

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 11 (1958)
Heft: 4

Artikel: Champ tensoriel d'une masse fluide en rotation
Autor: Dive, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-738826>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHAMP TENSORIEL D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION

PAR

Pierre DIVE

(Avec 5 fig.)

INTRODUCTION

Peu après les publications initiales d'Einstein et de Schwarzschild, l'étude du champ tensoriel d'une sphère tournant autour d'un de ses diamètres a fait l'objet de plusieurs importants mémoires de de Sitter, Lense, Thirring, Kramer, Bach...

Aujourd'hui cette question, malgré son intérêt en Mécanique céleste, ne semble plus provoquer beaucoup la sagacité des chercheurs. A notre connaissance, elle n'a cependant pas encore été résolue en toute rigueur et dans des hypothèses assez générales, comme l'a été, par J. Haag, l'étude du champ d'une sphère hétérogène immobile, soumise à des tensions internes. Les équations relativement simples, dans le cas d'une masse au repos, sont, en effet, notablement plus difficiles à résoudre lorsque la masse est en mouvement. Et l'on comprend assez pourquoi les chercheurs les plus distingués ont dû se résigner à grever d'approximations les équations aux dérivées partielles du champ.

Les hypothèses simplificatrices consenties pour rendre le problème abordable ont consisté généralement à admettre :

- que la rotation de la masse est faible, ce qui autorise à traiter sa vitesse angulaire ω comme une quantité infiniment petite;
- que sa densité est très petite et, parfois même, qu'on peut négliger son effet gravifique, en adoptant pour le ds^2 d'uni-

- vers du champ induit, la forme galiléenne, au terme près apportant la correction due à sa rotation¹;
- que les tensions internes sont nulles ou négligeables, ce qui revient à considérer, à priori, que la masse est constituée par une multitude de points matériels sans contact entre eux, occupant l'intérieur d'une surface limite dont la forme sphérique et la rotation sont imposées d'avance;
 - que les vitesses de ces points sont de l'ordre de la racine carrée de la constante de la gravitation universelle G^2 ; hypothèse qui établit entre la vitesse angulaire ω et G une relation d'infinitude ($\omega \sim G^{\frac{1}{2}}$) permettant de développer le ds^2 jusqu'à l'ordre de $G^{\frac{3}{2}}$.

Dans le présent mémoire, qui n'a encore pour objet qu'une solution approchée, nous étudions les champs gravifiques *intérieur* et *extérieur* dus à la rotation lente d'une masse de faible densité substantielle, constituée par un *fluide parfait doué de pression interne*.

Nous consacrons d'abord quelques paragraphes à l'établissement de la forme générale du ds^2 , tirée des seules hypothèses faites sur son caractère révolutif, sur l'existence d'un plan équatorial de symétrie et sur la parité en ω de ses coefficients. Ainsi, avons-nous pu d'avance réduire à zéro sept des dix composantes distinctes du tenseur fondamental et ramener le problème à la recherche de trois fonctions inconnues seulement.

Nous ne supposons pas à priori que la masse fluide est sphérique. Mais nous montrons que cette forme résulte de l'approximation des équations au deuxième ordre près en ω ($\omega^2 \sim 0$) et de l'hypothèse d'une pression nulle sur la surface limite du fluide.

Nous établissons ensuite un système d'équations approchées au deuxième ordre près en ω (indépendamment de toute hypo-

¹ Cf. J. CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, p. 173.

² J. CHAZY, *loc. cit.*, t. II, p. 159.

thèse restrictive sur l'ordre de grandeur du produit Gq (q : densité substantielle)).

Nous trouvons ainsi que le seul coefficient γ du ds^2 qui dépend de ω doit satisfaire une équation aux dérivées partielles du second ordre dont la résolution constitue une partie essentielle de notre analyse.

Alors seulement nous introduisons l'hypothèse d'une densité substantielle q assez faible pour que la quantité

$$\alpha = -\frac{8}{3}\pi G \frac{q}{c^2}$$

(où c est la vitesse de la lumière dans le vide) puisse être assimilée à un infiniment petit et nous permettre de limiter nos développements à l'ordre de α^2 .

La nécessité de développer le ds^2 jusqu'à cet ordre vient de l'obligation d'obtenir des formules capables de fournir la valeur du résidu d'avance du périhélie de Mercure, non expliqué par la Mécanique de Newton¹.

De plus, pour comparer les ordres de grandeur des termes du ds^2 , nous admettons entre ω et α , regardés comme des infiniment petits, une relation d'infinitude telle que $\omega \sim \alpha^\beta$ ($\beta > 0$). Dans cette hypothèse, nous avons reconnu que, pour obtenir des approximations cohérentes jusqu'à l'ordre de α^2 , nous devions prendre pour exposant β un nombre de l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$ et qu'il suffisait alors de limiter au premier degré le développement en α du coefficient γ ². A ce degré d'approximation, l'équation aux dérivées partielles en γ se simplifie. Une substitution de fonction inconnue — qui nous est inspirée par la forme particulière de cette équation — nous amène à une équation différentielle du type d'Euler dont l'intégrale se calcule aisément. La solution ainsi obtenue satisfait bien à

¹ Cf. J. CHAZY, *loc. cit.*, t. II, p. 155.

² De Sitter et Chazy donnent des formules approchées jusqu'à l'ordre de $\alpha^{\frac{3}{2}}$ seulement (cf. J. CHAZY, *loc. cit.*, t. II, p. 159), et supposent que $\beta = \frac{1}{2}$, ce qui, dans le cas d'un fluide, empêcherait de regarder son aplatissement comme infiniment petit [Voir § 3, (65)].

toutes les conditions aux limites du problème. Mais, comme cette solution n'est pas tirée de l'intégrale générale de l'équation en γ , nous avons dû en démontrer l'*unicité*. Il nous a fallu, pour cela, étendre à un domaine non borné et à une équation aux dérivées partielles du type elliptique, dont les coefficients ne sont pas tous continus, la démonstration classique du principe de Dirichlet. Cette partie de notre analyse est renvoyée à la fin du mémoire.

Nous avons donc établi, *tant à l'intérieur*¹ *qu'à l'extérieur du domaine* du fluide, les expressions du ds^2 du champ, limitées à l'ordre de x^2 , et les formules exprimant, au même degré d'approximation, la variation de la pression et la variation de la densité d'inertie (densité d'énergie) à l'intérieur de la masse.

Cette solution est donnée dans le système des coordonnées géodésiques, le plus usité pour résoudre le problème de Schwarzschild relatif à la sphère au repos. Il est donc aisé, dans ce cas, de comparer nos formules (en y faisant $\omega = 0$) à celles de Schwarzschild, M. Brillouin, de Donder, Haag, Chazy...

Mais, en raison de l'interprétation concrète que nous donnons aux coordonnées isotropiques, il importait de traduire nos résultats dans le système de ces coordonnées. Car c'est bien dans le repère spatial trirectangle auquel nous les rapportons que nous avons exprimé les symétries du champ et son caractère révolutif; dotant ainsi ces variables de la signification physique de mesures de longueurs et d'angles². Il n'est pas possible, en toute rigueur, d'accorder ce privilège au système géodésique. L'obligation d'introduire deux variables différentes r_E et r_I pour désigner, dans ce système, la *distance au centre à l'extérieur* et la *distance au centre à l'intérieur*, enlève à ces coordonnées le caractère de *mesures* de longueurs, au sens de la Géométrie (H. Poincaré). Une semblable difficulté ne se présente pas avec les coordonnées isotropiques: A l'intérieur du domaine du fluide, comme à l'extérieur, une même variable l mesure la distance au centre, et c'est bien par rapport à cette

¹ Notons un mémoire de J. Lense et Tirring qui traite en première approximation du champ intérieur d'un fluide dénué de pression (cf. *Physikalische Zeitschrift*, Band XIX, 1918, p. 156).

² Cf. J. HAAG, Le problème de Schwarzschild. *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XLVI, p. 3.

unique variable que se vérifie le raccord à la surface des potentiels et de leurs dérivées.

En terminant, nous confrontons nos formules à celles qui ont été obtenues par d'autres procédés analytiques.

Dans le cas de la sphère immobile, une différence entre l'expression du coefficient de dt^2 , dans le ds^2 isotropique approché de de Sitter, retrouvé par J. Chazy¹ et l'expression que nous avons obtenue, disparaît facilement quand on remarque que, dans le ds^2 de de Sitter, le coefficient attractif képlérien est encore exprimé en coordonnées géodésiques et dès qu'on donne à ce coefficient, comme cela est indiqué pour la cohérence des formules, son expression en coordonnées isotropiques.

§ 1. FORME A PRIORI DU ds^2 D'UNIVERS DU CHAMP

1. CONDITIONS GÉNÉRALES ET AXES DE COORDONNÉES

Dans la théorie newtonienne, une masse fluide homogène, en rotation lente autour d'un axe et soumise à une pression superficielle uniforme, affecte la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati (Mac Laurin) dont l'*aplatissement* k est de l'ordre de la vitesse angulaire ω .

Au premier ordre d'approximation en ω , auquel nous nous bornerons dans la présente étude, la surface limite du fluide en rotation peut cependant être assimilée à une sphère².

¹ Cf. J. CHAZY, *loc. cit.*, t. I, p. 102 et t. II, p. 157.

² Soient: a le $\frac{1}{2}$ grand axe et b le $\frac{1}{2}$ petit axe de la méridienne limite; $k = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$, son *aplatissement*. Son équation peut s'écrire $x^2(1 - k^2 \dots) + y^2 = b^2$.

Or, on démontre que (voir § III)

$$\omega^2 \simeq \frac{8}{15} \pi G q k^2 .$$

(G: constante de la gravitation universelle; q : densité; $\pi = 3,14159\dots$ Cf. P. DIVE, *Rotations internes des astres fluides* (thèse, p. 81, Dunod, édit.)) En négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 2 en k ou en ω , l'équation de la méridienne se réduit donc à celle d'une circonférence de rayon b .

Nous montrerons que cette propriété est conservée, au même ordre d'approximation, dans la Gravifique tensorielle d'Einstein.

L'existence d'un plan de symétrie équatorial, démontrée en Mécanique classique, pour une masse hétérogène, par Lichtenstein, Plancherel, Wavre, et par nous-même, dans le cas des rotations internes baroclines sera postulée ici.

Dans ces conditions, rapportons la masse tournante à un repère cartésien trirectangle (x), fixe dans l'Ether, d'axes Ox ,

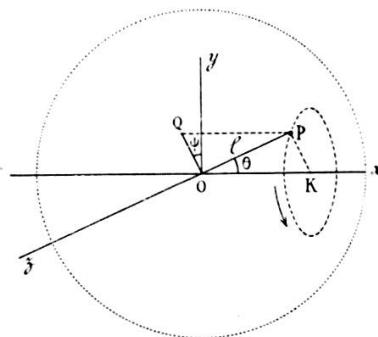


Fig. 1.

