Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 11 (1958)

Heft: 7: Colloque Ampère

Artikel: Application des équations de Maxwell à l'étude de la structure des rubans ferromagnétiques amincis électrolytiquement

Autor: Epelboin, I. / Schuhmann, D.C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738863

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Application des équations de Maxwell à l'étude de la structure des rubans ferromagnétiques amincis électrolytiquement

par I. Epelboin et D. C. Schuhmann
Laboratoire de physique (enseignement). Faculté des Sciences de Paris

---

I. Considérons un ruban métallique de conductibilité σ et d'épaisseur $2a$ placé dans un champ magnétique longitudinal $H_e = H_0 e^{j\omega t}$. Si la fréquence est assez basse pour que les courants de Foucault soient négligeables, le champ magnétique H_t à l'intérieur du matériau supposé homogène est équipollent au champ extérieur H_e. Dans ces conditions, la perméabilité complexe d'un ruban ferromagnétique peut s'écrire:

$$\mu' = \mu (1 - j\gamma)$$

et avec un champ très faible, le terme γ dû aux pertes par hystérésis et traînage peut souvent être négligé.

La fréquence augmentant, les courants de Foucault ne sont plus négligeables. Le champ intérieur H_t n'est plus égal au champ extérieur H_e. Pour déterminer le premier, on est alors obligé de mesurer l'induction moyenne B_m, ce qui conduit à définir une perméabilité apparente:

$$\mu_a = \mu_1 - j\mu_2 = \frac{B_m}{\mu_0 H_0} = \frac{\text{Flux}}{\text{Surface} \times \mu_0 H_0} \tag{1}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. Le déphasage global entre l'induction et le champ est égal à α tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Désignons par y la distance d'un point au plan passant par l'axe du ruban et parallèle à la surface. En posant $H_t = He^{j\omega t}$, les équations de Maxwell donnent:

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = j\omega\sigma\mu_0\mu' H(y) . \tag{2}$$

Par un calcul classique, on en tire:

$$H = H_0 \frac{Chmy}{Chma} \quad \text{avec} \quad m^2 = j\,\mu_0\,\mu'\,\sigma\,\omega\,.$$

d'où:

$$\mu_1 - j\,\mu_2 = \frac{\mu'}{ma}\,Thma$$

et pour des angles de pertes α assez faibles (tg $\alpha < 0{,}4$): [1]

$$\text{tg}\,\alpha \cong \gamma + \frac{1}{3}\mu_0\,\mu\,\sigma\,a^2\,(1 + \gamma^2)\,\omega\,. \tag{3}$$

Ce calcul suppose le matériau homogène, aussi ne s'applique-t-il pas aux rubans très minces dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur des dimensions des domaines de Weiss.

II. Lorsque les rubans sont assez épais pour que la subdivision en domaines soit négligeable, du moins en basse fréquence, on constate pourtant qu'il se produit souvent des anomalies dans la variation de la perméabilité μ_a en fonction de la fréquence; en particulier, la relation (3) n'est pas vérifiée. Ceci nous a amené à mesurer la perméabilité de certains rubans à différents stades de l'amincissement par polissage électrolytique et nous avons trouvé de notables variations. Celles-ci s'expliquent si l'on admet que la perméabilité n'est pas constante dans l'épaisseur du ruban. Effectivement, en polissant deux rubans identiques, le premier d'un seul côté, le deuxième simultanément des deux côtés, nous avons pu établir la courbe $\mu\,(y)$ donnant la perméabilité en chaque point [2, 3, 4, 5]. Comme il était prévisible, la courbe est symétrique, autrement dit la fonction $\mu\,(y)$ est paire. Si l'on introduit alors $\mu\,(y)$ dans les équations de Maxwell, l'équation (2) devient:

$$\frac{d^2\,H}{dy^2} = j\,\omega\,\sigma\,\mu_0\,(1 - j\,\gamma)\,\mu\,(y)\,H\,(y) \tag{4}$$

qui n'est pas intégrable. On peut cependant résoudre (4) par approximations successives (méthode de Picard) à condition que le champ H soit suffisamment voisin de H_0, ce qui est toujours réalisable en choisissant convenablement le domaine de fréquence [6].

