

Zeitschrift:	Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber:	Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band:	12 (1959)
Heft:	3
Artikel:	Effets de la largeur de la bande passante des filtres : sur les relations entre des systèmes photométriques différents
Autor:	Golay, M.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-739066

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EFFETS DE LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE DES FILTRES

sur les relations entre des systèmes photométriques différents

PAR

M. GOLAY

Résumé. — En vue de l'application aux photométries photo-électriques en plusieurs couleurs, nous examinons les effets d'une différence entre les bandes passantes des filtres lors du rattachement de deux systèmes photométriques n'ayant pas des récepteurs de caractéristiques identiques. Les différences de largeur tolérables pour une précision donnée sont calculées. Nous montrons que l'on ne peut établir des relations précises entre les deux systèmes que pour des intervalles limités de magnitudes. Les mêmes conclusions sont valables pour les indices de couleur. Un effet de compensation entre les différences de largeur des bandes passantes des filtres et les différences de longueur d'onde moyenne est mis en évidence. Nous signalons que la magnitude monochromatique obtenue avec la longueur d'onde moyenne donne, sur un intervalle défini, une meilleure équivalence avec la magnitude hétérochromatique que celle obtenue avec la longueur d'onde effective. Enfin nous déterminons quelle distance en longueur d'onde doit séparer les filtres utilisés pour la formation de l'indice de couleur employé dans le calcul d'un gradient absolu. Les quotients $\frac{\partial B(\lambda, T)}{\partial \lambda} / B(\lambda, T)$ et $\frac{\partial^2 B(\lambda, T)}{\partial \lambda^2} / B(\lambda, T)$ sont mis en table de 3000 à 8000 Å et pour des températures comprises entre 1000 et 100.000°.

I. INTRODUCTION

Il est bien connu que les relations qui existent entre des systèmes de magnitudes définis par des filtres différents, tant en longueur d'onde moyenne qu'en largeur de la bande pas-

sante, ne sont qu'approximativement linéaires et généralement multivalentes. Il en est de même pour les relations qui relient les systèmes d'indices de couleur. Ces propriétés de non linéarité ou de multivalence offrent un grand intérêt et méritent d'être exploitées, car elles permettent d'étudier la répartition de l'énergie dans le spectre stellaire. Le système en trois couleurs U, B, V, de Johnson et Morgan [1] en donne un excellent exemple.

Nous nous proposons d'étudier successivement les diverses causes de non linéarité et surtout d'essayer d'en établir l'importance, car la photométrie photoélectrique, convenablement appliquée, permet actuellement de donner une signification physique à tout écart plus grand que $1/100$ de magnitude.

La première cause que nous étudierons et qui fait l'objet de ce travail, est la différence des largeurs des bandes passantes des filtres. Nous examinerons aussi incidemment l'effet d'une différence entre leurs longueurs d'onde moyennes.

En première approximation, nous traiterons le cas idéal, c'est-à-dire celui où la répartition énergétique du spectre est celle du corps noir et où la courbe de transmission des filtres est rectangulaire. Si a et b sont les bornes du filtre, le coefficient de transmission satisfait à la condition:

$$\begin{aligned} 0 & \text{ pour } \lambda < a, \\ 100\% & \text{ pour } a \leq \lambda \leq b, \\ 0 & \text{ pour } \lambda > b. \end{aligned}$$

Avec ces conditions idéales, la magnitude d'une surface, ayant la répartition d'énergie $B(\lambda, T)$ d'un corps noir à la température T , est, à une constante près (que nous supposerons la même, quel que soit T , tout au long de cet article):

$$m_{ab} = -2,5 \log_{10} \int_a^b B(\lambda, T) d\lambda,$$

m_{ab} étant la magnitude mesurée à travers le filtre défini ci-dessus.

Soit m_{cd} la magnitude de cette surface à travers un filtre dont c et d sont les bornes généralement différentes de a et b .

$$m_{cd} = -2,5 \log_{10} \int_c^d B(\lambda, T) d\lambda .$$

Nous pouvons démontrer qu'il ne peut exister une relation de la forme:

$$m_{ab} = \alpha m_{cd} + \beta \quad (1)$$

que si $B(\lambda, T)$ est de la forme:

$$B(\lambda, T) = f(\lambda) \cdot \varphi(T) .$$

Cette forme entraîne nécessairement que $\alpha = 1$.

Le coefficient α peut-être différent de 1, si la fonction $B(\lambda, T)$ est de la forme:

$$B(\lambda, T) = f(\lambda) \cdot [\varphi(T)]^{n_i} \quad (2)$$

où n_i serait un exposant différent d'un filtre à l'autre.

La fonction de Planck ne satisfait malheureusement à aucune de ces conditions. Il en est de même pour la fonction de Wien, approximation de la fonction de Planck, valable à 1% si $\lambda \cdot T < 3000$ (λ en μ). Par contre, la fonction de Rayleigh-Jeans satisfait à la condition de fonction de variables séparées. Malheureusement, il y a peu de chance de la rencontrer, car les valeurs obtenues avec cette fonction ne s'approchent à 1% près de celles fournies par la formule de Planck que si $\lambda \cdot T > 100.000$ (λ en μ). Dans le cas où le fond continu stellaire peut se mettre sous la forme (2), alors nous voyons facilement que l'absorption interstellaire a pour seul effet de modifier la constante β de (1) et de laisser la pente invariante. Par contre, si $B(\lambda, T)$ ne peut pas être réduite à la forme (2), alors l'absorption interstellaire modifiera aussi le coefficient α de (1).

Pour mettre en évidence l'effet de la largeur d'un filtre, partons momentanément d'un filtre dont la courbe de transmission $\Phi(\lambda)$ est bien définie sur un intervalle a, b et limitée à ab . La magnitude m_{ab} sera:

$$m_{ab} = -2,5 \log_{10} \int_b^a B(\lambda, T) \Phi(\lambda) d\lambda .$$

Développons $B(\lambda, T)$ en série autour d'une longueur d'onde λ_0 comprise entre a et b

$$m_{ab} = -2,5 \log_{10} \int_a^b \left[B(\lambda_0, T) + (\lambda - \lambda_0) [B'(\lambda, T)]_{\lambda_0} + \right. \\ \left. + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} [B''(\lambda, T)]_{\lambda_0} + \dots \right] \Phi(\lambda) d\lambda.$$

Choisissons λ_0 de telle sorte que $[B'(\lambda, T)]_{\lambda_0}$ disparaîsse,

$$\lambda_0 = \frac{\int_a^b \lambda \Phi(\lambda) d\lambda}{\int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda} \quad (3a)$$

nous l'appellerons la longueur d'onde moyenne du filtre. Nous avons alors :

$$m_{ab} = -2,5 \log_{10} B(\lambda_0, T) \int_b^a \left(1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} \frac{[B''(\lambda, T)]_{\lambda_0}}{B(\lambda_0, T)} + \dots \right) \Phi(\lambda) d\lambda.$$

Posons :

$$\mu^2 = \frac{\int_a^b (\lambda - \lambda_0)^2 \Phi(\lambda) d\lambda}{\int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda} \quad (3b)$$

et écrivons dorénavant $\frac{B''}{B}$ pour $\frac{[B''(\lambda, T)]_{\lambda_0}}{B(\lambda_0, T)}$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

D'où en limitant le développement à la dérivée seconde :

$$m_{ab} = -2,5 \log_{10} \left\{ B(\lambda_0, T) \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \frac{B''}{B} \right) \int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda \right\}$$

mais $-2,5 \log_{10} B(\lambda_0, T)$ est la magnitude monochromatique à λ_0 du corps noir de température T , nous l'indiquerons : $m_{\lambda_0}(T)$

$$m_{ab} = m_{\lambda_0}(T) - 1,086 \log_e \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \frac{B''}{B} \right) - 2,5 \log_{10} \int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda$$

mais

$$\frac{\mu^2}{2} \frac{B''}{B} \ll 1 \quad \text{d'où} \quad \log_e \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \frac{B''}{B} \right) \cong \frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{B''}{B}.$$