Oy , Oz , les axes Oy et Oz étant situés dans le plan équatorial de la masse, et l'axe Ox étant placé sur l'axe de rotation.

Nous utiliserons aussi un repère polaire (l) correspondant à ce repère cartésien (x):

Soit un point $P(x, y, z)$ de projection $Q(y, z)$ sur le plan de symétrie $y Oz$. Posons

$$l = OP, \quad \theta = \angle Ox, OP, \quad \psi = \angle Oy, OQ.$$

on a, de (l) à (x) les formules de transformation

$$x = l \cos \theta, \quad y = l \sin \theta \cos \psi, \quad z = l \sin \theta \sin \psi; \quad (1)$$

et, de (x) à (l), les formules inverses

$$\left. \begin{aligned} l &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \text{Arcos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \psi &= \text{Arctg} \frac{z}{y}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nous supposons la masse isolée, c'est-à-dire infiniment éloignée de toute autre masse ou localisation d'énergie. Le champ gravifique qu'elle induit (dans son voisinage), ainsi que le ds^2 d'Univers qui l'exprime seront alors:

- 1^o de révolution autour de Ox;
- 2^o stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps t^1 ;
- 3^o symétrique relativement au plan $x = 0$.

Les conditions 1^o et 3^o ont un sens précis dans la géométrie euclidienne que nous adoptons ici (cf. J. HAAG, Le problème de Schwarzschild. *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XLVI, p. 3).

2. INVARIANTS DU GROUPE DES ROTATIONS

La première condition implique que le ds^2 du champ soit un invariant du groupe des rotations prolongé statiquement².

Prenons ψ comme paramètre de rotation autour de Ox et désignons par x^- , y^- , z^- , t^- des dérivées, ou des différentielles, par rapport à une variable non désignée. Ce groupe et son prolongement s'écrivent en coordonnées rectangulaires rectilignes:

$$(3) \quad \begin{cases} x' = x, \\ y' = y \cos \psi + z \sin \psi, \\ z' = -y \sin \psi + z \cos \psi, \\ t' = t \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x'^- = x^-, \\ y'^- = y^- \cos \psi + z^- \sin \psi, \\ z'^- = -y^- \sin \psi + z^- \cos \psi, \\ t'^- = t^- \end{cases}$$

Les invariants de ce groupe à un paramètre s'obtiennent en annulant ses transformations infinitésimales dont les coefficients sont ici de deux sortes³. Soit, en adoptant O comme

¹ t : variable temporelle, sera dit *temps cosmique*.

² Cf. J. LE ROUX, *La Mécanique invariante*, p. 19 ou P. DIVE, *Le Principe de relativité selon Poincaré et la Mécanique invariante de Le Roux*, p. 33.

³ D'une façon générale, considérons dans l'espace à 3 dimensions (à 6 paramètres indépendants ψ_h) un groupe à m variables x_μ :

$$x'_\lambda = f_\lambda(\dots x_\mu \dots; \dots \psi_h \dots)$$

(λ et μ : de 1 à m ; h : de 1 à 6). Les valeurs initiales ψ_h^0 donnent la transformation identique: *Voir la suite à la page suivante.*

valeur initiale du paramètre ψ :

$$\tau_{\psi x} = 0, \quad \tau_{\psi y} = z, \quad \tau_{\psi z} = -y, \quad \tau_{\psi t} = 0,$$

et

$$\bar{\tau}_{\psi x} = 0, \quad \bar{\tau}_{\psi y} = z^-, \quad \bar{\tau}_{\psi z} = -y^-, \quad \bar{\tau}_{\psi t} = 0.$$

Le nombre m des variables $x, y, z, t, x^-, y^-, z^-, t^-$ étant égal à 8 et la matrice des coefficients:

$$0 \quad z \quad -y \quad 0 \quad 0 \quad z^- \quad -y^- \quad 0,$$

étant de rang 1, le nombre des invariants indépendants est égal à $7 = 8 - 1$

Ce sont les intégrales en F de l'équation aux dérivées partielles

$$z \partial_y F - y \partial_z F + z^- \partial_{y^-} F - y^- \partial_{z^-} F = 0. \quad (5)$$

Elles sont données par les intégrales premières du système différentiel

$$\frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y} = \frac{dy^-}{z^-} = -\frac{dz^-}{y^-}. \quad (6)$$

On trouve ainsi les sept invariants:

$$x, \quad y^2 + z^2, \quad t, \quad x^{-2}, \quad y^{-2} + z^{-2}, \quad yz^- - zy^-, \quad t^-. \quad (7)$$

Le ds^2 cherché est une forme quadratique des différentielles $x^- = dx, y^- = dy, z^- = dz, t^- = dt$ qui ne dépend que des invariants ci-dessus.

Suite de la note 3.

$$x'_\lambda = f_\lambda (\dots x_\mu \dots; \dots \psi_h^0 \dots) \equiv x_\lambda.$$

Si l'on pose

$$\tau_{h\lambda} (\dots x_\mu \dots) \equiv \lim_{\psi_h = \psi_h^0} \partial_{\psi_h} f_\lambda,$$

les invariants indépendants de ce groupe sont les solutions indépendantes $F(\dots x_\lambda \dots)$ du système d'équations aux dérivées partielles

$$\sum_\lambda \tau_{h\lambda} \partial_{x_\lambda} F = 0.$$

Si p est le rang de la matrice $\tau_{h\lambda}$: formée avec les coefficients $\tau_{h\lambda}$, on sait que ce système admet $m - p$ solutions indépendantes (cf. par exemple GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 640).

On a donc

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &\equiv H dx^2 + K (dy^2 + dz^2) + L (y dz - z dy)^2 \\ &+ M dx (y dz - z dy) + N dx dt \\ &+ P (y dz - z dy) dt + Q dt^2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

où, en vertu des conditions 1^o, 2^o, 3^o (p. 6), les sept coefficients H, K, L, M, N, P, Q ne peuvent dépendre que de x^2 et $(y^2 + z^2)$ et sont indépendants du temps.

3. SYMÉTRIE RELATIVEMENT AU PLAN $x = 0$

Mais, en écrivant x^2 au lieu de x , nous ne tenons compte que partiellement de la symétrie du champ relativement au plan $x = 0$. Nous devons exprimer aussi que le ds^2 est invariant quand on y substitue simultanément $-x$ et $-dx$ à x et dx respectivement. Ce qui donne la condition:

$$[M (y dz - z dy) + N dt] dx \equiv 0$$

quels que soient dx, dy, dz, dt . D'où nécessairement $M \equiv 0$, $N \equiv 0$.

Il reste, en ordonnant:

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv H dx^2 + (K + L z^2) dy^2 + (K + L y^2) dz^2 \\ &- 2 L y z dy dz + P (z dy - y dz) dt + Q dt^2. \end{aligned}$$

4. PARITÉ EN ω DES COEFFICIENTS DU ds^2

L'expression du ds^2 se simplifie encore, quand on tient compte de la parité de ses coefficients par rapport à la vitesse angulaire ω de la masse.

Considérons deux points $X(x, y, z)$ et $X'(-x, y, -z)$, et deux éléments de parcours $d\vec{X}(dx, dy, dz)$ et $d\vec{X}'(-dx, dy, -dz)$, symétriques deux à deux par rapport à Oy

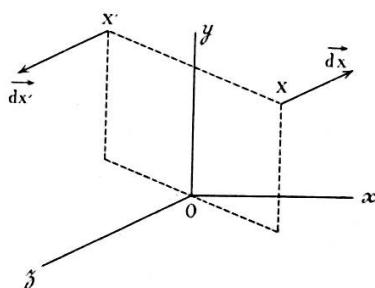


Fig. 2.

Le ds^2 doit évidemment conserver la même valeur quand on y substitue $-\omega$ à ω et $d\vec{X}'$ à $d\vec{X}$, ces deux éléments étant supposés parcourus dans le même temps dt .

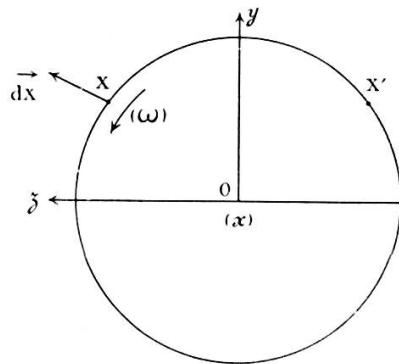


Fig. 3 a.

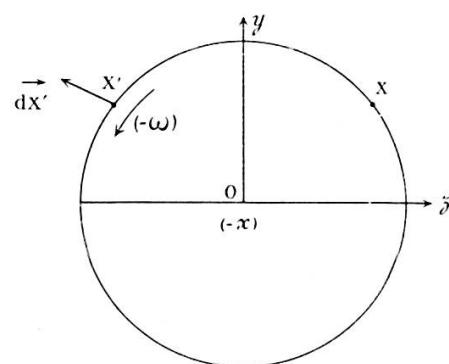


Fig. 3 b.

Les fonctions H, K, L, P, Q étant paires en x et z , cette condition se traduit par l'identité:

$$\begin{aligned} & [H(\omega) - H(-\omega)] dx^2 \\ & + \{K(\omega) - K(-\omega) + [L(\omega) - L(-\omega)] z^2\} dy^2 \\ & + \{K(\omega) - K(-\omega) + [L(\omega) - L(-\omega)] y^2\} dz^2 \\ & - 2[L(\omega) - L(-\omega)] yz dy dz \\ & + [P(\omega) + P(-\omega)] y dz dt - [P(\omega) + P(-\omega)] z dy dt \\ & + [Q(\omega) - Q(-\omega)] dt^2 \equiv 0, \end{aligned}$$

qui doit être satisfaite quels que soient dx, dy, dz, dt . D'où (x, y, z étant fixés):

$$\left. \begin{aligned} H(-\omega) &= H(\omega), & L(-\omega) &= L(\omega), \\ K(-\omega) &= K(\omega), & Q(-\omega) &= Q(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

tandis que

$$P(-\omega) = -P(\omega). \quad (11)$$

Ainsi H, K, L, Q sont des fonctions paires de ω , alors que P est une fonction impaire de ω .

Afin que le ds^2 soit du type *hyperbolique normal*¹, nous imposerons, de plus, que la fonction Q , coefficient de dt^2 , soit constamment positive.

Ces propriétés sont vraies en toute rigueur.

¹ Ce qui permet de mettre en évidence la nature spéciale de la variable temporelle t .

5. LE ds^2 ISOTROPIQUE AU SECOND ORDRE PRÈS EN ω

Les fonctions H , K , L , Q étant paires en ω sont donc, au second ordre près, indépendantes de ω .