En se limitant au premier terme de l'expression du champ et en introduisant la perméabilité moyenne:

$$\mu_m\,(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \mu\,(y)\,dy\,,$$

on obtient:

$$H(y) = H_0 - j(1 - j\gamma)\,\omega\,\sigma\,\mu_0 \,.\, H_0 \int_y^a y\,\mu_m(y)\,dy\,. \tag{5}$$

On en déduit, γ étant faible:

$$\operatorname{tg}\alpha \cong \gamma + \frac{\omega\,\sigma\,\mu_0}{a\,\mu_m(a)}(1+\gamma^2)\int_0^a y^2\,\mu_m^2(y)\,dy\,. \tag{6}$$

Ce développement suffit car, de façon analogue à (3), il donne le terme qui dépend linéairement de la fréquence. On en déduit $\frac{\sigma a}{\sigma}$, rapport de la conductibilité apparente à la conductibilité vraie, ou encore rapport des pentes des droites (3) et (6):

$$\frac{\sigma a}{\sigma} = \frac{3}{a^3\,\mu_m^2(a)}\int_0^a y^2\,\mu_m^2\,y\,(dy)\,. \tag{7}$$

On voit que si $\mu_m(y)$ décroît pour $0 \leqslant y \leqslant a$, on a $\frac{\sigma a}{\sigma} > 1$ et que si $\mu_m(y)$ croît pour $0 \leqslant y \leqslant a$, on a $\frac{\sigma a}{\sigma} < 1$. Ceci a été vérifié avec des rubans en ferronickel d'épaisseur supérieure à 50 microns, $\mu_m(a)$ et $\frac{\sigma a}{\sigma}$ étant mesurés pour plusieurs épaisseurs obtenues par polissage électrolytique [4] et [5].

III. Lorsque l'épaisseur des rubans est de l'ordre de grandeur des dimensions des domaines de Weiss, on constate que le champ coercitif et le rapport $\frac{\sigma a}{\sigma}$ sont beaucoup plus grands qu'avec les rubans plus épais. Nous avons comparé, par exemple [4], les valeurs du champ coercitif H_c et de $\frac{\sigma a}{\sigma}$ de deux rubans en permalloy amincis électrolytiquement, le deuxième étant obtenu à partir du premier. Le premier ruban, d'épaisseur 42 microns, donnait $H_c = 0{,}16$ Oe et $\frac{\sigma a}{\sigma} = 1{,}3$ tandis que le second, d'épaisseur 11 microns, donnait $H_c = 0{,}19$ Oe et $\frac{\sigma a}{\sigma} = 4{,}9$. Les calculs précédents ne peuvent expliquer cette valeur de $\frac{\sigma a}{\sigma}$ car, à cette échelle, la subdivision en domaines intervient et il est nécessaire de faire des hypothèses sur leur structure.

Appliquons aux rubans minces les calculs que L. Néel [7] a faits pour un matériau massif. Il suppose le ferromagnétique divisé en domaines tels que l'aimantation spontanée I_s varie de 180° de part et d'autre des parois.

Celles-ci sont planes et perpendiculaires à la surface. Le champ extérieur H_0 est parallèle à la surface et aux parois, et assez faible pour que la variation d'aimantation se produise uniquement par translation des parois supposées «infiniment souples». On peut considérer que les parois sont fixes, car leurs déplacements sont faibles devant la largeur moyenne des domaines et tout