L'expression que nous utiliserons est alors:

$$m_{ab} = m_{\lambda_0} (T) - 0,543 \mu^2 \frac{B''}{B} - 2,5 \log_{10} \int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Admettons que le filtre utilisé satisfait à la condition déjà énoncée de

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= 0 \quad \text{pour } \lambda < a \\ \Phi(\lambda) &= 1 \quad \text{pour } a \leq \lambda \leq b \\ \Phi(\lambda) &= 0 \quad \text{pour } \lambda > b \end{aligned}$$

alors:

$$\int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda = b - a \quad (5) \quad \lambda_0 = \frac{b + a}{2} \quad (6)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{12} (b - a)^2 \quad (7)$$

En posant $b - a = \Delta_{ab}$ la largeur du filtre, $\mu^2 = \frac{\Delta^2 ab}{12}$. μ est donc proportionnel à la largeur du filtre rectangulaire. Un filtre quelconque pourra donc se réduire en première approximation à un filtre rectangulaire caractérisé par deux paramètres λ_0 et μ^2 .

II. a) EFFET DE LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE DES FILTRES SUR LES SYSTÈMES DE MAGNITUDES

Nous avons calculé les magnitudes m_{ab} et m_{cd} pour divers intervalles ab et cd et pour diverses températures à l'aide des tables de Böhm et Schlender [2]. Le tableau 1 résume les résultats obtenus. Les magnitudes sont à une constante arbitraire près. Pour simplifier l'écriture, les indices a et b sont exprimés en centaine d'Angström.

$$m_{a|b} = -2,5 \log_{10} \int_a^b 2hc^2 \lambda^{-5} \left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right)^{-1} d\lambda.$$

Le tableau 1 comporte aussi la valeur de la longueur d'onde λ_M , aux diverses températures, du maximum de la fonction de Planck.

TABLEAU 1.

Magnitude \rightarrow	$m_{30/60}$	$m_{30/70}$	$m_{30/80}$	$m_{35/40}$	$m_{35/50}$	$m_{35/60}$	$m_{35/80}$	$m_{40/50}$
λ_0	4500 Å	5000 Å	5500 Å	3750 Å	4250 Å	4750 Å	5750 Å	4500 Å
3000	—	—	—	—	—	—	—	—
5000	+ 3,992	+ 3,643	+ 3,360	+ 6,234	+ 4,766	+ 8,247	+ 6,877	+ 9,628
10000	+ 0,365	+ 0,214	+ 0,120	+ 2,046	+ 1,032	+ 4,084	+ 3,411	+ 5,091
15000	— 1,006	— 1,141	— 1,475	+ 0,593	— 0,308	+ 0,656	+ 0,346	+ 1,574
20000	— 1,762	— 1,850	— 1,903	— 0,489	— 1,014	— 0,643	— 0,847	+ 0,345
30000	— 2,626	— 2,700	— 2,743	— 1,070	— 1,873	— 2,428	— 1,521	— 0,376
							— 2,309	— 1,169

Magnitude \rightarrow	$m_{40/60}$	$m_{40/70}$	$m_{40/80}$	$m_{50/60}$	$m_{50/80}$	$m_{60/70}$	$m_{60/80}$	λ_M
λ_0	5000 Å	5500 Å	6000 Å	5500 Å	6500 Å	6500 Å	7000 Å	
3000	+ 8,314	+ 7,479	+ 6,896	+ 8,698	+ 6,987	+ 8,455	+ 7,239	9650 Å
5000	+ 4,245	+ 3,786	+ 3,494	+ 4,912	+ 3,777	+ 4,943	+ 4,249	5750 Å
10000	+ 1,010	+ 0,750	+ 0,600	+ 1,991	+ 1,169	+ 2,431	+ 1,856	2886 Å
15000	— 0,179	— 0,393	— 0,543	+ 0,914	+ 0,169	+ 1,473	+ 0,929	1930 Å
20000	— 0,842	— 1,037	— 1,145	+ 0,300	— 0,409	+ 0,920	+ 0,388	1440 Å
30000	— 1,614	— 1,793	— 1,891	— 0,431	— 1,407	+ 0,249	— 0,272	965 Å

Soient deux filtres dont les bornes sont ab et cd . Supposons-les de même longueur d'onde moyenne λ_0 . Nous obtenons alors les deux relations suivantes :

$$m_{ab} = m(\lambda_0, T) - 0,543 \mu_{ab}^2 \frac{B''}{B} - 2,5 \log_{10} (b - a) ,$$

$$m_{cd} = m(\lambda_0, T) - 0,543 \mu_{cd}^2 \frac{B''}{B} - 2,5 \log_{10} (c - d) .$$

Nous pouvons obtenir la relation simple suivante entre m_{ab} et m_{cd} :

$$m_{ab} = m_{cd} - \frac{0,543}{12} \frac{B''}{B} (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) + 2,5 \log_{10} \frac{c - d}{b - a} . \quad (8)$$

Cette expression montre qu'avec des filtres quasi monochromatiques, la relation serait exprimée par une droite inclinée à 45° sur l'abscisse. L'élargissement de la bande passante introduit deux effets. D'une part une translation de $2,5 \log_{10} \frac{c - d}{b - a}$ qui exprime le rapport des surfaces des filtres, d'autre part un terme proportionnel à $\frac{B''}{B}$ d'autant plus important que la différence des carrés des largeurs est grande. $\frac{B''}{B}$ dépend du paramètre commun qui est la température et ce rapport change de signe à cause des deux points d'inflexion de la courbe d'énergie. Donc la courbe qui relie m_{ab} à m_{cd} est un arc qui coupe en deux points une droite à 45° ne passant pas par l'origine. Cet arc tourne sa concavité du côté de l'axe portant la magnitude définie avec le filtre le plus étroit. La figure 1 montre la relation entre un filtre de 1000 \AA de largeur et deux autres filtres respectivement de 3000 \AA et 5000 \AA de largeur. Les trois filtres ont la longueur d'onde moyenne λ_0 de 5500 \AA . Les points d'inflexion ont lieu pour les températures de 3100 et 7400° .

Pratiquement, il serait absurde de chercher à raccorder des magnitudes obtenues avec de telles différences de largeur et ce n'est que pour mettre le phénomène en évidence sur la figure 1 que nous les avons choisies. Dans les cas usuels, nous chercherons à tracer une droite moyenne à travers cette courbe, ce qui n'a un sens que si l'on envisage un intervalle restreint de température.