Imaginons que ω décroisse indéfiniment. La forme du fluide tend vers celle d'une sphère. A la limite, la symétrie sphérique du champ exige que le ds^2 soit une forme quadratique ne dépendant que des invariants du groupe prolongé des rotations autour d'un point, c'est-à-dire des combinaisons¹:

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad t, \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ x \, dx + y \, dy + z \, dz, \quad dt.$$

Ainsi, quand $\omega = 0$, tous les coefficients des termes en dx^2 , dy^2 , dz^2 doivent être égaux et fonctions de l seul.

Dès lors, H , K , L , Q étant, au deuxième ordre près, indépendantes de ω , l'expression (9) du ds^2 nous donne les conditions nécessaires:

$$H \equiv K + Lz^2 \equiv K + Ly^2, \quad \text{quels que soient } x, y, z.$$

Ce qui exige

$$\underline{L} \equiv 0 \quad \text{et} \quad \underline{H} \equiv \underline{K}. \quad (12)$$

Au second ordre près en ω , nous pouvons donc poser, à priori, en *coordonnées cartésiennes*:

$$ds^2 \equiv H(dx^2 + dy^2 + dz^2) + P(z \, dy - y \, dz) \, dt + Q \, dt^2 \quad (13)$$

où figurent seulement trois fonctions inconnues:

$$H(l), \quad P(\omega, x^2, y^2 + z^2), \quad Q(x^2, y^2 + z^2).$$

Passons des coordonnées cartésiennes x, y, z aux coordonnées polaires l, θ, ψ , au moyen de la substitution (1). Il vient:

$$ds^2 \equiv H[dl^2 + l^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\psi^2)] - P \, l^2 \sin^2 \theta \, d\psi \, dt + Q \, dt^2 \quad (14)$$

¹ Cf. par exemple VON LAUE, *La théorie de la Relativité*, t. II, p. 226.

où H et Q dépendent de 1 seul, tandis que P est une fonction impaire du premier ordre en ω et ne dépend que de 1 et $\sin^2 \theta$.

Les formes (13) et (14) du ds^2 sont *isotropiques*. On voit que les conditions imposées au fluide et le recours aux coordonnées euclidiennes cartésiennes ou polaires nous y conduisent directement. Nous dirons que ces coordonnées sont *isotropiques*.

6. LES COORDONNÉES DE SCHWARZSCHILD

Posons

$$H l^2 = -r^2 . \quad (15)$$

D'où, par inversion,

$$l = f(r) , \quad H(l) = H[r] . \quad (16)$$

Il vient :

$$H dl^2 = H[r] f'^2(r) dr^2 , \quad (17)$$

$$P(\omega, l, \sin^2 \theta) = P[\omega, r, \sin^2 \theta] , \quad (18)$$

$$Q(l) = Q[r] . \quad (19)$$

Les coordonnées r, θ, ψ, t seront appelées *coordonnées géodésiques* ou *coordonnées de Schwarzschild*. Ce sont celles qui ont été le plus souvent utilisées pour intégrer les équations aux dérivées partielles du champ dans la gravifique d'Einstein. Nous les noterons aussi

$$\xi_1 = r , \quad \xi_2 = \theta , \quad \xi_3 = \psi , \quad \xi_4 = t . \quad (20)$$

Introduisons trois nouvelles fonctions μ, λ, η telles que

$$e^{\mu(r)} = -H[r] f'^2(r) , \quad (21)$$

$$e^{\lambda(r)} = Q[r] , \quad (22)$$

$$2\omega\eta(r, \sin^2 \theta) = -P[\omega, r, \sin^2 \theta] f^2(r) \sin^2 \theta . \quad (23)$$

Il vient :

$$ds^2 \equiv -e^\mu dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) \\ + 2\omega\eta d\psi dt + e^\lambda dt^2$$

(24)

où les fonctions inconnues μ et λ ne dépendent que de r , tandis que la fonction η peut dépendre de r et $\sin^2 \theta$.

§ II. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU CHAMP

1. RAPPEL DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Désignons par $\gamma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta: 1, 2, 3, 4$) les potentiels de gravitation en coordonnées de Schwarzschild; par $\chi_{\alpha\beta}$ le *tenseur de courbure*, ou *tenseur de Riemann-Christoffel contracté*; par $\Theta_{\alpha\beta}$, le *tenseur phénoménal d'énergie*. Les équations générales de la gravifique tensorielle s'écrivent:

$$\boxed{\chi_{\alpha\beta} \equiv A \left(\Theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \Theta \right)} \quad (25)$$

où A est lié à la constante de la gravitation newtonienne G et à la vitesse de la lumière c par la relation

$$A = -8\pi \frac{G}{c^2} \quad (26)$$

$$(G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ c.g.s.}, \quad A = -1,87 \cdot 10^{-27} \text{ c.g.s.})$$

Représentons par $\gamma \equiv [\gamma_{\alpha\beta}]$ le déterminant des composantes covariantes $\gamma_{\alpha\beta}$ (*potentiels de gravitation*) du tenseur fondamental, et par

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \equiv \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\alpha\beta\mu} \equiv \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\mu} (\partial_\alpha \gamma_{\beta\mu} + \partial_\beta \gamma_{\lambda\mu} - \partial_\mu \gamma_{\alpha\beta})^1 \quad (27)$$

un symbole à trois indices de Christoffel.

On a ²

$$\boxed{\chi_{\lambda\nu} \equiv -\partial_\alpha \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha + \Gamma_{\lambda\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha + \partial_{\lambda\nu} L \sqrt{-\gamma} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma}} \quad (28)$$

¹ Les indices γ, λ, ν ne peuvent être confondus avec les fonctions désignées par les mêmes lettres.

$\partial_\alpha, \partial_{\alpha\beta}, \partial_\alpha^2$ désigneront respectivement les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha^2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

² Cf., par exemple, DE DONDER, *Mémor. des Sc. math.*, fasc. XLIII p. 2.

D'autre part, soit en un point du champ, ρ : la *densité d'énergie* (ou *d'inertie*), p : la *pression*. Le tenseur phénoménal pour un fluide parfait est¹

$$\Theta_{\alpha}^{\beta} \equiv \rho \Omega_{\alpha} \Omega^{\beta} - \frac{p}{c^2} \gamma_{\alpha}^{\beta}, \quad (29)$$

où $\Omega^{\alpha} = \frac{d \xi_{\alpha}}{ds}$ est une composante contravariante de la *vitesse quadridimensionnelle*.

La différence

$$\sigma = \rho - \frac{p}{c^2}$$

est la *densité substantielle*. Elle est égale à la constante q à l'intérieur ($\sigma_i = q$) et à 0 à l'extérieur ($\sigma_e = 0$).

Rappelons aussi l'*identité d'Einstein-Cartan*:

$$\partial_{\beta} \left(\chi_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha}^{\beta} \chi \right) \equiv 0. \quad (30)$$

Elle entraîne, comme conséquence des équations (25), les quatre *équations « de conservation »*:

$$\partial_{\beta} \Theta_{\alpha}^{\beta} = 0. \quad (31)$$

Pour expliciter les équations (25) nous aurons donc à calculer, au deuxième ordre près, en ω :

1^o le déterminant γ et les dérivées partielles

$$\partial_{\alpha} L \sqrt{-\gamma}, \quad \partial_{\alpha\beta} L \sqrt{-\gamma};$$

2^o les composantes contravariantes $\gamma^{\alpha\beta}$ du tenseur fondamental;

3^o les symboles de Christoffel de seconde espèce:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2} \gamma^{\mu\lambda} (\partial_{\alpha} \gamma_{\beta\lambda} + \partial_{\beta} \gamma_{\lambda\alpha} - \partial_{\lambda} \gamma_{\alpha\beta}); \quad (32)$$

4^o les dix composantes $\chi_{\alpha\beta}$ du tenseur de courbure;

¹ Cf., J. CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, p. 94.

5^o les composantes contravariantes et covariantes de la vitesse quadridimensionnelle:

$$\Omega^\lambda = \frac{d\xi_\lambda}{ds}, \quad \Omega_\mu = \gamma_{\lambda\mu} \Omega^\lambda;$$

6^o les composantes du tenseur phénoménal d'énergie $\Theta_{\alpha\beta}$ et ses composantes mixtes Θ_α^β ;

7^o les quatre dérivées partielles $\partial_\beta \Theta_\alpha^\beta$.

2. LE DÉTERMINANT γ

La formule (24) nous donne

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -e^u, & \gamma_{22} &= -r^2, & \gamma_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, & \gamma_{44} &= e^\lambda \\ \gamma_{12} &= \gamma_{13} = \gamma_{14} = \gamma_{23} = \gamma_{24} = 0, & \gamma_{34} &= \omega \eta, \end{aligned} \tag{33}$$

avec $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}$.

D'où, au deuxième ordre près, en ω :

$$\gamma = -r^4 e^{\lambda+\mu} \sin^2 \theta. \tag{34}$$

On en tire

$$\partial_r L \sqrt{-\gamma} \equiv \frac{2}{r} + \frac{1}{2} (\lambda' + \mu'), \tag{35}$$

$$\partial_\theta L \sqrt{-\gamma} \equiv \cot \theta, \tag{36}$$

en posant

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dr}, \quad \mu' = \frac{d\mu}{dr}.$$

Les dérivées partielles en ψ et t de γ et $L \sqrt{-\gamma}$ étant identiquement nulles.

3. LES COMPOSANTES CONTRAVARIANTES $\gamma^{\alpha\beta}$

Nous appliquons la formule

$$\gamma^{\alpha\beta} \equiv (-1)^{\alpha+\beta} \frac{[\gamma]^{\alpha\beta}}{\gamma}, \tag{37}$$

où $[\gamma]^{\alpha\beta}$ est le déterminant mineur du déterminant γ , obtenu en supprimant, dans ce dernier, la α^e ligne et la β^e colonne.

Au deuxième ordre près en ω , on obtient:

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma^{11} &\equiv -e^{-\mu}, \quad \gamma^{22} \equiv -\frac{1}{r^2}, \quad \gamma^{33} \equiv \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad \gamma^{44} \equiv e^{-\lambda} \\ \gamma^{12} \equiv \gamma^{13} \equiv \gamma^{14} \equiv \gamma^{23} \equiv \gamma^{24} \equiv 0, \quad \gamma^{34} &\equiv \frac{\omega \tau_1}{r^2 e^\lambda \sin^2 \theta},\end{aligned}} \quad (38)$$

avec $\gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{\beta\alpha}$.

4. LES SYMBOLES DE CHRISTOFFEL

A titre d'exemple, donnons le calcul de Γ_{23}^3 et Γ_{23}^4 .