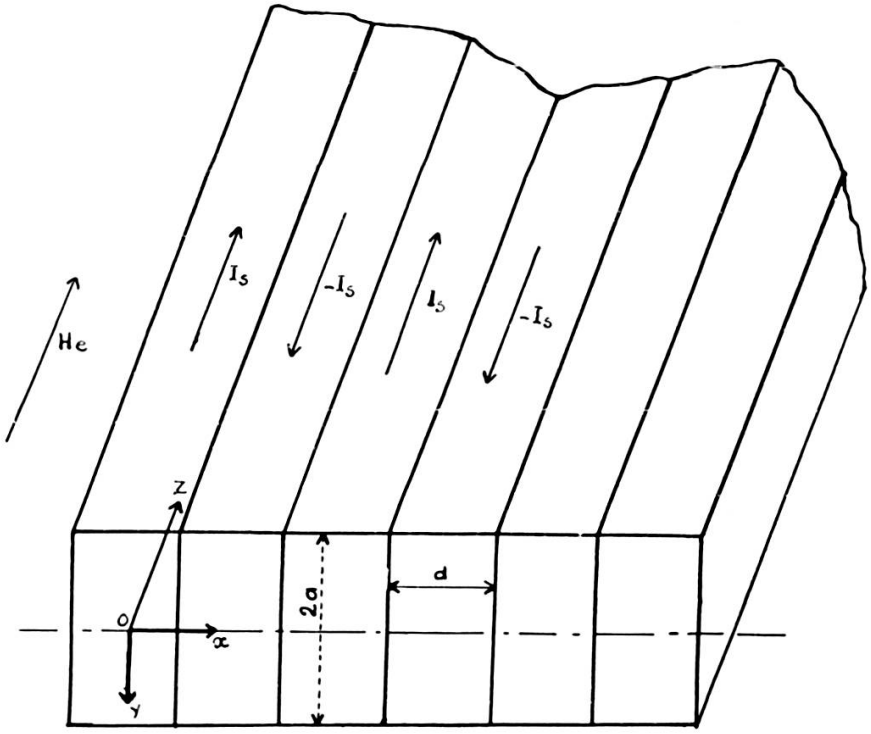

Fig. 1.

se passe au cours d'une variation lente d'aimantation comme si elles possédaient une susceptibilité superficielle $\chi_0 d$ par unité de longueur, χ_0 étant la susceptibilité initiale statique. Les domaines proprement dits ont une susceptibilité nulle, c'est-à-dire une perméabilité égale à 1. Dans le cas des rubans minces, nous supposerons que chaque paroi est parallèle à la longueur et qu'elle est limitée par les deux surfaces du ruban (voir figure). Nous supposerons en outre que le flux magnétique de fermeture est concentrée dans une couche superficielle d'épaisseur négligeable par rapport à celle du ruban.

En appliquant les équations de Maxwell à l'intérieur d'un domaine, c'est-à-dire avec $\mu = 1$ et $\gamma = 0$ et en choisissant l'axe des x parallèle à la largeur, on trouve:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = j\,\omega\,\sigma\,\mu_0\,H(x, y)\,. \tag{8}$$

En plaçant l'origine des coordonnées au milieu de la largeur d d'un domaine, L. Néel trouve une condition limite sur les parois:

$$2\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right)_{x=\frac{d}{2}} = -j\,\omega\,\sigma\,\mu_0^2\,\chi_0\,d\,\mathrm{H}\left(\frac{d}{2}, y\right). \tag{9}$$

On doit rechercher une fonction $\mathrm{H}(x, y)$ satisfaisant aux conditions (8), et (9), à la condition de périodicité:

$$\mathrm{H}(x, y) = \mathrm{H}(x + d, y)$$

et aux conditions limites au voisinage de la surface:

$$\mathrm{H}(x, a) = \mathrm{H}_0 \cos \beta x\,; \qquad \mathrm{H}(x, -a) = \mathrm{H}_0 \cos \beta x\,.$$

où le facteur $\cos \beta x$ est dû au flux de fermeture.
Seules ces deux dernières conditions sont différentes dans le cas de l'échantillon massif [7]. On recherche une solution de la forme:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos p_n x \frac{\mathrm{Ch}\, q_n y}{\mathrm{Ch}\, q_n a}. \tag{10}$$

Les conditions (8) et (9) donnent:

$$\begin{cases} -p_n^2 + q_n^2 = \dfrac{4\,r^2}{\mu_0\,\chi_0\,d^2} \\ p_n \sin \dfrac{p_n d}{2} = \dfrac{2\,r^2}{d} \cos \dfrac{p_n d}{2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad r^2 = \frac{1}{4}\,j\,\omega\,\sigma\,\mu_0^2\,\chi_0\,d^2 \tag{11}$$

