\partial t} = K \Phi (t) . \qquad (II, 2)$$

III. Examinons le taux de transition au temps $t = 0$ (deuxième noyau), et soit t_0 le temps pour $t < 0$. Dans ce cas, il vaut mieux écrire la fonction $\Psi (t)$ selon la formule:

$$\Psi_j (t, \tau) = e^{-i H_2 (t - \tau)} e^{-i H_1 (\tau - t_0)} \Psi_j (t_0) . \qquad (III, 1)$$

Cette forme est similaire à celle pour laquelle:

$$\Psi_j (t) = e^{-t H (i - \tau)} \Phi_j (\tau)$$

considérée par Gell-Mann et Goldberger [1].

* Ce travail a été effectué grâce aux subsides du Fonds national suisse de la Recherche scientifique.

IV. Cherchons maintenant une forme de la matrice S dans le cas considéré. Prenons la fonction $\Psi(t, \tau)$ pour laquelle l'équation de Schroedinger est valable et considérons la représentation d'interaction:

$$\Psi'(t, \tau) = e^{iKt}\, \Psi(t, \tau) \qquad \text{(IV, 1)}$$

$$\Psi'(\tau, \tau) = e^{iK\tau}\, \Psi(\tau, \tau) = e^{iK\tau}\, \Psi(\tau) . \qquad \text{(IV, 1')}$$

Ceci se réduit à la représentation de Schroedinger aux temps $t = 0$ et $\tau = 0$; (IV, 1') peut s'écrire:

$$\Psi(\tau) = e^{iK\tau}\, \Psi(\tau) \qquad \text{(IV, 2)}$$

à cause de (IV, 1) pour $t = \tau$, $\Psi(t, \tau)$ peut s'écrire:

$$\Psi(\tau) = e^{-iH_1(\tau - t_0)}\, \Psi(t_0) .$$

Le nouveau vecteur d'état satisfait alors l'équation suivante:

$$i\, \frac{\partial \Psi'(t, \tau)}{\partial t} = [V_1(t) + V_2(t)]\, \Psi(t, \tau) \qquad \text{(IV, 4)}$$

où

$$V_1(t) + V_2(t) = e^{iKt}\, (V_1 + V_2)\, e^{-iKt} \qquad \text{(IV, 5)}$$

Introduisons maintenant un opérateur unitaire $U(t, \tau; t')$ tel que:

$$\Psi'(t, \tau) = U(t, \tau; t')\, \Psi(t') \qquad \text{(IV, 6)}$$

où:

$$U(t, \tau; t') = U_2(t, \tau)\, U_1(\tau, t') \qquad \text{(IV, 6')}$$

et où U_1 et U_2 sont des opérateurs unitaires. Pour chacun de ces opérateurs, nous avons les équations suivantes:

$$\Psi'(t) = U_2(t, \tau)\, \Psi'(t)$$

$$\Psi'(\tau) = U_1(\tau, t')\, \Psi(t') . \qquad \text{(IV, 7)}$$

Ces opérateurs satisfont aux conditions:

$$U(t, t) = 1 \qquad \text{(IV, 8)}$$

$$U(t, t_0) = U(t, t')\, U(t', t_0) . \qquad \text{(IV, 8')}$$

L'opérateur $U(t, \tau; t')$ satisfait aux conditions:

$$U(t, t; t) = 1$$

$$U(t, \tau; t')\, U(t', t'; t_0) = U(t, \tau; t_0) . \qquad \text{(IV, 9)}$$

Maintenant, les équations (IV, 8) donnent:

$$U_2(t, \tau)\, U_2(\tau, t) = 1$$
$$U_1(\tau, t')\, U_1(t', \tau) = 1 \qquad \text{(IV, 10)}$$

et alors:

$$U_2(t, \tau) = U_2(\tau, t)^*$$
$$U_1(\tau, t') = U_1(t', \tau)^* \qquad \text{(IV, 11)}$$

en posant:

$$U(t, \tau; t') = U(t'; \tau, t)^* = [U_1(t', \tau)\, U_2(\tau, t)]^* \qquad \text{(IV, 12)}$$

nous avons enfin:

$$[U_2(t, \tau)\, U_1(\tau, t')][U_2(t, \tau)\, U_1(\tau, t')]^* = 1. \qquad \text{(IV, 13)}$$