En effet, le rapport $\frac{B''}{B}$, pour une longueur d'onde λ_0 , et la magnitude monochromatique m_{λ_0} ayant la température pour paramètre commun, il est possible de définir une relation linéaire approchée entre $\frac{B''}{B}$ et m_{λ_0} . La figure 2 représente la variation de $\frac{B''}{B}$ en fonction de m_{λ_0} . Nous remarquons que nous pouvons introduire une relation linéaire approchée entre $\frac{B''}{B}$ et m_{λ_0} pour autant que l'on se limite aux températures $> T_{\text{Min}}$ (T_{Min} est la température à laquelle $\frac{B''}{B}$ est minimum pour une

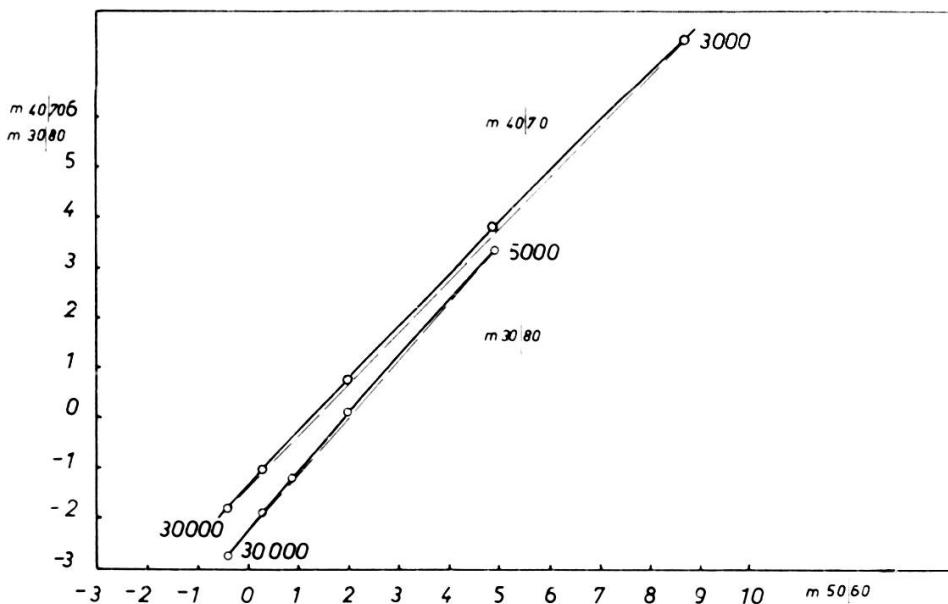


Fig. 1.

longueur d'onde donnée, par exemple 5000° pour 4500 Å, 4000° pour 6000 Å, 3000° pour 7000 Å). Si la différence $\Delta_{cd}^2 - \Delta_{ab}^2$ est petite, cette approximation est acceptable. Une autre relation aussi approximativement linéaire peut-être établie pour les températures inférieures à T_{Min} . Nous n'introduisons pas une grave erreur si dans la figure 2 nous remplaçons m_{λ_0} par m_{cd} , l'allure de la courbe reste la même. Dans ce cas, nous voyons qu'il est possible de trouver une relation linéaire de la forme:

$$m_{ab} = \alpha m_{cd} + \beta \quad (9)$$

qui est une expression approchée de (8). Le coefficient $\alpha \rightarrow 1$

lorsque la largeur $\Delta_{cd} \rightarrow \Delta_{ab}$. Les mesures de magnitudes pouvant s'effectuer actuellement avec une précision de l'ordre du centième, nous nous proposons alors de trouver la valeur de la différence des carrés ($\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2$) que l'on peut accepter afin que l'écart entre les relations (9) et les relations (8) soit toujours inférieur ou égal aux erreurs de mesure. Cet écart provient de la relation linéaire que nous introduisons entre $\frac{B''}{B}$ et m_{cd} et a donc pour expression :

$$\varepsilon = \frac{0,543}{12} \left(\frac{B''}{B} - k m_{cd} - l \right) \left(\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2 \right). \quad (10)$$

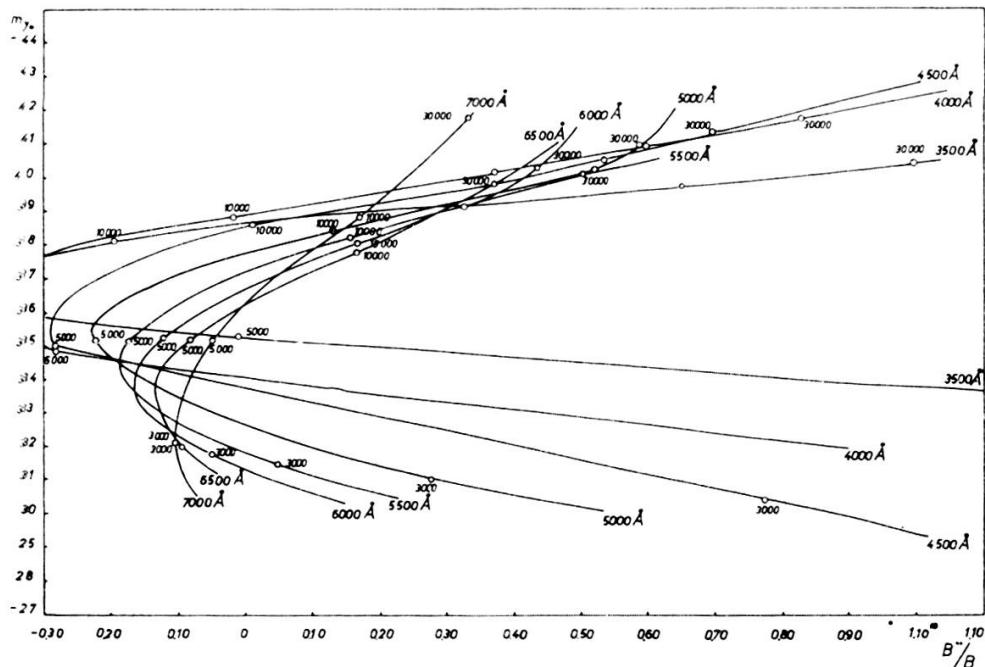


Fig. 2.

L'application des moindres carrés à la relation comprise dans la première parenthèse fournit les coefficients k et l . Soit η la plus grande valeur absolue de la première parenthèse. ε sera alors inférieur à $\frac{1}{100}$ si

$$\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2 \leq \frac{1}{100} \cdot \frac{12}{0,543} \cdot \frac{1}{\eta}. \quad (11)$$

Le tableau 2 donne la valeur de $\Delta_{ab} - \Delta_{cd}$ satisfaisant à $\varepsilon \leq \frac{1}{100}$ pour trois longueurs d'onde, 4500 Å, 5500 Å, 6000 Å

et pour un intervalle de température compris entre 5000 et 30.000°. Ce tableau donne en plus la largeur Δ_{ab} si $\Delta_{cd} = 1000 \text{ \AA}$ et la valeur de la pente $\alpha_{0,01}$ de la relation (9) lorsque $\varepsilon \leq \frac{1}{100}$.

TABLEAU 2.

λ_0	$\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2 \leq$	$(\Delta_{cd} = 1000 \text{ \AA})$ Δ_{ab}	$\alpha_{0,01}$
4500 \AA	$1,36 \cdot 10^6$	1540 \AA	1,0095
5500 \AA	$6,6 \cdot 10^6$	2750 \AA	1,038
6500 \AA	$22,5 \cdot 10^6$	4850 \AA	1,114

α est de la forme:

$$\alpha = \left[1 - \frac{12}{0,543} \cdot k \cdot (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) \right] \quad (12a)$$

et d'une façon générale lorsque les filtres ne sont pas rectangulaires:

$$\alpha = \left[1 - 0,543 k \cdot (\mu_{ab}^2 - \mu_{cd}^2) \right] \quad (12b)$$

Réciproquement, lorsque la relation entre deux systèmes photométriques de même longueur d'onde moyenne λ_0 fait intervenir un coefficient $\alpha > 1,0095$ pour $\lambda_0 = 4500 \text{ \AA}$; alors il faut s'attendre à une courbure qui introduit des écarts $> 0,01$.