On a

$$\Gamma_{23}^3 = \gamma^{3\lambda} \Gamma_{23\lambda}.$$

D'après le tableau (38) seules les valeurs 3 et 4 de λ donnent à $\gamma^{3\lambda}$ des valeurs non identiquement nulles. Il suffit alors d'écrire

$$\Gamma_{23}^3 \equiv \gamma^{33} \Gamma_{233} + \gamma^{34} \Gamma_{234},$$

ou, puisque toutes les dérivées partielles en ∂_3 et ∂_4 sont identiquement nulles,

$$\Gamma_{23}^3 \equiv \frac{1}{2} (\gamma^{33} \partial_2 \gamma_{33} + \gamma^{34} \partial_2 \gamma_{34}).$$

Les composantes γ^{33} et γ_{33} sont d'ordre 0 en ω , tandis que γ^{34} et γ_{34} sont du premier ordre. Le produit

$$\gamma^{34} \partial_2 \gamma_{34}$$

est donc du second ordre en ω et peut être négligé ($\omega^2 \simeq 0$) devant le premier terme de la parenthèse. Il reste donc

$$\Gamma_{23}^3 \equiv \cot \theta.$$

On a

$$\Gamma_{23}^4 \equiv \gamma^{4\lambda} \Gamma_{23\lambda}.$$

Seules les valeurs 3 et 4 de λ donnent à $\gamma^{4\lambda}$ des valeurs non identiquement nulles. D'où

$$\Gamma_{23}^4 \equiv \gamma^{43} \Gamma_{233} + \gamma^{44} \Gamma_{234},$$

où

$$\Gamma_{233} \equiv \frac{1}{2} \partial_2 \gamma_{33} \quad \text{et} \quad \Gamma_{234} \equiv \frac{1}{2} \partial_2 \gamma_{34}.$$

On obtient, au moyen des tableaux (33) et (38)

$$\Gamma_{23}^4 \equiv \frac{\omega}{2} e^{-\lambda} (\dot{\eta} - 2\eta \cot \theta),$$

en indiquant par un point supérieur une dérivée partielle relative à θ ($\dot{\eta} \equiv \partial_\theta \eta$).

L'application des mêmes procédés de calcul nous conduit au tableau, ci-contre, des quarante symboles de seconde espèce de Christoffel où, comme il sera convenu dans la suite, un point supérieur indiquera une dérivée par rapport à θ , et un prime une dérivée par rapport à r .

$\Gamma_{11}^1 = \frac{\mu'}{2}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^3 = 0, \quad \Gamma_{11}^4 = 0,$	(39)
$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{12}^3 = 0, \quad \Gamma_{12}^4 = 0,$	
$\Gamma_{13}^1 = 0, \quad \Gamma_{13}^2 = 0, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^4 = \frac{\omega}{2} e^{-\lambda} \left(\eta' - 2\frac{\eta}{r} \right),$	
$\Gamma_{14}^1 = 0, \quad \Gamma_{14}^2 = 0, \quad \Gamma_{14}^3 = \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\eta \lambda' - \eta'}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{\lambda'}{2},$	
$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-\mu}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^3 = 0, \quad \Gamma_{22}^4 = 0,$	
$\Gamma_{23}^1 = 0, \quad \Gamma_{23}^2 = 0, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta, \quad \Gamma_{23}^4 = \frac{\omega}{2} e^{-\lambda} (\dot{\eta} - 2\eta \cot \theta),$	
$\Gamma_{24}^1 = 0, \quad \Gamma_{24}^2 = 0, \quad \Gamma_{24}^3 = -\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\eta}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad \Gamma_{24}^4 = 0,$	
$\Gamma_{33}^1 = -r e^{-\mu} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{33}^3 = 0, \quad \Gamma_{33}^4 = 0,$	
$\Gamma_{34}^1 = \frac{\omega}{2} e^{-\mu} \eta', \quad \Gamma_{34}^2 = \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\dot{\eta}}{r^2}, \quad \Gamma_{34}^3 = 0, \quad \Gamma_{34}^4 = 0,$	
$\Gamma_{44}^1 = \frac{\lambda'}{2} e^{\lambda-\mu}, \quad \Gamma_{44}^2 = 0, \quad \Gamma_{44}^3 = 0, \quad \Gamma_{44}^4 = 0,$	

avec $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$.

Remarques. — Les symboles qui contiennent un nombre impair d'indices 3 et 4 sont nuls. Les symboles qui contiennent une fois l'indice 3 et une fois l'indice 4 sont de l'ordre de ω .

5. LE TENSEUR DE COURBURE

Nous donnerons quelques brèves indications sur le calcul, assez laborieux, mais sans difficulté théorique, des composantes $\chi_{\lambda\gamma}$ du tenseur de courbure au deuxième ordre près en ω (28).

On observera que ce calcul se trouve facilité par les remarques ci-dessus qui permettent de laisser tomber les produits tels que

$$\Gamma_{13}^4 \Gamma_{14}^3, \quad \Gamma_{43}^2 \Gamma_{42}^3, \dots,$$

dont les deux facteurs contiennent les indices 3 et 4 une fois chacun.

On notera aussi qu'il est inutile, le plus souvent, d'expliciter un terme contenant un même indice α dans deux symboles différents (opérateur de dérivation ou symbole de Christoffel). Il suffira d'écrire, en dessous de chaque symbole, les valeurs de α qui ne lui donnent pas une valeur nulle. Quand ces valeurs sont toutes différentes, ce terme est nul.

Par exemple,

$$\partial_\alpha \Gamma_{13}^\alpha \equiv 0.$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right.$$

Car l'opérateur de dérivation ∂_α ne donne une valeur non nulle pour le terme étudié que si α est égal à 1 ou 2; tandis que les valeurs 3 et 4 de cet indice donnent seules (d'après le tableau (39)) des valeurs non identiquement nulles au symbole Γ_{13}^α .

On a :

$$\chi_{11} \equiv -\partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha + \Gamma_{1\alpha}^\beta \Gamma_{1\beta}^\alpha + \partial_1^2 L \sqrt{-\gamma} - \Gamma_{11}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma}.$$

$$a) \quad \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha \equiv \partial_1 \Gamma_{11}^1 = \partial_r \frac{\mu'}{2} = \frac{\mu''}{2};$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & \end{array} \right.$$

$$b) \quad \Gamma_{1\alpha}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^{\alpha} \equiv \Gamma_{11}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{12}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^2 + \Gamma_{13}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^3 + \Gamma_{14}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^4 ;$$

$$\beta \left\{ \begin{array}{|c} 1 \\ \hline 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{|c} 2 \\ \hline 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{|c} 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{|c} 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \end{array} \right. .$$

D'où

$$\Gamma_{1\alpha}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^{\alpha} \equiv (\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + (\Gamma_{13}^3)^2 + (\Gamma_{14}^4)^2 + 2 \underset{(\omega)}{\Gamma_{13}^4} \underset{(\omega)}{\Gamma_{14}^3} .$$

Le dernier terme, du second degré en ω , sera négligé. Il vient

$$\Gamma_{1\alpha}^{\beta} \Gamma_{1\beta}^{\alpha} \equiv \frac{2}{r^2} + \frac{1}{4} (\lambda'^2 + \mu'^2) .$$

$$c) \quad \partial_1^2 L \sqrt{-\gamma} \equiv \partial_1 \left(\frac{2}{r} + \frac{\lambda' + \mu'}{2} \right) \equiv -\frac{2}{r^2} + \frac{\lambda'' + \mu''}{2} .$$

$$d) \quad \Gamma_{11}^{\alpha} \partial_{\alpha} L \sqrt{-\gamma} \equiv \Gamma_{11}^1 \partial_1 L \sqrt{-\gamma} \equiv \frac{\mu'}{r} + \frac{\mu'}{4} (\lambda' + \mu') .$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{|c} 1 \\ \hline 1 \end{array} \right. .$$

Au total

$$\chi_{11} \equiv \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4} (\lambda' - \mu') - \frac{\mu'}{r} .$$

On a

$$\chi_{22} \equiv -\partial_{\alpha} \Gamma_{22}^{\alpha} + \Gamma_{2\alpha}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^{\alpha} + \partial_2^2 L \sqrt{-\gamma} - \Gamma_{22}^{\alpha} \partial_{\alpha} L \sqrt{-\gamma} .$$

$$a) \quad \partial_{\alpha} \Gamma_{22}^{\alpha} \equiv \partial_1 \Gamma_{22}^1 \equiv e^{-\mu} (r \mu' - 1) .$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{|c} 1 \\ \hline 2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} 1 \end{array} \right. .$$

$$b) \quad \Gamma_{2\alpha}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^{\alpha} \equiv \Gamma_{21}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^1 + \Gamma_{22}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^2 + \Gamma_{23}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^3 + \Gamma_{24}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^4 ;$$

$$\beta \left\{ \begin{array}{|c} 2 \\ \hline 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{|c} 1 \\ \hline 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{|c} 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{|c} 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \end{array} \right. .$$

D'où

$$\Gamma_{2\alpha}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^{\alpha} \equiv 2 \underset{(\omega)}{(\Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^4 \Gamma_{24}^3)} + (\Gamma_{23}^3)^2 .$$

Le second terme de la parenthèse, du second degré en ω , sera négligé. Il vient

$$\Gamma_{2\alpha}^{\beta} \Gamma_{2\beta}^{\alpha} \equiv -2 e^{-\mu} + \cot^2 \theta .$$

$$c) \quad \partial_2^2 L \sqrt{-\gamma} \equiv \sin^{-2} \theta .$$

$$d) \quad \Gamma_{22}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma} \equiv \Gamma_{22}^1 \partial_1 L \sqrt{-\gamma}.$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \right.$$

D'où

$$\Gamma_{22}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma} \equiv -e^{-\mu} \left[2 + \frac{r}{2} (\lambda' + \mu') \right].$$

Au total

$$\underline{\chi_{22} \equiv e^{-\mu} \left[1 + \frac{r}{2} (\lambda' - \mu') \right] - 1}.$$

On a

$$\chi_{33} \equiv -\partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha + \Gamma_{3\alpha}^\beta \Gamma_{3\beta}^\alpha + \partial_3^2 L \sqrt{-\gamma} - \Gamma_{33}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma}.$$

$$a) \quad \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha \equiv \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2;$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right.$$

d'où

$$\partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha \equiv -\sin^2 \theta [e^{-\mu} (1 - r \mu') - 2] - 1.$$

$$b) \quad \Gamma_{3\alpha}^\beta \Gamma_{3\beta}^\alpha \equiv \Gamma_{31}^\beta \Gamma_{3\beta}^1 + \Gamma_{32}^\beta \Gamma_{3\beta}^2 + \Gamma_{33}^\beta \Gamma_{3\beta}^3 + \Gamma_{34}^\beta \Gamma_{3\beta}^4,$$

$$\beta \left\{ \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right.;$$

$\Gamma_{34}^1, \Gamma_{31}^4, \Gamma_{32}^4, \Gamma_{34}^2$ étant du premier degré en ω , il reste, au second ordre près en ω ,

$$\Gamma_{3\alpha}^\beta \Gamma_{3\beta}^\alpha \equiv -2 [(e^{-\mu} - 1) \sin^2 \theta + 1].$$

$$c) \quad \partial_3^2 L \sqrt{-\gamma} \equiv 0$$

$$d) \quad \Gamma_{33}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma} \equiv \Gamma_{33}^1 \partial_1 L \sqrt{-\gamma} + \Gamma_{33}^2 \partial_2 L \sqrt{-\gamma};$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right.$$

d'où

$$\Gamma_{33}^\alpha \partial_\alpha L \sqrt{-\gamma} \equiv -e^{-\mu} \left[2 + \frac{r}{2} (\lambda' + \mu') \right] \sin^2 \theta - \cos^2 \theta.$$