Cherchons, maintenant, une formule finale pour $U(t, \tau; t')$ et posons par ailleurs:

$$\Psi(t, \tau) = e^{-i H_2 (t-\tau)}\, e^{-i H_1 (\tau - t')}\, \Psi(t'). \qquad \text{(IV, 14)}$$

On voit facilement à l'aide de (IV, 1) et (IV, 6) que:

$$e^{i K t}\, e^{-i H_2 (t-\tau)}\, e^{-i H_1 (\tau - t')}\, \Psi(t') = U(t, \tau; t')\, e^{i K t'}\, \Psi(t')$$
$$U(t, \tau; t') = e^{i K t}\, e^{-i H_2 (t-\tau)}\, e^{-i H_1 (\tau - t')}\, e^{i K t'}. \qquad \text{(IV, 15)}$$

Exprimons $U(t, \tau; t')$ en fonction des grandeurs qui représentent l'interaction:

$$i \frac{\partial U(t, \tau; t')}{\partial t} = [V_1(t) + V_2(t)]\, U(t, \tau; t') \qquad \text{(IV, 16)}$$

$$i \frac{\partial U(t, \tau; t')}{\partial \tau} = -\, U_2(t, \tau)\, V_2(\tau)\, U_1(\tau, t') \qquad \text{(IV, 16')}$$

$$i \frac{\partial U(t, \tau; t')}{\partial t'} = -\, U_2(t, \tau)\, U_1(\tau, t')\, V_1(t') \qquad \text{(IV, 16'')}$$

nous avons, en intégrant:

$$i \int_\tau^{t_0} \frac{\partial U}{\partial t'}\, dt' = i\, U(t, \tau; t_0) - i\, U(t, \tau; \tau) = \int_\tau^{t_0} d\mathrm{T}\, U_2(t, \tau)\, U_1(\tau, \mathrm{T})\, V_1(\mathrm{T})$$

$$i \int_\tau^{t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau}\, d\tau = i\, U(t, t_0; t_0) - i\, U(t, \tau; t_0) = -$$

$$= -\int_\tau^{t_0} d\mathrm{T}\, U_2(t, \mathrm{T})\, V_2(\mathrm{T})\, U_1(\tau, t_0) \qquad \text{(IV, 17)}$$

pour les deux dernières (IV, 16).

Nous avons encore:

$$i \int_t^\tau \frac{\partial U}{\partial \tau'} d\tau' = i\, U(t, \tau; t_0) - i\, U(t, t; t_0) = -$$

$$= - \int_t^\tau d\mathrm{T}\, U_2(t, \mathrm{T})\, V_2(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, t_0) \qquad \text{(IV, 18)}$$

c'est-à-dire:

$$i\, U(t, \tau; t_0) = i\, U_1(t, t_0) - \int_\tau^t d\mathrm{T}\, U_2(t, \mathrm{T})\, V_2(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, t_0) \qquad \text{(IV, 19)}$$

et puisque nous avons:

$$i\, U_1(t, t_0) = i + \int_{t_0}^t d\mathrm{T}\, V_1(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, t_0) \qquad \text{(IV, 20)}$$

nous aurons enfin:

$$U(t, \tau; t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t d\mathrm{T}\, V_1(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, t_0) +$$

$$+ i \int_t^\tau d\mathrm{T}\, U_2(t, \mathrm{T})\, V_2(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, t_0) \qquad \text{(IV, 21)}$$

examinons le calcul des opérateurs (1):

$$U(t, -\infty; -\infty) = U_2(t, -\infty) =$$

$$= e^{i\mathrm{K}t}\, e^{-i\mathrm{H}_2 t} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + i(\mathrm{H}_2 - \mathrm{K})}\, \Phi_k >< \Phi_k$$