Les relations que nous avons établies sont celles que l'on pourrait avoir si toutes les étoiles, se comportant comme des corps noirs, étaient à la même distance et avaient un diamètre identique indépendant de la température. Ces hypothèses sont utilisées en particulier lorsque l'on essaie d'approcher $\frac{B''}{B}$ par une relation linéaire par rapport à la magnitude m_{cd} qui joue là un rôle identique à la température. Dans le cas réel, la magnitude de l'étoile m_{ab}^* est à un terme près égale à la magnitude m_{ab} que nous avons définie précédemment. Il en est de même pour la magnitude m_{cd}^* et c'est le même terme:

$$m_{ab}^* = m_{ab} + C$$

$$m_{cd}^* = m_{cd} + C$$

Ce terme dépend du diamètre et de la distance de l'étoile, il est donc différent pour chaque étoile. Dans ces conditions, la relation linéaire à l'aide de laquelle nous représentons la variation approximative de $\frac{B''}{B}$ devient:

$$\frac{B''}{B} = k (m_{cd}^* - C) + l$$

D'où la relation entre les magnitudes des deux systèmes photométriques (ayant même longueur d'onde moyenne) est:

$$\begin{aligned} m_{ab}^* = m_{cd}^* & \left[1 - \frac{0,543}{12} k (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) \right] - \\ & - \frac{0,543}{12} (l - kC) (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) + 2,5 \log_{10} \frac{c - d}{b - a} . \quad (13) \end{aligned}$$

Le coefficient de m_{cd}^* est identique au cas idéal (12a, b); par contre, le terme constant, indépendant de T, dépend de C, donc de la distance et du diamètre de l'étoile. Ce terme C introduit la multivalence dans la relation entre deux systèmes de magnitudes. Comme les étoiles sont réparties au hasard, c'est aussi C qui introduit la dispersion autour de la valeur moyenne. C est connu à une constante près et est donné par $5 \log_{10} R.d$, où R est le rayon de l'étoile et d sa distance. En admettant toutes les étoiles à la même distance et en ne s'intéressant qu'aux étoiles de température comprise entre 5000 et 30.000°, le rayon va de 1 à 100 fois celui du soleil, donc C varie de façon continue de 0 à 10. Aux environs de 5000 Å, k vaut $-0,2 \cdot 10^{10} (\text{cm}^{-2})$, et si on admet un écart à la droite donnée par l'équation (13) avec C = 0, de 0,1 magnitude, nous trouvons alors que pour $\Delta_{ab} = 1000 \text{ \AA}$, Δ_{cd} doit être inférieur à 1480 Å. La relation entre m_{ab}^* et m_{cd}^* est représentée par une courbe qui dépend de l'expression qui lie le rayon à la température dans la séquence principale. En tolérant un écart de 0,1 magnitude lorsque l'on passe de C = 0 à C = 10 on peut considérer la relation entre m_{ab}^* et m_{cd}^* comme encore linéaire. La dispersion des distances est beaucoup plus gênante que la variation continue des diamètres. Cependant les distances des étoiles utilisées pour la comparaison des systèmes photométriques sont au plus dans un rapport 10, c'est-à-dire C = 5. Dans l'exemple donné

ci-dessus, cela introduirait une dispersion dont l'étendue serait de 0,04 magnitude.

II. b) EFFET D'UNE DIFFÉRENCE ENTRE LES LONGUEURS D'ONDE MOYENNES DE DEUX SYSTÈMES DE MAGNITUDES AYANT DES FILTRES D'INÉGALÉ LARGEUR

Supposons que les deux systèmes de magnitudes ont des longueurs d'onde moyennes λ_{ab} et λ_{cd} peu différentes. Entre les magnitudes monochromatiques, nous pouvons établir une relation approchée:

$$m_{\lambda_{ab}} = m_{\lambda_{cd}} + 1,086 \left[\frac{d \log_e B(\lambda, T)}{d \lambda} \right]_{\lambda_{cd}} (\lambda_{ab} - \lambda_{cd})$$

$$\lambda_{ab} > \lambda_{cd}.$$

D'où:

$$m_{\lambda_{ab}} = m_{\lambda_{cd}} + 1,086 \frac{B'(\lambda_{cd}, T)}{B(\lambda_{cd}, T)} \cdot (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}).$$

L'expression (8) s'écrit alors:

$$m_{ab} = m_{cd} + 1,086 \frac{B'(\lambda_{cd}, T)}{B(\lambda_{cd}, T)} (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}) -$$

$$- \frac{0,543}{12} \frac{B''(\lambda_{cd}, T)}{B(\lambda_{cd}, T)} (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) + 2,5 \log_{10} \frac{c-d}{b-a}.$$

La figure 3 donne la variation de $\frac{B'}{B}$ en fonction de $m_{\lambda_{moy}}$ la même courbe existe en ayant les magnitudes hétérochromatiques en abscisse au lieu des magnitudes monochromatiques. Comme cela a été fait pour $\frac{B''}{B}$, nous pouvons tenter d'approcher $\frac{B'}{B}$ par une fonction linéaire de m_{cd} . Posons donc:

$$\frac{B'(\lambda_{cd}, T)}{B(\lambda_{cd}, T)} \cong p m_{cd} + q.$$

D'où l'expression générale suivante:

$$m_{ab} = m_{cd} \left[1 - \frac{0,543}{12} (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) k + 1,086 (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}) p \right] + \\ 1,086 \cdot q (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}) - \frac{0,543}{12} (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) \cdot l + 2,5 \log_{10} \frac{c-d}{b-a} \quad (14)$$

k pour les températures plus élevées que T_{Min} est négatif, p est toujours positif et vaut $2 \cdot 10^4$ (cm^{-1}) aux environs de 5000 \AA . Pour une différence $\lambda_{ab} - \lambda_{cd} = 100 \text{ \AA}$ la pente de la relation

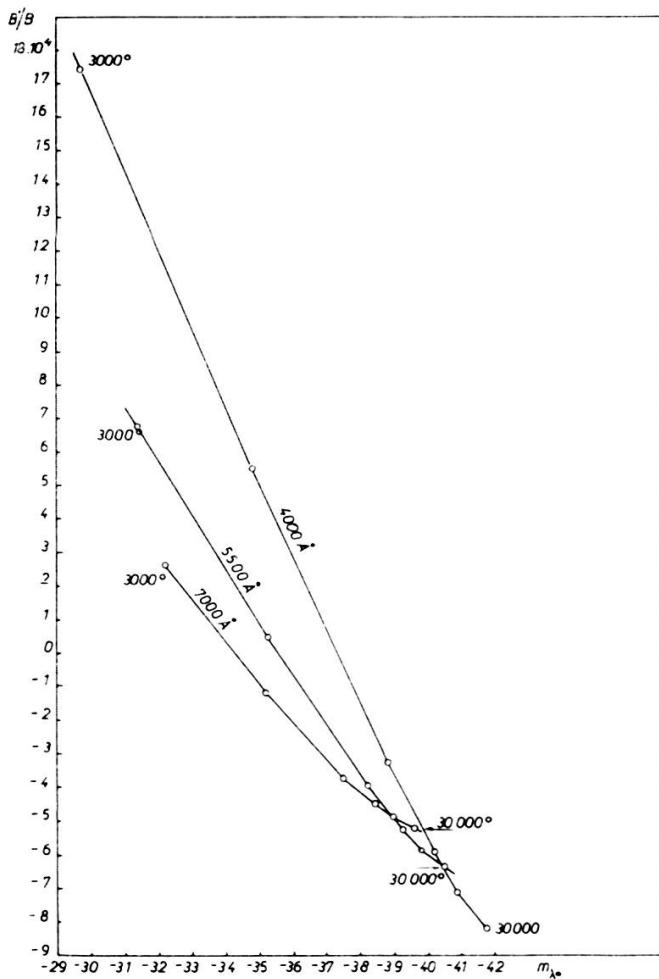


Fig. 3.