Au total

$$\underline{\chi_{33} \equiv \left\{ e^{-\mu} \left[1 + \frac{r}{2} (\lambda' - \mu') \right] - 1 \right\} \sin^2 \theta}.$$

On remarque que

$$\underline{\chi_{33} \equiv \chi_{22} \sin^2 \theta}. \quad (40)$$

Les mêmes procédés nous donnent sans difficulté les autres composantes *distinctes* du tenseur de courbure. On obtient ainsi le tableau ci-contre:

$\begin{aligned}\chi_{11} &\equiv \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4}(\lambda' - \mu') - \frac{\mu'}{r}, \\ \chi_{22} &\equiv e^{-\mu} \left[1 + \frac{r}{2}(\lambda' - \mu') \right] - 1, \\ \chi_{33} &\equiv \chi_{22} \sin^2 \theta, \\ \chi_{44} &\equiv -e^{\lambda-\mu} \left[\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4}(\lambda' - \mu') + \frac{\lambda'}{r} \right], \\ \chi_{12} &\equiv \chi_{13} \equiv \chi_{14} \equiv \chi_{23} \equiv \chi_{24} \equiv 0, \\ \chi_{34} &\equiv -\frac{\omega}{2} e^{-\mu} \left[\eta'' - \eta' \frac{\lambda' + \mu'}{2} + 2\eta \frac{\lambda'}{r} \right] + \frac{\omega}{2} \frac{\dot{\eta} \cot \theta - \ddot{\eta}}{r^2}.\end{aligned}$	(41)
---	------

On sait de plus que $\chi_{\alpha\beta} \equiv \chi_{\beta\alpha}$.

6. LA QUADRIVITESSE

Pour un point matériel lié au fluide en rotation, $dr = 0$, $d\theta = 0$, $d\psi = \omega dt$. D'où, d'après (24),

$$ds^2 = [e^\lambda - \omega^2(r^2 \sin^2 \theta - 2\eta)] dt^2.$$

Au deuxième ordre près en ω , il reste

$$\underline{ds^2 = e^\lambda dt^2}.$$

On a donc immédiatement, au même ordre, les composantes contravariantes

$$\Omega^\lambda = \frac{d\xi_\lambda}{ds}.$$

$\Omega^1 = 0, \quad \Omega^2 = 0, \quad \Omega^3 = \omega e^{-\frac{\lambda}{2}}, \quad \Omega^4 = e^{-\frac{\lambda}{2}},$	(42)
--	------

et les composantes covariantes $\Omega_\lambda = \gamma_{\lambda\alpha} \Omega^\alpha$ de la quadrivitesse tensorielle:

$$\boxed{\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \omega e^{-\frac{\lambda}{2}} (\eta - r^2 \sin^2 \theta), \quad \Omega_4 = e^{\frac{\lambda}{2}}} \quad (43)$$

7. LE TENSEUR PHÉNOMÉNAL

La formule (29) et les expressions ci-dessus, des Ω_α , nous donnent le tableau des composantes *distinctes* $\Theta_{\alpha\beta}$ du tenseur phénoménal:

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_{11} &\equiv \frac{p}{c^2} e^\mu, \quad \Theta_{22} \equiv \frac{p}{c^2} r^2, \quad \Theta_{33} \equiv \frac{p}{c^2} r^2 \sin^2 \theta, \\ \Theta_{44} &\equiv \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) e^\lambda \equiv \sigma e^\lambda \quad (\sigma: \text{densité substantielle}), \\ \Theta_{12} &\equiv \Theta_{13} \equiv \Theta_{14} \equiv \Theta_{23} \equiv \Theta_{24} \equiv 0, \\ \Theta_{34} &\equiv \omega (\sigma \eta - \rho r^2 \sin^2 \theta). \end{aligned}} \quad (44)$$

De plus, on voit que $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\beta\alpha}$.

D'où les composantes *mixtes*:

$$\boxed{\Theta_1^1 \equiv -\frac{p}{c^2}, \quad \Theta_2^2 \equiv -\frac{p}{c^2}, \quad \Theta_3^3 \equiv -\frac{p}{c^2}, \quad \Theta_4^4 \equiv \sigma.} \quad (45)$$

Et, par contraction, l'invariant

$$\boxed{\Theta \equiv \Sigma \Theta_\alpha^\alpha \equiv \rho - 4 \frac{p}{c^2}.} \quad (46)$$

On en déduit les composantes covariantes du tenseur

$$\Pi_{\alpha\beta} \equiv \Theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \Theta.$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11} &\equiv \frac{e^\mu}{2} \left(\sigma - \frac{p}{c^2} \right), \quad \Pi_{22} \equiv \frac{r^2}{2} \left(\sigma - \frac{p}{c^2} \right), \\
 \Pi_{33} &\equiv \frac{r^2}{2} \left(\sigma - \frac{p}{c^2} \right) \sin^2 \theta \equiv \Pi_{22} \sin^2 \theta, \\
 \Pi_{44} &\equiv \frac{e^\lambda}{2} \left(\sigma + 3 \frac{p}{c^2} \right), \\
 \Pi_{12} &\equiv \Pi_{13} \equiv \Pi_{14} \equiv \Pi_{23} \equiv \Pi_{24} \equiv 0, \\
 \Pi_{34} &\equiv \omega \left[\frac{\eta}{2} \left(\sigma + 3 \frac{p}{c^2} \right) - \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) r^2 \sin^2 \theta \right].
 \end{aligned} \tag{47}$$

Avec $\Pi_{\alpha\beta} \equiv \Pi_{\beta\alpha}$.

8. LES DÉRIVÉES TENSORIELLES $\partial_\beta \Theta_\alpha^\beta$

On a

$$\partial_\beta \Theta_\alpha^\beta \equiv \partial_\beta (\rho \Omega_\alpha \Omega^\beta) - \partial_\beta \left(\frac{p}{c^2} \gamma_\alpha^\beta \right)$$

où¹

$$\begin{aligned}
 \partial_\beta (\rho \Omega_\alpha \Omega^\beta) &\equiv \Omega_\alpha \Omega^\beta \partial_\beta \rho + \frac{\rho}{\sqrt{-\gamma}} \partial_\beta (\sqrt{-\gamma} \Omega_\alpha \Omega^\beta) \\
 &\quad - \frac{\rho}{2} \Omega^\beta \Omega^\varphi \partial_\alpha \gamma_{\beta\varphi}.
 \end{aligned}$$

Le jeu des indices des symboles ∂_β , Ω_α , Ω^β montre que

$$\begin{aligned}
 \partial_\beta \rho \cdot \Omega_\alpha \Omega^\beta &= 0, \quad \partial_\beta (\sqrt{-\gamma} \cdot \Omega_\alpha \Omega^\beta) = 0, \\
 \beta \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right. &\quad \beta \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right. \\
 \Omega^\beta \Omega^\varphi \partial_\alpha \gamma_{\beta\varphi} &= (\Omega^3)^2 \partial_\alpha \gamma_{33} + (\Omega^4)^2 \partial_\alpha \gamma_{44} + 2 \Omega^3 \Omega^4 \partial_\alpha \gamma_{34} \\
 &\quad (\omega^2) \qquad \qquad \qquad (\omega) \qquad \qquad (\omega) \\
 \beta \left\{ \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{array} \right., \quad \varphi \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right. &
 \end{aligned}$$

D'où, au deuxième ordre près en ω :

$$\Omega^\beta \Omega^\varphi \partial_\alpha \gamma_{\beta\varphi} \equiv \partial_\alpha \lambda.$$

¹ Cf., par exemple, VON LAUE, *La théorie de la Relativité*, t. II, p. 30.

Ainsi, à ce degré d'approximation,

$$\partial_\beta (\rho \Omega_\alpha \Omega^\beta) \equiv -\frac{\rho}{2} \partial_\alpha \lambda .$$

D'autre part,

$$\partial_\beta \left(\frac{p}{c^2} \gamma_\alpha^\beta \right) \equiv \frac{1}{c^2} \partial_\alpha p .$$

Il reste donc

$$\partial_\beta \Theta_\alpha^\beta \equiv -\frac{\rho}{2} \partial_\alpha \lambda - \frac{1}{c^2} \partial_\alpha p .$$

(48)

9. LES ÉQUATIONS APPROCHÉES DU CHAMP

D'après les tableaux (41) et (47) les équations du champ, non identiquement satisfaites au second ordre près, sont:

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= A \Pi_{11}, & \chi_{22} &= A \Pi_{22}, & \chi_{33} &= A \Pi_{33}, & \chi_{44} &= A \Pi_{44}, \\ && \chi_{34} &= A \Pi_{34} . \end{aligned} \quad (49)$$

On remarque que la troisième équation est équivalente à la deuxième; de sorte qu'il reste le système des quatre équations aux dérivées partielles distinctes:

$$\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4} (\lambda' - \mu') - \frac{\mu'}{r} = \frac{A}{2} e^\mu \left(\sigma - \frac{p}{c^2} \right),$$

(50)

$$\lambda' - \mu' + \frac{2}{r} = \frac{2}{r} e^\mu \left[1 + \frac{A}{2} r^2 \left(\sigma - \frac{p}{c^2} \right) \right],$$

(51)

$$\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4} (\lambda' - \mu') + \frac{\lambda'}{r} = -\frac{A}{2} e^\mu \left(\sigma + 3 \frac{p}{c^2} \right),$$

(52)

$$\left. \begin{aligned} \eta'' - \frac{\eta'}{2} (\lambda' + \mu') + 2 \eta \frac{\lambda'}{r} - \frac{e^\mu}{r^2} (\dot{\eta} \cot \theta - \ddot{\eta}) \\ = A e^\mu \left[2 \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) r^2 \sin^2 \theta - \eta \left(\sigma + 3 \frac{p}{c^2} \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

(où $A = -\frac{8\pi}{c^2} G$)

(53)

Aux équations (49) nous associons les quatre équations de conservation (32), conséquences des précédentes. D'après (48), elles s'écrivent, au deuxième ordre près en ω :

$$\frac{1}{\rho} \partial_\alpha p = - \frac{c^2}{2} \partial_\alpha \lambda \quad (\alpha: 1, 2, 3, 4) \quad (54)$$

où l'on reconnaît la forme classique des équations de la Mécanique des fluides ¹.