et

$$U_2(0, -\infty) = \Sigma_k\, \Psi_k^{(+)} >< \Phi_k$$

$$U(\infty, \infty; t_0) = U_1(\infty, t_0) = \Sigma_j\, \Phi_j >< \Phi_j \frac{\varepsilon}{\varepsilon + i(\mathrm{H}_1 - \mathrm{K}_j)}\, e^{i\mathrm{H}_1 t_0}\, e^{-i\mathrm{K}t_0}$$

et

$$U_1(\infty, t_0) = \Sigma_j\, \Phi_j >< \Psi_j^{(-)}\,.$$

Les fonctions $\Psi_j^{(+)}$ et $\Psi_j^{(-)}$ sont les mêmes que celles de Gell-Mann et Goldberger [1].

Nous avons par ailleurs, pour $t \to \infty$ et $\tau \to -\infty$:

$$U(\infty, -\infty; -\infty) = U_2(\infty, -\infty) = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{T}\, V_1(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, -\infty) +$$

$$+ i \int_{\infty}^{-\infty} d\mathrm{T}\, U_2(\infty, \mathrm{T})\, V_2(\mathrm{T})\, U_1(\mathrm{T}, -\infty) \qquad \text{(IV, 22)}$$

ce qui donne:

$$U_1(T, -\infty) = e^{iKT}\, \Sigma_j\, e^{-iE_jT}\, \Psi^{(+)} >< \Phi_j$$

$$V_1(T)\, U_1(T, -\infty) =$$
$$= \Sigma_{i,j}\, \Phi_i >< \Phi_i \,|\, e^{i(E_i - E_j)T}\, V_1\, \Psi^{(+)} >< \Phi_j \qquad \text{(IV, 23)}$$

$$U_2(\infty, T) = \Sigma_k\, \Phi_k >< \Psi_k^{(-)}\, e^{iE_kT}\, e^{-iKT}$$

$$U_2(\infty, T)\, V_2(T)\, U_1(T, -\infty) =$$
$$= \Sigma_k\, \Phi_k >< \Psi_k^{(-)}\, V_2\, e^{iE_kT}\, e^{-iE_jT}\, \Psi_j^{(+)} >< \Phi_j\,. \qquad \text{(IV, 24)}$$

Nous aurons alors, pour la matrice S, la formule suivante:

$$S = 1 - \Sigma_{ij}\, \Phi_i > 2\pi i\, \delta\, (E_i - E_j)\, R_{ij} < \Phi_j +$$
$$+ \Sigma_{j,k}\, \Phi_k >< \Psi_k^{(-)}\, V_2\, e^{iE_kT}\, e^{-iE_jT}\, \Phi_j >< \Phi_j +$$
$$+ \Sigma_{j,k}\, \Phi_k >< \Psi_k^{(-)}\, V_2\, e^{i(E_k - E_j)T}\, G^{(+)}(E_j)\, V_1\, \Psi_j^{(+)} >< \Phi_j \qquad \text{(IV, 25)}$$

où nous avons posé pour $G^{(+)}(E_j)$

$$G^{(+)}(E_j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{E_j - K + i\varepsilon}$$

et pour R_{ij}

$$R_{ij} = < \Phi_i \,|\, V_1 \,|\, \Psi_j^{(+)} >$$

On peut démontrer que la matrice S est unitaire.

1. Gell-Mann et Goldberger. *Phys. Rev.*, *91*, 398 (1953).

Genève, novembre 1959.

Institut de Physique.
Laboratoire de Recherches nucléaires.

Séance du 3 décembre 1959

L. Strassberger, Ed. Frommel et C. Fleury. — *Actographe électromagnétique et électronique des transmissions sonores ou vibratoires, l'audiovibrographe.*

L'expérimentation de substances agissant au niveau du cortex cérébral porte sur l'effet soit déprimant soit excitant