$m_{ab} = f(m_{cd})$ varie de 0,02. Nous voyons qu'il est possible de compenser par un déplacement de la longueur d'onde moyenne d'un des filtres l'effet sur la pente provenant de la différence de largeur de ces derniers. Dans le cas donné comme exemple, le filtre (*ab*) a une longueur d'onde moyenne de 100 \AA supérieure au filtre (*cd*), il est donc un peu trop du côté du rouge; l'effet

est annulé s'il a une bande passante plus étroite que le filtre (*cd*). Pour une largeur de 1730 Å du filtre (*cd*), le filtre (*ab*) doit avoir 1000 Å.

Envisageons maintenant le cas des étoiles réelles. L'expression (14) devient:

$$\begin{aligned} m_{ab}^* = m_{cd}^* & \left[1 - \frac{0,543}{12} (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) k + 1,086 (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}) p \right] + \\ & + 1,086 (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}) (q - p C) - \frac{0,543}{12} (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) (l - k C) + \\ & + 2,5 \log_{10} \frac{c - d}{b - a}. \quad (15) \end{aligned}$$

Par rapport à l'expression (14), il y a un terme dépendant de *C* qui s'introduit. Soit δ cette quantité:

$$\delta = C \left[\frac{0,543}{12} k (\Delta_{ab}^2 - \Delta_{cd}^2) - 1,086 p (\lambda_{ab} - \lambda_{cd}) \right]$$

ainsi nous voyons immédiatement que si le coefficient de $m_{cd} = 1$, donc qu'il y a compensation entre les effets de largeur de bande et d'écart de longueur d'onde moyenne, alors le terme δ est annulé et l'ensemble se comporte comme deux systèmes de magnitudes de même longueur d'onde moyenne et ayant des filtres de même largeur. Il ne reste plus qu'une translation résiduelle de la droite à 45° par rapport aux systèmes véritablement identiques.

III. RELATIONS ENTRE MAGNITUDES MONOCHROMATIQUES ET MAGNITUDES HÉTÉROCHROMATIQUES

Selon Wesselink [3], nous pouvons définir une magnitude monochromatique (à une longueur d'onde λ_0 ne dépendant que des conditions expérimentales) équivalente à une magnitude hétérochromatique lorsque nous pouvons négliger la dérivée $B''(\lambda)$ de la fonction de répartition $B(\lambda)$ de l'énergie. Cette condition résulte du développement en série sous l'intégrale du produit $B(\lambda) \cdot \Phi(\lambda)$ où $\Phi(\lambda)$ est la fonction de transmission du filtre. Soit *E* l'énergie transmise et comme précédemment *a* et *b* les limites en dehors desquelles le filtre ne transmet plus rien.

$$E = \int_a^b B(\lambda) \Phi(\lambda) d\lambda = \int_a^b \left[B(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) B'(\lambda_0) + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} B''(\lambda_0) + \dots \right] \Phi(\lambda) d\lambda .$$

En choisissant:

$$\lambda_0 = \frac{\int_a^b \lambda \Phi(\lambda) d\lambda}{\int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda} \text{ (identique à l'expression 3)}$$

et en posant: $B''(\lambda_0) \cong 0$

alors:

$$E = B(\lambda_0) \cdot \int_a^b \Phi(\lambda) d\lambda .$$

Lorsque nous envisageons les magnitudes au lieu de l'énergie, l'expression (4) montre que l'on peut remplacer une magnitude hétérochromatique par une magnitude monochromatique si le produit $\mu^2 \frac{B''}{B}$ est négligeable. Cette expression permet de déterminer les valeurs de μ^2 (ou les largeurs équivalentes Δ) qui n'introduisent pas une erreur supérieure à une quantité e fixée. Admettons une erreur de $\pm 1/100$, la largeur équivalente Δ est alors fournie par l'expression:

$$\Delta^2 = \left| 0,22 \cdot \frac{B}{B''} \right| . \quad (16)$$

Le tableau 3 donne les largeurs équivalentes obtenues dans ces conditions. La formule (7) permet d'obtenir la valeur de μ^2 lorsque nous avons affaire à un filtre non rectangulaire.

TABLEAU 3.

λ_0 T	3000 Å	4000 Å	5000 Å	6000 Å	8000 Å
3000	145 Å	343 Å	900 Å	2000 Å	1550 Å
5000	550 Å	900 Å	975 Å	1310 Å	6550 Å
10000	665 Å	3300 Å	1300 Å	1140 Å	1230 Å
15000	1130 Å	775 Å	785 Å	850 Å	1030 Å
20000	575 Å	610 Å	685 Å	775 Å	970 Å
30000	425 Å	510 Å	600 Å	705 Å	920 Å

Remarque: Parfois la magnitude monochromatique équivalente à une magnitude hétérochromatique a été prise à la longueur d'onde effective

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\int \lambda B(\lambda, T) \Phi(\lambda) d\lambda}{\int B(\lambda, T) \Phi(\lambda) d\lambda}.$$

Nous avons calculé les magnitudes monochromatiques à la longueur d'onde moyenne des cas du tableau 1. Pour ces divers filtres, nous avons calculé aussi les longueurs d'onde effectives et les magnitudes monochromatiques à la longueur d'onde effective. L'emploi des filtres à courbe de transmission rectangulaire se prête bien à tous ces calculs. Il est inutile de présenter les valeurs numériques ici. Nous avons trouvé les résultats suivants:

$m_{\lambda_{\text{eff}}}$ est plus proche de la magnitude hétérochromatique pour les filtres:

- a) dont la borne inférieure est à 3500 Å et quelle que soit la position de la borne supérieure;
- b) dont la borne inférieure est plus grande que 4000 Å, et de largeur > 3000 Å pour les températures $> 5000^\circ$.

Dans tous les autres cas, $m_{\lambda_{\text{moyen}}}$ est plus proche de la magnitude hétérochromatique.

IV. RELATIONS ENTRE DEUX INDICES DE COULEUR RELATIFS A DES INTERVALLES DIFFÉRENTS DU SPECTRE

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, les longueurs d'onde moyenne de quatre filtres. Les magnitudes obtenues avec ces filtres sont respectivement m_1, m_2, m_3, m_4 . Nous avons donc quatre fois la relation 4 et nous pouvons définir entre autres les deux indices de couleur suivants:

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= m_1 - m_2 = m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} - 0,543 \mu_1^2 \frac{B''_{\lambda_1}}{B_{\lambda_1}} + 0,543 \mu_2^2 \frac{B''_{\lambda_2}}{B_{\lambda_2}} - \\ &\quad - 2,5 [\log_{10} \int \Phi_1(\lambda) d\lambda + \log_{10} \int \Phi_2(\lambda) d\lambda] , \\ C_{3,4} &= m_3 - m_4 = m_{\lambda_3} - m_{\lambda_4} - 0,543 \mu_3^2 \frac{B''_{\lambda_3}}{B_{\lambda_3}} + 0,543 \mu_4^2 \frac{B''_{\lambda_4}}{B_{\lambda_4}} - \\ &\quad - 2,5 [\log_{10} \int \Phi_3(\lambda) d\lambda + \log_{10} \int \Phi_4(\lambda) d\lambda] . \quad (17) \end{aligned}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_3$ et $\lambda_2 = \lambda_4$, mais que par contre $\mu_1^2 \neq \mu_2^2 \neq \mu_3^2 \neq \mu_4^2$, nous obtenons alors des relations entre $C_{1,2}$ et $C_{3,4}$ du même type que (4) et nous voyons qu'elles ne dépendent que du quotient $\frac{B''}{B}$, dont l'effet est d'autant plus important que les différences de largeurs équivalentes sont plus grandes. Cependant il est possible de tolérer des filtres plus larges, pour une même erreur, que ceux exigés dans les relations de magnitudes lorsque la différence $\lambda_2 - \lambda_1$ est suffisamment petite: c'est-à-dire telle que $\frac{B''_{\lambda_1}}{B_{\lambda_1}}$ soit sur le plus grand intervalle possible de même signe que $\frac{B''_{\lambda_2}}{B_{\lambda_2}}$.