La fonction λ ne dépendant que de r , ce système se réduit aux deux équations

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} p' = - \frac{c^2}{2} \lambda' , \\ \frac{1}{\rho} \dot{p} = 0 . \end{cases} \quad (55)$$

La seconde exprime qu'au deuxième ordre près *les surfaces isobares* ($p = c^{\text{te}}$) *sont sphériques*.

Dès lors, puisque le fluide supporte une pression uniforme, on en déduit qu'à ce degré d'approximation ($\omega^2 \simeq 0$) *la masse est sphérique*.

Remarque. — A l'ordre 0 en ω , c'est-à-dire pour une masse sphérique immobile, nos équations (50), (51), (52) sont les mêmes que celles de Haag dans le fascicule XLVI du *Mémorial des Sciences mathématiques* (p. 12). Toutefois, il convient de noter que la lettre ρ y désigne la densité substantielle (représentée chez nous par la lettre σ) et non la densité d'inertie.

En effet, d'après notre formule (29),

$$\Theta_\alpha^\beta \equiv \sigma \Omega_\alpha \Omega^\beta - \frac{p}{c^2} (\gamma_\alpha^\beta - \Omega_\alpha \Omega^\beta) ,$$

ce qui s'écrit, avec les notations de Haag ² (en prenant $c = 1$):

$$T_i^j = \rho u_i u^j - p_i^j$$

où

$$p_i^j = p (g_i^j - u_i u^j) ;$$

¹ $- \frac{c^2}{2} \lambda$ y joue le rôle de *la fonction des forces*.

² *Mémor. des Sc. math.*, loc. cit., p. 10.

et donne bien $p_4^4 = 0$, comme l'indique le troisième alinéa de la page 11 du Mémorial.

Au contraire, si ρ désignait la densité d'inertie, il faudrait écrire pour un fluide parfait (d'après notre formule (29))

$$p_i^j = p g_i^j$$

ce qui donnerait $p = p_4^4 \neq 0$, et contredirait l'alinéa indiqué.

§ 3. APPROXIMATIONS

Dans la théorie classique de la masse fluide en rotation (qui est une approximation de celle que nous donnons ici), la liaison entre la vitesse angulaire ω , la densité q et l'aplatissement k peut s'écrire ¹:

$$\frac{\omega^2}{|\varkappa| c^2} = \frac{3}{4 k^3} [(3 + k^2) \operatorname{Arctg} k - 3k] \quad (56)$$

où

$$\varkappa = \frac{A q}{3} \quad \left(A = -8\pi \frac{G}{c^2} \right). \quad (57)$$

Il n'existe donc à priori aucune relation univoque entre ω et \varkappa . Et, sous la seule réserve exprimée par l'inégalité

$$\frac{\omega^2}{|\varkappa| c^2} \leq 0,168, \quad (58)$$

0,168 étant la valeur du maximum du second membre de l'équation (56), cette équation montre bien qu'on peut attribuer des valeurs arbitraires à ω et \varkappa et en déduire un aplatissement k .

Mais, si l'on veut comparer les grandeurs infinitésimales des termes en ω et \varkappa du ds^2 , on doit imposer une relation d'infinitude entre ces quantités regardées comme infiniment petites. Soit

$$\omega = j |\varkappa|^{\beta} \quad (59)$$

¹ Cf., par exemple, Paul APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 174.

où j est une fonction (de dimension $L^{2\beta}T^{-1}$) qui tend vers une limite finie, non nulle, quand \varkappa tend vers 0, et β un nombre essentiellement positif.

L'inégalité (58) s'écrit alors

$$j^2 |\varkappa|^{2\beta-1} \leq 0,168 c^2 . \quad (60)$$

Elle est certainement satisfaite quand \varkappa est assez petit, pourvu que l'on ait

$$\beta > \frac{1}{2} . \quad (61)$$

De plus, d'après (56),

$$\frac{\omega^2}{|\varkappa| c^2} \simeq \frac{k^2}{5} .$$

D'où l'on tire, au moyen de (59),

$$k^2 \simeq 5 \frac{j^2}{c^2} |\varkappa|^{2\beta-1} . \quad (62)$$

La condition (61) exige donc que l'aplatissement k soit infiniment petit avec \varkappa .

Ceci posé, rappelons que, pour obtenir la valeur observée de l'avance du périhélie de Mercure, il est nécessaire de développer le ds^2 jusqu'à l'ordre de $\varkappa^{2\beta+1}$. Adoptons ce degré d'approximation dans tous les termes du ds^2 (13) ou (14).

Les coefficients H et Q du ds^2 étant des fonctions analytiques² de ω^2 et \varkappa , on remarque que les termes en ω^2 des développements de ces coefficients doivent s'annuler quand \varkappa est nul. En effet, la densité substantielle q étant alors nulle, le ds^2 est nécessairement galiléen, quelle que soit la vitesse angulaire ω .

Il en résulte que les termes en ω^2 de H et Q de degré le plus petit en \varkappa sont, au moins, de l'ordre de $\omega^2 \varkappa$, c'est-à-dire de l'ordre de $\varkappa^{2\beta+1}$.

Nous avons convenu de négliger ces termes. A l'approximation adoptée, on doit donc avoir $2\beta + 1 > 2$, soit $\beta > \frac{1}{2}$, condition identique à (61). k tend alors vers 0, quand \varkappa tend vers 0.

¹ Cf. DE SITTER, *Monthly Notices*, vol. 76, 1916; et J. CHAZY, *loc. cit.*, t. II, p. 155.

² Cela se déduit de la forme analytique des équations du champ.

Si, dans le développement du coefficient P du ds^2 (14), nous conservons les termes de l'ordre de ωx^2 , c'est-à-dire de l'ordre de $x^{\beta+2}$, on devrait avoir $\beta + 2 \leq 2$, soit $\beta \leq 0$; condition rejetée d'emblée et d'ailleurs contredite par (61).

Négligeons donc les termes de P de l'ordre de ωx^2 . Il faut alors $\beta + 2 > 2$, soit $\beta > 0$, ce qui est posé à priori. Dans ces conditions, nous conservons le terme en ωx , de l'ordre de $x^{\beta+1}$, pourvu que $\beta + 1 \leq 2$, soit

$$\beta \leq 1 . \quad (63)$$

Rappelons enfin, qu'à l'ordre de ω^2 près, l'équation de conservation se réduit à (54).

$$-\frac{\rho}{2} \partial_\alpha \lambda = \frac{1}{c^2} \partial_\alpha p .$$

Or, ρ étant au moins de l'ordre de x , on peut dire que cette équation est écrite à l'ordre de $x\omega^2 \sim x^{2\beta+1}$ près, comme le ds^2 du champ.

Ainsi nous obtenons bien des approximations cohérentes, à l'ordre de $x^{2\beta+1}$ près, quand on a

$$\boxed{\frac{1}{2} < \beta \leq 1}^1 \quad (64)$$

$$\lim_{x=0} k^2 = \frac{5}{c^2} \lim_{x=0} j^2 \neq 0 . \quad (65)$$

§ IV. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS EN COORDONNÉES GÉODÉSIQUES

1. LES FONCTIONS $\mu(r)$, $\lambda(r)$, $\rho(r)$, $p(r)$

Les trois premières équations (50), (51), (52) ne contiennent que les trois fonctions inconnues $\mu(r)$, $\lambda(r)$, $p(r)$. Elles peuvent

¹ Quelques auteurs, J. Chazy, entre autres, ont admis $\beta = \frac{1}{2}$. D'après (62), cela revient à rejeter le cas d'un aplatissement infinité petit avec x . En effet, pour cette valeur de β

être résolues indépendamment de la quatrième (53). Toutefois, pour calculer λ et ρ , il est commode d'utiliser l'équation de conservation (55) qui est une conséquence des précédentes.

Retranchons (50) et (52); on obtient:

$$\lambda' + \mu' = - A r e^\mu \rho , \quad (66)$$

en substituant $\rho - \sigma$ à $\frac{p}{c^2}$.

Retranchons (51) et (66), il vient:

$$\mu' = \frac{1}{r} (1 - e^\mu) - A r e^\mu \sigma . \quad (67)$$

L'équation de conservation (55) s'écrit:

$$\lambda' = - 2 \frac{\rho'}{\rho} .^1 \quad (68)$$

Nous affecterons les variables r , μ , λ , ρ , p de l'indice _I à l'intérieur et de l'indice _E à l'extérieur.

Champ intérieur

a) L'équation (68) donne immédiatement

$$e^{\lambda_I} = \frac{C_1}{\rho_I^2} , \quad (69)$$

C_1 étant la constante d'intégration dont la valeur sera déterminée plus loin par la condition de raccord de λ_I et λ_E à la surface (condition de raccord des potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ à la surface, posée par Schwarzschild).

b) L'équation (68) ne contient que la fonction inconnue μ_I et se résout sans approximation. Son intégrale générale est

$$e^{-\mu_I} = 1 + \frac{C}{r_I} + \frac{A}{3} q r_I^2 . \quad (\sigma_I = q) . \quad (70)$$

¹ λ' et μ' ne dépendant que de r , il en est nécessairement de même de ρ , d'après (66). Si l'on se donnait à priori la densité d'inertie $\rho(r)$, (68) donnerait $\lambda(r)$ et (66) donnerait $\mu(r)$. On tirerait $\sigma(r)$ de (67) et p de $p = c^2(\rho - \sigma)$. On pourrait, par exemple, choisir la loi de Roche: $\rho = \rho(0) - mr^2$. Dans ce mémoire, nous avons supposé que la densité substantielle σ était constante.

La constante d'intégration C doit être nulle. Car, sans cela, la vitesse de la lumière suivant un rayon vecteur, donnée par l'équation $ds^2 = 0$, où $d\theta = d\psi = 0$, serait d'après (69)

$$\frac{dr_I}{dt} = e^{\frac{1}{2}(\lambda_I - \mu_I)} = \frac{\sqrt{C_1}}{\rho_I} e^{-\frac{\mu_I}{2}},$$

donc infinie au centre comme $e^{-\mu_I}$; ce qui est physiquement exclu. Ainsi

$$\underline{e^{-\mu_I} = 1 + \frac{A}{3} q r_I^2} \quad (71)$$

c) En substituant à λ'_I , dans (68), son expression tirée de (66), on obtient l'équation de Bernoulli en ρ_I :

$$\underline{\rho'_I - \frac{\mu'_I}{2} \rho_I = \frac{A}{2} r_I e^{\mu_I} \rho_I^2}.$$

Son intégrale générale s'écrit, en utilisant (71)

$$\underline{\rho_I = \frac{2q}{3 + C_2 q e^{-\frac{\mu_I}{2}}}}, \quad (72)$$

où C_2 est une nouvelle constante d'intégration à déterminer.