On écrit:

$$p_n = \frac{2\,\varphi_n}{d} \tag{12}$$

où φ_n est la n^{ième} solution de l'équation transcendante complexe:

$$\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi = r^2 \tag{13}$$

satisfaisant aux développements limités suivants:

$$\varphi_1 = r - \frac{r^3}{6} + \frac{r^5}{72} - \cdots\,; \qquad \underset{n>0}{\varphi_{n+1}} = n\,\pi + \frac{r^2}{n\,\pi} - \frac{r^4}{n^3\,\pi^3}. \tag{14}$$

Pour exprimer $H \equiv H_0 \cos \beta$ pour $y = \pm a$, on écrit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos p_n x = \cos \beta x \qquad \text{pour} - \frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \cdot$$

On vérifie [7] que les $\cos p_n x$ forment une suite orthogonale et on obtient les c_n par la méthode de Fourier.
Le flux Φ rapporté à l'unité de longueur d'une section droite perpendiculaire à H est $\Phi_1 + \Phi_2$, où Φ_1 est le flux à l'intérieur des domaines et où Φ_2 correspond à l'aimantation provenant de la susceptibilité superficielle attribuée aux parois.

$$\Phi_1 = \frac{4\,\mu_0 H_0}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^a c_n \cos p_n x \frac{\mathrm{Ch}\, q_n y}{\mathrm{Ch}\, q_n a} dx\, dy = 2\,\mu_0 H_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n} \frac{\mathrm{Th}\, q_n a}{q_n}$$

$$\Phi_2 = 2\,\chi_0 \mu_0^2 d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_0}{d} \int_0^a c_n \cos \frac{p_n d}{2} \frac{\mathrm{Ch}\, q_n y}{\mathrm{Ch}\, q_n a} dy = 2\,\chi_0 \mu_0^2 H_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \varphi_n \frac{\mathrm{Th}\, q_n a}{q_n}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\chi_0 \mu_0^2 H_0 d^2}{2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_n \frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n} \mathrm{T}\, h q_n a \cdot$$

D'après (1), on a:

$$\mu_1 - j\,\mu_2 = \frac{\Phi}{\mu_0 H_0 x\, 2\, a} = \frac{\mu_0 \chi_0}{2 r} \frac{d}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sin \varphi_n}{\varphi_n} \left(\frac{1}{\mu_0 \chi_0} + \frac{\varphi_n^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{T}h \left(\frac{1}{\mu_0 \chi_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi_n^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\, r\, a}{d} \qquad (16)$$

On développe en série à l'aide de (14). On pose

$$\beta = \frac{2}{d} (s_1 r + s_2 r^3 + s_3 r^5 + \ldots) \qquad (16)$$

où s_1, s_2, s_3 ... sont des constantes.
On trouve alors, en se limitant aux termes dépendant linéairement de la fréquence:

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{12} \mu_0 \mu \sigma \omega \left[4\, a^2 + s d^2 - 3\,(1 - s_1^2) \frac{d^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{T}h\, 2\, \pi\, n\, a/d}{n^3 \pi^3} \right] \qquad (17)$$

où s est un coefficient qui ne dépend que des constantes s_1, s_2, s_3 ...

Le premier terme de tg α est identique à l'expression classique (3) avec $\gamma = 0$. Les autres termes sont dus à la subdivision en domaines. En comparant (3) à (17), on peut écrire:

$$\frac{\sigma a}{\sigma} = 1 + \frac{d^2}{4 a^2} \left[s - 3 \frac{(1 - s_1^2)}{\pi^3} \frac{d}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Th}\, 2 \pi\, na/d}{n^3} \right] . \qquad (18)$$