Un cas particulièrement intéressant est celui où $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$.

L'expression (17) montre qu'il y a deux causes possibles d'écart à la linéarité, d'abord l'effet habituel des largeurs des filtres, ensuite le fait que les indices de couleur monochromatiques $m_{\lambda_2} - m_{\lambda_1}$ et $m_{\lambda_4} - m_{\lambda_3}$ ne sont pas liés linéairement. Cette dernière cause est cependant négligeable. Nous pouvons le voir en étudiant la relation qui lie les indices de couleur monochromatiques $C_{3750|4500}^{\lambda}$ et $C_{4500|5500}^{\lambda}$. Ces deux indices sont proches du système U-B/B-V. Entre 3000 et 30.000°, nous trouvons:

$$C_{3750|4500}^{\lambda} = 1,123 C_{4500|5500}^{\lambda} + 0,191$$

et le plus grand écart à la relation linéaire atteint 0,01. Nous pouvons facilement vérifier ceci en remarquant que si la relation entre les indices monochromatiques $C_{1,2}^{\lambda}$ et $C_{3,4}^{\lambda}$ est linéaire, la pente est indépendante de la température. En effet, la magnitude m_{λ_i} a pour expression:

$$m_{\lambda_i} = 1,086 \log_e B(\lambda_i, T)$$

où $B(\lambda_i, T)$ est la fonction de Planck. La pente est alors donnée par:

$$K = \frac{\frac{d(m_{\lambda_2} - m_{\lambda_1})}{d \frac{1}{T}}}{\frac{d(m_{\lambda_4} - m_{\lambda_3})}{d \frac{1}{T}}}$$

Si $\varphi(\lambda, T)$ est le gradient absolu, nous obtenons facilement que:

$$\frac{d \log_e B(\lambda, T)}{d \frac{1}{T}} = -\varphi(\lambda, T) \cdot \frac{T}{\lambda}$$

l'expression de la pente devient:

$$K = \frac{\frac{\varphi(\lambda_2, T)}{\lambda_2} - \frac{\varphi(\lambda_1, T)}{\lambda_1}}{\frac{\varphi(\lambda_4, T)}{\lambda_4} - \frac{\varphi(\lambda_3, T)}{\lambda_3}} \quad (18)$$

avec $\lambda_1 = 3750 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 4500$, $\lambda_3 = 4500$, $\lambda_4 = 5500 \text{ \AA}$ nous trouvons à 3000° , $K = 1,1178$ et à 30.000° , $K = 1,1320$.

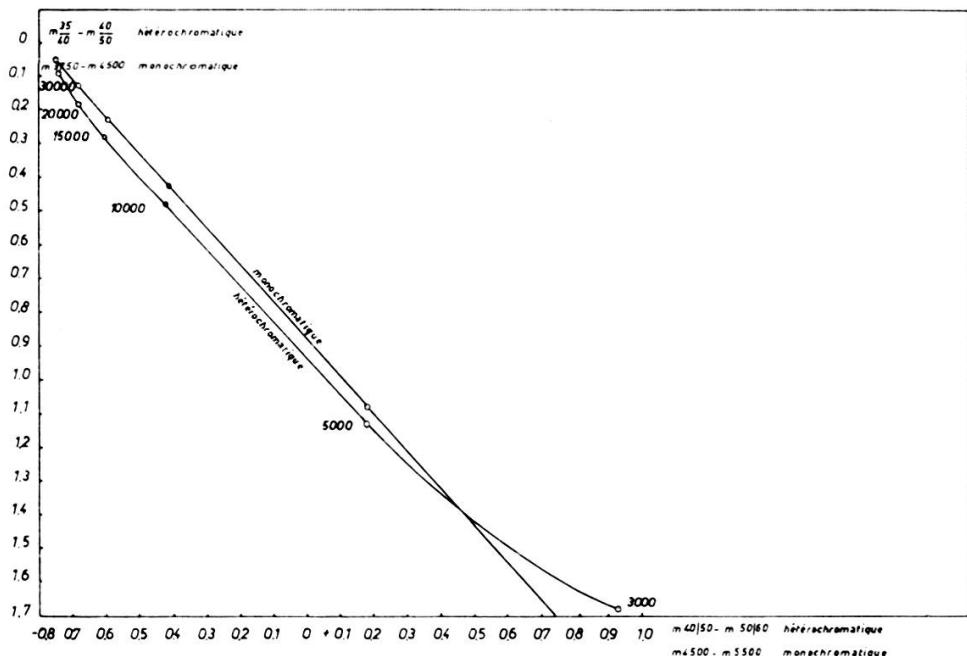


Fig. 4.

La variation de la pente est donc négligeable et ceci provient du fait qu'à une température donnée le gradient varie peu avec λ . L'expression ci-dessus de la pente est commode car elle permet d'utiliser la table établie par E. Vandekerkhove [4].

La figure 4 donne la relation entre les indices de couleur hétérochromatiques; la courbure provient donc uniquement de la largeur des filtres. Sur le même graphique est reproduite la droite qui exprime la relation entre les indices de couleur monochromatiques.

Dans le cas des étoiles réelles, les remarques faites sous II et relatives aux systèmes de magnitudes s'appliquent ici. Le problème est plus difficile à traiter car les effets de distance et de diamètre ne dépendent pas seulement de la différence des μ^2 mais aussi des valeurs individuelles de μ^2 .

V. RELATION ENTRE LES INDICES DE COULEUR ET LES GRADIENTS ABSOLUS

Les photométries en plusieurs couleurs offrent la possibilité d'étudier la variation du gradient le long du spectre et, ce qui est encore plus intéressant, le changement de gradient de part et d'autre d'un accident du fond continu du spectre stellaire. Nous nous proposons d'examiner la relation qui existe entre les indices de couleur monochromatiques ou hétérochromatiques et les gradients absolus.

Nous avons:

$$m(\lambda, T) = -2,5 \log_{10} B(\lambda, T)$$

la gradient peut être mis sous la forme:

$$\varphi(\lambda, T) = 5\lambda + \frac{1}{1,086} \frac{dm(\lambda, T)}{d\frac{1}{\lambda}}. \quad (19)$$

La différentielle de la magnitude peut être approchée par un indice de couleur et le gradient prend alors la forme:

$$\varphi(\lambda, T) \cong 5\lambda + \frac{1}{1,086} \frac{C_{\lambda' \lambda''}}{\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}} \quad (20)$$

avec:

$$\lambda' < \lambda < \lambda''$$

nous choisissons:

$$\lambda = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}.$$

Si l'expression (20) présente une approximation suffisante, alors il y a une relation linéaire très simple entre $\varphi(\lambda, T)$ et un

indice de couleur dont les longueurs d'onde sont réparties de part et d'autre de λ .