En coordonnées géodésiques, désignons par α le rayon de la sphère limite du fluide. Si nous supposons que la pression est nulle sur cette surface, on a

$$p_I(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \rho_I(\alpha) = q.$$

On tire alors de (72)

$$C_2 = -\frac{1}{q} e^{\frac{\mu_I(\alpha)}{2}}.$$

D'où

$$\rho_I = \frac{2q}{3 - \sqrt{\frac{1 + \kappa r_I^2}{1 + \kappa \alpha^2}}}.$$

(73)

Et

$$p_I = c^2 (\rho_I - q) = c^2 q \frac{\sqrt{1 + \kappa r_I^2} - \sqrt{1 + \kappa \alpha^2}}{3 \sqrt{1 + \kappa \alpha^2} - \sqrt{1 + \kappa r_I^2}}. \quad (74)$$

Champ extérieur

A l'extérieur $p = \rho = 0$. Nous affectons les variables r, μ, λ, ρ, p de l'indice _E

a) L'équation (68), où $\sigma = 0$, a pour intégrale générale

$$e^{-\mu_E} = 1 + \frac{C_3}{r_E}.$$

La condition de raccord de μ_I et μ_E à la surface donne, au moyen de (71) et (75)

$$C_3 = \kappa \alpha^3;$$

d'où

$$e^{\mu_E} = \frac{1}{1 + \kappa \frac{\alpha^3}{r_E}} \quad (76)$$

b) D'autre part, l'équation (66) se réduit à

$$\lambda'_E + \mu'_E = 0.$$

D'où

$$e^{\lambda_E} = C_4 e^{-\mu_E}.$$

Or, à l'infini ($r_E = \infty$) le ds^2 doit être galiléen; e^{μ_E} a pour limite 1, tandis que e^{λ_E} tend vers c^2 ; ce qui exige $C_4 = c^2$. Ainsi

$$e^{\lambda_E} = c^2 \left(1 + \kappa \frac{\alpha^3}{r_E} \right). \quad (77)$$

La condition de raccord de e^{λ_E} et e^{λ_I} pour $r_E = r_I = \alpha$ donne alors immédiatement

$$C_1 = \sigma^2 (1 + \kappa \alpha^2). \quad (78)$$

Au total, le champ à l'ordre 0 en ω ($\omega \approx 0$) est donné par les formules suivantes:

A l'extérieur :

$$\boxed{\begin{aligned} e^{\mu_E} &= \frac{1}{1 + \kappa \frac{\alpha^3}{r_E}}, & e^{\lambda_E} &= c^2 \left(1 + \kappa \frac{\alpha^3}{r_E} \right) \\ \rho_E &= 0, & p_E &= 0 \quad (\sigma_E = 0). \end{aligned}} \quad (79)$$

A l'intérieur :

$$\boxed{\begin{aligned} e^{\mu_I} &= \frac{1}{1 + \kappa r_I^2}, \\ e^{\lambda_I} &= \frac{c^2}{4} \left(3 \sqrt{1 + \kappa \alpha^2} - \sqrt{1 + \kappa r_I^2} \right)^2 \\ \rho_I &= \frac{2q}{3 - \sqrt{\frac{1 + \kappa r_I^2}{1 + \kappa \alpha^2}}}, \\ p_I &= c^2 q \frac{\sqrt{1 + \kappa r_I^2} - \sqrt{1 + \kappa \alpha^2}}{3 \sqrt{1 + \kappa \alpha^2} - \sqrt{1 + \kappa r_I^2}}. \end{aligned}} \quad (80)$$

2. LA FONCTION $\eta(r, \theta)$

Les fonctions $\lambda(r)$ et $\mu(r)$, maintenant connues, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, il nous reste à résoudre l'équation aux dérivées partielles en η (53), au premier ordre en κ .

Substituons à λ' et μ' leurs expressions (67) et (68) en fonction de e^μ et de ρ ; l'équation en η devient:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \eta'' + \frac{3}{2} \kappa r^3 e^\mu \frac{\rho}{q} \eta' + e^\mu (\ddot{\eta} - \dot{\eta} \cot \theta) + \\ + \left[2(e^\mu - 1) + 3\kappa r^2 e^\mu \frac{\rho}{q} \right] \eta = 6\kappa r^4 e^\mu \frac{\rho}{q} \sin^2 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

où

$$\kappa = \frac{A q}{3}.$$

On remarque que les fonctions e^{μ_I} et ρ_I , d'une part, et e^{μ_E} et ρ_E , d'autre part, étant analytiques en x , l'équation (81) a, à l'intérieur comme à l'extérieur, tous ses coefficients analytiques en x . En vertu d'un important théorème de H. Poincaré (sur les intégrales des équations dépendant d'un ou plusieurs paramètres), il en est de même de sa solution en η .¹

Observons de plus que, si la gravitation n'existe pas ($G = A = 0$), ou si la densité substantielle q était nulle, le ds^2 serait galiléen et η serait identiquement nul. Cette fonction est donc de l'ordre de x au plus d'après l'équation (81).

En tenant compte de cette remarque, nous exprimons cette équation, au premier ordre en x en y portant ρ et e^μ à l'ordre 0 en x , c'est-à-dire en y substituant simplement, à l'intérieur comme à l'extérieur, σ à ρ et 1 à e^μ , et en laissant tomber le deuxième terme et le quatrième qui sont de l'ordre de x^2 . On obtient ainsi l'équation plus simple

$$r^2 \eta'' + \ddot{\eta} - \dot{\eta} \cot \theta = 6x \frac{\sigma}{q} r^4 \sin^2 \theta. \quad (82)$$

Affectons la variable η de l'indice _I à l'intérieur et de l'indice _E à l'extérieur, cette équation s'écrit, à l'intérieur ($\sigma = q$)

$$\underline{r_I^2 \eta_I'' + \ddot{\eta}_I - \dot{\eta}_I \cot \theta = 6x r^4 \sin^2 \theta}. \quad (83)$$

et, à l'extérieur ($\sigma = 0$),

$$\underline{r_E^2 \eta_E'' + \ddot{\eta}_E - \dot{\eta}_E \cot \theta = 0}. \quad (84)$$

a) Conditions aux limites

A l'intérieur et à l'extérieur, la fonction η doit être nulle, quels que soient r_I et r_E , quand $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

En effet, en un point quelconque Q ($r \geq 0$, $\theta = 0$, ψ quelconque) de l'axe de rotation Ox , un élément $d\vec{Q}$ de faisceau lumineux a pour composantes spatiales :

$$dr \neq 0, \quad d\theta = 0, \quad d\psi \text{ quelconque},$$

¹ H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 52 et suivantes.

et sa durée de parcours dt est donnée par l'équation $ds^2 = 0$ qui se réduit ici à

$$-e^\mu dr^2 + 2\omega\eta(r, 0) d\psi dt + e^\lambda dt^2 = 0.$$

Comme cette équation doit admettre la même racine dt , quel que soit $d\psi$, on voit immédiatement que

$$\eta(r, 0) \equiv 0^1. \quad (85)$$

A l'intérieur, η doit donc aussi, par raison de continuité, être nulle pour $r = 0$, quel que soit θ :

$$\eta_I(0, \theta) \equiv 0.$$

A l'extérieur, le ds^2 devant être galiléen à l'infini, η doit être également nul quand r_E est infini, quel que soit $\theta = \eta_E(\infty, \theta) \equiv 0$.

b) Résolution de l'équation en η

La structure de l'équation (82) et la condition $\eta(r, 0) \equiv 0$, nous invite à chercher une solution de la forme

$$\eta \equiv x\zeta(r) \sin^2 \theta. \quad (86)$$

où $\zeta(r)$ est une fonction de r seul satisfaisant aux conditions aux limites précisées ².

Nous allons montrer que cette solution existe. Nous établirons qu'elle est *unique* (§ VI).

¹ Cette condition se déduit aussi de la relation

$$2\omega\eta = -P[\omega, r, \sin^2 \theta] f^2(r) \sin^2 \theta,$$

où P doit être analytique en $\sin^2 \theta$ (23).

² Si l'on impose aux coefficients du ds^2 (13) d'être analytiques en x, y, z , on voit que la fonction P doit être analytique en

$$y^2 + z^2 = l^2(r) \sin^2 \theta.$$

(Cf. P. DIVE, *Ondes ellipsoïdales et Relativité*, note II, p. 137. Gauthier-Villars, édit.) On en déduit, d'après la relation

$$2\omega\eta = -P[\omega, r, \sin^2 \theta] f^2(r) \sin^2 \theta,$$

qu'il doit en être de même en $\sin^2 \theta$ de la fonction η .

La transformation (86) ramène l'équation aux dérivées partielles (82) à l'équation différentielle d'Euler en $\zeta(r)$:

$$\boxed{r^2 \zeta'' - 2 \zeta = 6 \frac{\sigma}{q} r^4} \quad (87)$$

qui s'écrit, à l'*extérieur* ($\sigma = 0$):

$$\boxed{r_E^2 \zeta_E'' - 2 \zeta_E = 0}, \quad (88)$$

et à l'*intérieur*:

$$\boxed{r_I^2 \zeta_I'' - 2 \zeta_I = 6 r_I^4}. \quad (89)$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre (88) est

$$\zeta_E = \frac{C_5}{r_E} + C r_E^2,$$

où C_5 et C sont deux constantes d'intégration. Mais, comme à l'infini, le ds^2 doit affecter la forme galiléenne, ζ_E doit tendre vers 0, quand r_E augmente indéfiniment. D'où $C = 0$ et

$$\zeta_E = \frac{C_5}{r_E} \quad (r_E \geq \alpha).$$

L'intégrale générale de l'équation avec second membre (87) est

$$\zeta_I = \frac{3}{5} r_I^4 + C_6 r_I^2 + \frac{C}{r_I} \quad (r_I \leq \alpha),$$

où C_6 et C sont deux constantes d'intégration. Mais nous ne conservons que la solution qui reste finie au centre du fluide ($r_I = 0$); donc $C = 0$, et

$$\zeta_I = \frac{3}{5} r_I^4 + C_6 r_I^2.$$

Les constantes C_5 et C_6 se calculent en exprimant le raccord de $\zeta_E(r_E)$ et $\zeta_I(r_I)$ et de leurs dérivées premières ζ'_E et ζ'_I à la surface du fluide, où $r_E = r_I = \alpha$ (Schwarzschild).