Cette formule pourrait expliquer pourquoi avec le fer et le nickel nous avons trouvé [4], que les valeurs de $\frac{\sigma a}{\sigma}$ relatives aux rubans très minces sont indépendantes de la température (les expériences ont été effectuées entre — 196° et + 20° C). Dans le cas des ferronickels, nous avons montré que certains procédés d'amincissement électrolytique n'apportent pas de perturbations à la structure macroscopique du métal [3] et [5]. Si l'on admet que les amincissements électrolytiques successifs ne modifient pas non plus la structure microscopique, la largeur des domaines doit rester constante et on doit le vérifier par la formule (18). Des mesures effectuées au laboratoire [8] et [9] semblent effectivement le confirmer. En amenant un ruban de mumétal au molybdène aux épaisseurs respectives de 42 - 24,7 - 21 - 17,7 - 14 et 11 microns, on a trouvé que la perméabilité initiale était égale à 15.800 à 6% près. On peut donc considérer qu'elle est constante, ce qui est en accord avec le modèle proposé. Les valeurs mesurées de $\frac{\sigma a}{\sigma}$ relatives à ces différentes épaisseurs sont respectivement 1,28 - 1,74 - 2,06 - 2,42 - 3,11 et 4,90. Si on les reporte dans l'équation (18) et qu'on en tire d, on trouve $d = 21$ microns à 3,5% près, avec $s_1 = 1$ et en prenant arbitrairement $s = 1$.

Lorsque les valeurs de la perméabilité initiale mesurée aux différentes épaisseurs s'écartent plus les unes des autres, les valeurs de d tirées de l'équation (18) d'après les mesures de $\frac{\sigma a}{\sigma}$ s'écartent également un peu. Par exemple, avec un ruban en ferronickel préparé moins soigneusement, dont la perméabilité initiale variait de 15%, en passant de 50 à 10,1 microns d'épaisseur, on trouvait [6] pour d (tiré de 18) une valeur constante à 10% près seulement. On peut penser que cette variation de perméabilité correspond à des modifications des paramètres des domaines.

Remarquons que certains auteurs ont trouvé avec les rubans laminés que le rapport des pertes observées aux pertes calculées était lié à l'épaisseur par une loi de la forme: $1 + \frac{k}{(2a)^{\frac{3}{2}}}$, k étant constant. Ce désaccord

peut être dû au laminage, car il est peu probable que ce procédé d'amincissement respecte les dimensions des domaines [10, 11].

Signalons enfin que l'utilisation d'un modèle légèrement différent [11, 12] de celui étudié ici, aboutit à une relation de la forme $1 + \left(\frac{d}{2a}\right)^r$, r variant entre 2 et 1 suivant la valeur de $\frac{\sigma a}{\sigma}$ et tendant vers 1 pour les valeurs de $\frac{\sigma a}{\sigma} > 10$. Avec des rubans amincis électrolytiquement, nous n'avons pu effectuer la vérification expérimentale de cette dernière relation.

BIBLIOGRAPHIE

1. I. Epelboin, *Rev. Gén. Elec.*, 1946, *55*, pp. 271-281 et 310-324.
2. —— et A. Marais, *C. R. Acad.*, 1949, *228*, pp. 1110-3.
3. A. Gaheri, thèse, juin 1953.
4. I. Epelboin, Colloque Ampère 1954; *Onde électrique*, 1955, p. 471.
5. A. Marais, thèse, juin 1955.
6. D. C. Schuhmann, Diplôme d'Etudes supérieures, octobre 1955.
7. L. Neel, *Annales de l'Inst. Fourier*, 1951, p. 301.
8. C. Abgrall, Diplôme d'Etudes supérieures, novembre 1951.
9. —— et I. Epelboin, *Comptes Rendus*, 1952, *234*, p. 1265.
10. C. E. Richards, E. V. Walker, A. C. Lynch, *Proceedings IEE*, août 1956 (104 B, p. 343).
11. E. W. Lee, *Proceedings of IEE*, monograph 284 M, février 1958.
12. K. M. Polivanov, *Izvestia Akademii Nauk S.S.S.R.*, seria Fiziki, 1952, *16*, n° 4, p. 449.

Manuscrit reçu le 3 juin 1958.