Dans les cas où $C_{\lambda' \lambda''}$ est établi à l'aide des magnitudes monochromatiques, nous trouvons que pour:

λ'	λ''	λ	Ecart maximum entre les relations (19) et (20)	$\lambda'' - \lambda'$
4500 Å	4750 Å	4625 Å	< 0,01	250 Å
4250 Å	5000 Å	4625 Å	0,016	750 Å
3750 Å	4500 Å	4125 Å	0,01	750 Å
5500 Å	6500 Å	6000 Å	0,02	1000 Å

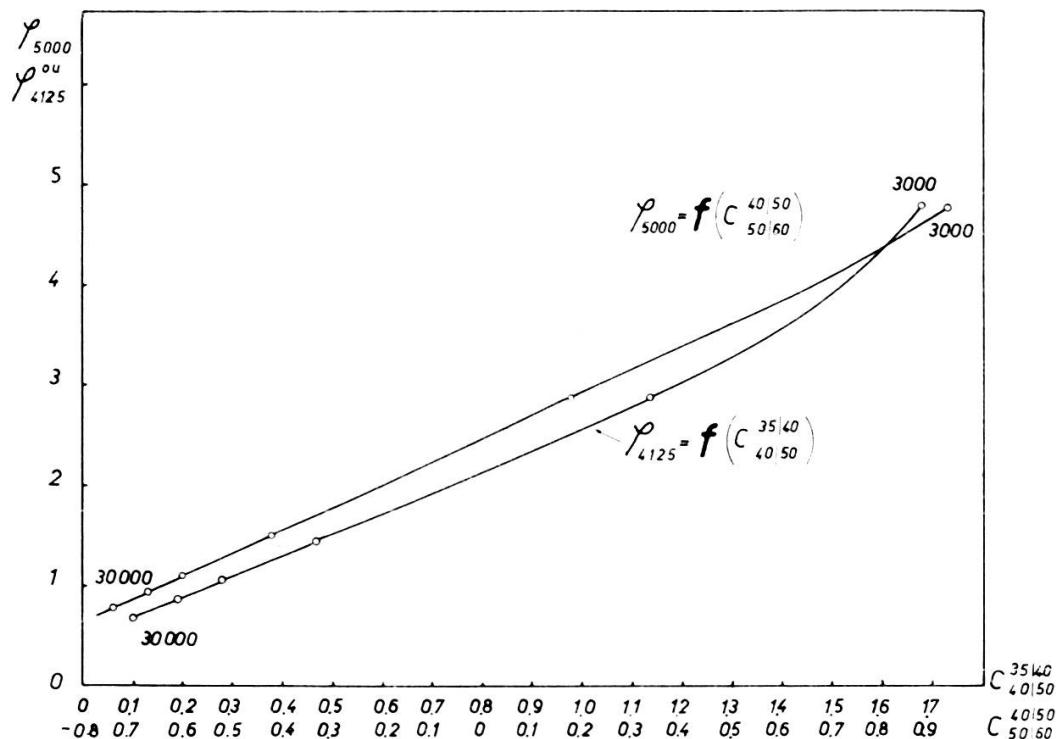


Fig. 5.

Donc lorsque la distance entre les longueurs d'onde composant l'indice de couleur est inférieure à 750 Å, le gradient peut être déterminé à l'aide de l'expression (20) avec une erreur $\leq 0,01$ pour autant que les températures envisagées soient comprises entre 3000 et 30.000° et les longueurs d'onde entre 3000 Å et 8000 Å.

Envisageons le cas où les filtres utilisés pour la détermination de l'indice de couleur ne sont pas monochromatiques. L'expression (17) montre que la relation entre l'indice de couleur monochromatique et l'indice de couleur hétérochromatique dépend des rapports $\frac{B''}{B}$. La figure 5 illustre l'effet de largeur de

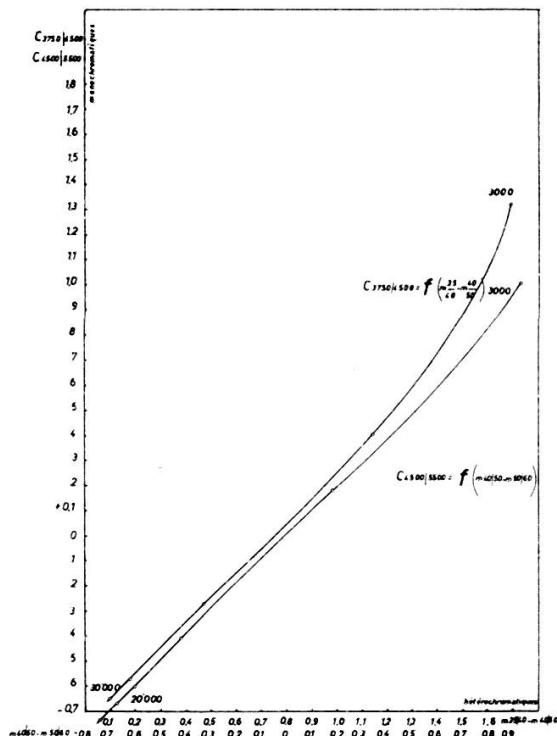


Fig. 6.

bande pour deux indices de couleur proches de U-B et B-V de Johnson et Morgan. Nous voyons qu'il est possible d'envisager une relation linéaire entre $\varphi(\lambda, T)$ et l'indice de couleur à condition d'exclure les températures inférieures à T_{Min} , ainsi que nous l'avons fait pour les magnitudes au début de ce travail. Cela provient du fait que les rapports $\frac{B''}{B}$ peuvent être exprimés approximativement et sur un certain intervalle, par une fonction linéaire de l'indice de couleur (figure 6).

VI. CONCLUSIONS

Quand nous voulons rattacher un système de magnitudes m_a à un autre m_b dont les caractéristiques photométriques sont

légèrement différentes, nous utilisons fréquemment une relation de forme:

$$m_b = \alpha m_a + \beta C_a + \gamma \quad (21)$$

où C_a est un indice de couleur défini dans le système a .

Les coefficients α , β , γ sont déterminés par l'application de la méthode des moindres carrés. Nous pouvons déduire de ce qui a été démontré ici, que l'échantillon utilisé pour la détermination des coefficients ne doit pas être quelconque. En effet, la variété des distances stellaires étant une cause de dispersion, il y aurait avantage à n'utiliser que des étoiles situées à une même distance. Cette condition est difficile à réaliser, elle conduit à n'utiliser pour séquence de magnitude que des amas galactiques situés à des distances variées, ce qui permettrait d'établir une série de relations légèrement différentes avec la distance. Pratiquement, nous pouvons nous contenter d'établir les paramètres de la relation (21) pour des intervalles restreints de magnitudes, cette condition limite un peu la dispersion de distance. Les mêmes considérations sont valables évidemment pour les relations entre indices de couleur.

TABLES.

Les développements que nous avons utilisés font fréquemment appel aux quotients $\frac{B''(\lambda, T)}{B(\lambda, T)}$ et $\frac{B'(\lambda, T)}{B(\lambda, T)}$.

Les tables 4 et 5 donnent les valeurs de ces quotients pour diverses longueurs d'onde et diverses températures. Les calculs ont été effectués par MM. J.-P. Imhof et A. Duriaux. Nous avons adopté les mêmes valeurs des constantes de la fonction de Planck et les calculs ont été effectués aussi pour les mêmes températures et les mêmes longueurs d'onde que dans [4]. Nous rappelons la valeur des constantes de la fonction de Planck:

$$B(\lambda, T) = 2c_1 \lambda^{-5} \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}$$

avec:

$$c_1 = 0,5952458 \cdot 10^{-5} \text{ erg. sec.}^{-1} \cdot \text{cm}^2$$

$$c_2 = 1,438 \text{ cm degr.}$$

λ en cm

T en degrés Kelvin

$$B''(\lambda, T) = \frac{\partial^2 B(\lambda, T)}{\partial \lambda_2} \quad B'(\lambda, T) = \frac{\partial^2 B(\lambda, T)}{\partial \lambda_2}$$

Les rapports $\frac{B''}{B}$ et $\frac{B'}{B}$ sont donnés sous la forme de deux nombres, le premier est indiqué avec trois décimales; il faut ensuite le multiplier par une puissance de 10 dont l'exposant est le second nombre.

BIBLIOGRAPHIE

1. JOHNSON, H. L. et W. W. MORGAN, *Ap. J.*, 117-3.
2. BÖHM, Karl-Heinz et Bodo SCHLENDER, *Zeitschrift für Astrophysik*, Bd 43, S. 95-97.
3. WESSELINK, *Trans. I.A.U.*, 7, 269, 1950.
4. VANDEKERKHOVE, E., *Comm. de l'Obs. royal de Belgique*, n° 52, 1953.

TABLE 4 $\frac{B''}{B}$

T	λ	3000 Å	3500 Å	4000 Å	4500 Å	5000 Å	5500 Å	6000 Å	6500 Å	7000 Å	7500 Å	8000 Å			
1000	1.957	1.2	1.001	1.2	5.573	11	3.300	11	2.050	11	1.323	11	6.017	10	
2000	3.524	11	1.680	11	8.600	10	4.626	10	2.572	10	1.458	10	8.809	10	
3000	1.041	11	4.351	10	1.866	10	7.745	9	2.760	9	4.661	8	8.293	9	
4000	3.317	10	1.003	10	1.851	9	9.876	8	1.810	9	1.864	9	5.556	8	
5000	7.667	9	—	8.542	8	—	2.829	9	—	2.338	9	—	1.753	8	
6000	—	2.222	9	—	4.257	9	—	3.693	9	—	1.780	9	—	1.071	9
7000	—	5.795	9	—	4.808	9	—	3.219	9	—	1.906	9	—	3.080	8
8000	—	6.566	9	—	4.204	9	—	2.285	9	—	9.743	8	—	3.988	8
9000	—	6.048	9	—	3.151	9	—	1.233	9	—	6.217	7	—	6.269	8
10000	—	4.945	9	—	1.956	9	—	2.029	8	—	7.738	8	—	1.017	9
11000	—	3.600	9	—	7.607	8	—	7.540	8	—	1.520	9	—	1.294	9
12000	—	2.493	9	—	3.740	8	—	1.621	9	—	2.177	9	—	2.002	9
13000	—	8.083	8	—	1.423	9	—	2.399	9	—	2.756	9	—	2.394	9
14000	—	5.090	8	—	2.382	9	—	3.093	9	—	3.266	9	—	2.016	9
15000	—	1.741	9	—	3.712	9	—	3.712	9	—	3.194	9	—	2.800	9
16000	—	2.882	9	—	4.040	9	—	4.266	9	—	4.114	9	—	3.269	9
17000	—	3.934	9	—	4.752	9	—	4.761	9	—	4.669	9	—	3.491	9
18000	—	4.899	9	—	5.398	9	—	5.206	9	—	4.785	9	—	3.687	9
19000	—	5.786	9	—	5.984	9	—	5.608	9	—	5.070	9	—	4.522	9
20000	—	6.600	9	—	6.517	9	—	5.972	9	—	5.527	9	—	4.156	9
21000	—	7.348	9	—	7.004	9	—	6.300	9	—	3.821	9	—	4.708	9
22000	—	8.036	9	—	7.447	9	—	6.601	9	—	4.081	9	—	4.875	9
23000	—	8.670	9	—	7.855	9	—	6.873	9	—	4.313	9	—	5.029	9
24000	—	9.256	9	—	8.229	9	—	7.124	9	—	5.167	9	—	4.499	9
25000	—	9.797	9	—	8.573	9	—	7.355	9	—	5.295	9	—	4.512	9
26000	—	1.030	10	—	8.891	9	—	7.569	9	—	6.446	9	—	6.296	9
27000	—	1.077	10	—	9.186	9	—	7.765	9	—	6.583	9	—	5.520	9
28000	—	1.120	10	—	9.460	9	—	7.947	9	—	6.709	9	—	5.711	9
29000	—	1.160	10	—	9.714	9	—	8.116	9	—	6.826	9	—	5.795	9
30000	—	1.198	10	—	9.950	9	—	8.273	9	—	6.936	9	—	5.875	9
35000	—	1.354	10	—	1.093	10	—	8.921	9	—	7.386	9	—	6.198	9
40000	—	1.471	10	—	1.166	10	—	9.401	9	—	7.719	9	—	6.439	9
45000	—	1.561	10	—	1.221	10	—	9.769	9	—	7.974	9	—	6.623	9
50000	—	1.631	10	—	1.265	10	—	1.006	10	—	8.177	9	—	5.694	9
100000	—	1.940	10	—	1.456	10	—	1.433	10	—	9.054	9	—	5.212	9

TABLE 5. $\frac{B'}{B}$

T	λ	3000 Å	3500 Å	4000 Å	4500 Å	5000 Å	5500 Å	6000 Å	6500 Å	7000 Å	7500 Å	8000 Å
1000	4.381	6	1.031	5	7.740	5	5.992	5	4.754	5	3.846	5
2000	6.326	5	4.444	5	3.246	5	2.441	5	1.877	5	1.469	5
3000	3.661	5	2.486	5	1.747	5	1.357	5	9.181	4	6.764	4
4000	2.329	5	1.507	5	9.981	4	6.654	4	4.397	4	2.815	4
5000	1.530	5	9.206	4	5.495	4	3.120	4	4.545	4	4.714	3
6000	9.979	4	5.306	4	2.522	4	7.864	3	3.298	3	1.063	3
7000	6.192	4	2.537	4	4.199	3	8.561	3	1.643	4	2.131	4
8000	3.363	4	4.798	3	1.435	4	2.064	4	2.605	4	2.912	4
9000	1.179	4	1.101	4	2.323	4	2.985	4	3.335	4	3.076	4
10000	5.498	3	2.347	4	3.256	4	3.204	4	3.902	4	3.560	4
11000	1.948	4	3.350	4	4.003	4	4.280	4	4.356	4	3.961	4
12000	3.097	4	4.174	4	4.614	4	4.748	4	4.725	4	4.325	4
13000	4.055	4	4.854	4	5.420	4	5.136	4	5.030	4	4.623	4
14000	4.866	4	4.427	4	5.545	4	5.461	4	5.287	4	4.868	4
15000	5.556	4	5.915	4	5.907	4	5.738	4	5.503	4	5.074	4
16000	6.452	4	6.337	4	6.218	4	5.976	4	5.690	4	5.249	4
17000	6.669	4	6.702	4	6.486	4	6.181	4	5.851	4	5.399	4
18000	7.422	4	7.021	4	6.721	4	6.360	4	5.993	4	5.643	4
19000	7.522	4	7.303	4	6.929	4	6.520	4	6.119	4	5.743	4
20000	7.875	4	7.551	4	7.114	4	6.660	4	6.229	4	5.832	4
21000	8.191	4	7.775	4	7.276	4	6.783	4	6.325	4	5.914	4
22000	8.475	4	7.973	4	7.424	4	6.897	4	6.415	4	5.982	4
23000	8.730	4	8.154	4	7.555	4	6.999	4	6.494	4	6.046	4
24000	8.962	4	8.316	4	7.675	4	7.089	4	6.567	4	6.103	4
25000	9.172	4	8.463	4	7.784	4	7.173	4	6.633	4	6.158	4
26000	9.364	4	8.599	4	7.885	4	7.251	4	6.694	4	6.206	4
27000	9.540	4	8.722	4	7.976	4	7.321	4	6.750	4	6.253	4
28000	9.705	4	8.836	4	8.060	4	7.384	4	6.801	4	6.294	4
29000	9.847	4	8.941	4	8.437	4	7.443	4	6.847	4	6.333	4
30000	9.987	4	9.037	4	8.209	4	7.499	4	6.891	4	6.367	4
35000	1.054	5	9.428	4	8.499	4	7.722	4	7.066	4	6.508	4
40000	1.095	5	9.716	4	8.710	4	7.884	4	7.195	4	6.614	4
45000	1.125	5	9.925	4	8.870	4	8.007	4	7.294	4	6.693	4
50000	1.148	5	1.009	5	9.002	4	8.104	4	8.024	4	6.756	4
100000	1.247	5	1.080	5	9.524	4	8.514	4	7.697	4	7.024	4