On a

$$\zeta'_E = -\frac{C_5}{r_E}, \quad \zeta'_I = \frac{12}{5} r_I^3 + 2 C_6 r_I.$$

D'où les deux équations linéaires en C_5 et C_6

$$\begin{cases} 2 C_6 \alpha + \frac{C_5}{\alpha^2} = -\frac{12}{5} \alpha^3 \\ C_6 \alpha - \frac{C_5}{\alpha^2} = -\frac{3}{5} \alpha^3 \end{cases}$$

qui donnent

$$C_5 = -\frac{2}{5} \alpha^5, \quad C_6 = -\alpha^2;$$

et

$$\zeta_E = -\frac{2}{5} \frac{\alpha^5}{r_E}, \quad \zeta_I = \frac{3}{5} r_I^4 - \alpha^2 r_I. \quad (90)$$

La solution en η satisfaisant aux conditions du problème, est, au premier ordre en α :

$$\eta_I = \frac{\alpha}{5} r_I^2 (3 r_I^2 - 5 \alpha^2) \sin^2 \theta, \quad (91)$$

$$\eta_E = -\frac{2}{5} \alpha \frac{\alpha^5}{r_E} \sin^2 \theta. \quad (92)$$

3. LE CHAMP EN COORDONNÉES GÉODÉSIQUES

Les formules (79), (78), (91), (92) nous donnent donc, à l'ordre de α^2 , les expressions cherchées du ds^2 , de la densité ρ , de la pression p , tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du fluide.

A l'intérieur :

$$\left. \begin{aligned} ds_I^2 &\equiv -\left(1 - \alpha r_I^2 + \alpha^2 r_I^4\right) dr_I^2 - r_I^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2) \\ &+ \frac{2}{5} \omega \alpha r_I^2 (3 r_I^2 - 5 \alpha^2) \sin^2 \theta d\psi dt \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

$$+ c^2 \left[1 + \frac{\alpha}{2} (3 \alpha^2 - r_I^2) + \frac{3}{16} \alpha^2 (\alpha^2 - r_I^2) \right] dt^2, \quad (94)$$

$$\rho_I \equiv q \left[1 - \frac{\alpha}{4} (\alpha^2 - r^2) (1 - \alpha \alpha^2) \right], \quad (94)$$

$$p_I \equiv -\frac{c^2}{4} \alpha q (\alpha^2 - r_I^2) (1 - \alpha \alpha^2). \quad (95)$$

A l'extérieur :

$$\left. \begin{aligned}
 ds_E^2 &\equiv -\left(1-\kappa \frac{\alpha^3}{r_E} + \kappa^2 \frac{\alpha^6}{r_E^2}\right) dr_E^2 - r_E^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) \\
 &\quad - \frac{4}{5} \omega \kappa \frac{\alpha^5}{r_E} \sin^2 \theta d\psi dt \\
 &\quad + c^2 \left(1 + \kappa \frac{\alpha^3}{r_E}\right) dt^2, \\
 \rho_E &= 0, \quad p_E = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Avant d'établir l'unicité de la solution que nous venons de donner, nous traduirons les formules précédentes dans le système des coordonnées isotropiques.

§ V. LE CHAMP EN COORDONNÉES ISOTROPIQUES

Les difficultés logiques auxquelles on se heurte quand on cherche à donner un sens concret aux coordonnées spatio-temporelles du « *mollusque* » d'Einstein, sans signification géométrique préalablement définie, ont souvent été signalées¹.

Le plus souvent les auteurs se sont accommodés de ces imprécisions en regardant la variable temporelle t comme le temps universel classique déterminé par l'Astronomie² et les variables

¹ Cf. en particulier: J. HAAG, Le problème de Schwarzschild, *Mémor. Sc. math.*, t. 46, p. 2. — S. ZAREMBA, *Journ. math. pures et appliquées*, 9^e sér., t. I, 1922, p. 105. — H. EYRAUD, *Les équations de la dynamique de l'Ether* (thèse, 1926). — J. LE ROUX, *Principes et méthodes de Mécanique invariante*. Gauthier-Villars, édit., Paris, 1934. — Ed. GUILLAUME, *Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève*, 1917, XLIII, p. 5, p. 89, p. 185; XLIV, p. 48; 1918, XLVI, p. 309; 1920, II, p. 125. — Voir aussi H. POINCARÉ, *La Mécanique nouvelle, introduction* de Ed. GUILLAUME, p. X. — G. TIERCY, *La théorie de la Relativité dite générale et les observations astronomiques* (Genève et Paris, 1939). — P. DIVE, *Les interprétations physiques de la théorie d'Einstein*, 3^e édit., 1948, p. 18. Préface de E. ESCLANGON (Dunod, édit., Paris).

² « *temps sidéral* »

r, θ, ψ de Schwarzschild comme des coordonnées polaires euclidiennes. En sorte que, pratiquement, c'est la théorie appelée *semi-einsteinienne* par Painlevé qui est, en fait, appliquée (cf. J. CHAZY, *loc. cit.*, t. II, p. 33).

Dans la présente étude, le système de coordonnées rectangulaires rectilignes ou polaires, utilisé pour traduire les symétries du champ et son caractère révolutionnaire, est regardé d'emblée comme un système dans lequel les déplacements de solides idéaux (géométriques) sont représentés par un groupe euclidien (celui des rotations, par exemple)¹.

Grâce à cette interprétation précise, nous avons pu exprimer, sans ambiguïté, la rotation uniforme du fluide au moyen de la substitution classique $\psi = \omega t + \psi_0$ ².

Or, nous avons montré, au début de ce mémoire, que ce système «euclidien» se confondait au second ordre près en ω , au moins, avec un système de coordonnées isotropiques³.

C'est donc seulement en coordonnées isotropiques, rectangulaires ou polaires, que les mesures de longueurs d'angles ou de temps possèdent, dans notre interprétation, une signification concrète immédiate. La variable l , par exemple, désignant la distance au centre du fluide directement mesurée au moyen de l'unité de longueur étalon.

¹ Le groupe euclidien ne s'impose cependant pas (H. Poincaré): un groupe cayleyen, qui respecte aussi la notion de déplacement sans déformation pourrait être plus commode en Astronomie et être utilisé. Cf. P. DIVE, *Ondes ellipsoïdales et Relativité*, 1950, p. 130. Gauthier-Villars, édit.

² Comme d'ailleurs cela a été fait maintes fois, dans plusieurs ouvrages sur la Relativité:

Dans les *Fondements de la théorie de la Relativité générale*, Einstein rappelle que dans l'ensemble des substitutions utilisables «sont en tout cas contenues celles qui correspondent à tous les mouvements relatifs des systèmes de coordonnées (*tridimensionnels*)».

Cf. aussi H. WEYL, *Temps, espace, matière*, trad. Juvet, 1958, p. 196; von LAUE, *La théorie de la Relativité*, t. II, 1926, p. 173; J. CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, 1930, p. 194; P. DIVE, *Les interprétations physiques de la théorie d'Einstein*, *loc. cit.*, p. 71.

³ Cf., par exemple, J. CHAZY, *loc. cit.*, t. I, pp. 102 et 249.

1. PASSAGE DES COORDONNÉES GÉODÉSIQUES
AUX COORDONNÉES ISOTROPIQUES

Nous connaissons déjà la forme générale (14) du ds^2 dans le système des coordonnées isotropiques polaires l, θ, ψ, t :

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv H [dl^2 + l^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2)] - \\ &- Pl^2 \sin^2\theta \cdot d\psi dt + Q dt^2. \end{aligned} \quad (97)$$

Il nous suffira donc de calculer les expressions de H, P, Q en fonction de ces coordonnées.

Désignons par $r(l)$ la fonction inverse de $l = f(r)$ (16). $H(l)$ et $r(l)$ doivent satisfaire les deux équations (15) et (17) que nous pouvons écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(l) l^2 = -r^2(l) \\ H(l) = -e^{\mu} r'^2 \end{array} \right. \quad (98)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(l) l^2 = -r^2(l) \\ H(l) = -e^{\mu} r'^2 \end{array} \right. \quad (99)$$

où r' est mis pour $\frac{dr}{dl}$.

Nous affecterons les variables r, H, P, Q de l'indice _I à l'intérieur, et de l'indice _E à l'extérieur.

a) *Calcul de r(l)*

A l'intérieur substituons à e^{μ_I} son expression (70). On tire, par division de (99) par (98)

$$\frac{dl}{l} = \frac{1}{r_I} \frac{dr_I}{\sqrt{1 + \kappa r_I^2}}. \quad (100)$$

L'intégrale générale de cette équation s'écrit

$$r_I = \frac{2B l}{1 - \kappa B^2 l^2}; \quad (101)$$

où B est une constante d'intégration.

A l'extérieur, substituons à e^{μ_E} son expression (69). On obtient de même l'équation

$$\frac{dl}{l} = \frac{1}{r_E} \cdot \frac{dr_E}{\sqrt{1 + \kappa \frac{r^3}{r_E}}}, \quad (102)$$

dont l'intégrale générale est

$$r_E = \frac{B_1}{2} l \left(1 - \frac{\kappa}{2} \frac{\alpha^3}{B_1 l} \right); \quad (103)$$

où B_1 est la constante d'intégration.

B et B_1 se calculeront en exprimant le raccord de r_E et r_I et de leurs dérivées r'_E et r'_I , pour $l = a$.

L'équation (98) et l'équation dérivée en l :

$$H' l^2 + 2 H l = -2 r r', \quad (104)$$

montrent, en effet, que le raccord de H et H' , pour $l = a$ (a : rayon isotropique de la sphère fluide) ne peut être satisfait que si $r(l)$ et $r'(l)$ sont continus pour $l = a$.

On tire de (101) et (103)

$$\frac{dr_I}{dl} = 2 B \frac{1 + \kappa B l}{(1 - \kappa B^2 l^2)^2}, \quad (105)$$

et

$$\frac{dr_E}{dl} = \frac{B_1}{2} \left(1 - \frac{\kappa^2}{4} \frac{\alpha^6}{B_1^2 l^2} \right). \quad (106)$$

D'où les deux équations:

$$\left\{ \frac{4 B}{1 - \kappa B^2 a^2} = B_1 \left(1 - \frac{\kappa}{2} \frac{\alpha^3}{B_1 a} \right)^2 \right. \quad (107)$$

$$\left. \left\{ 4 B \frac{1 + \kappa B^2 a^2}{(1 - \kappa B^2 a^2)^2} = B_1 \left(1 - \frac{\kappa^2}{4} \frac{\alpha^6}{B_1^2 a^2} \right) \right. \right\}. \quad (108)$$

Par addition de ces équations (107) et (108), on obtient:

$$\frac{4 B}{(1 - \kappa B^2 a^2)^2} = B_1 \left(1 - \frac{\kappa}{2} \frac{\alpha^3}{B_1 a} \right); \quad (109)$$

puis, par division,

$$2 B^2 = \frac{1}{B_1} \left(\frac{\alpha}{a} \right)^3. \quad (110)$$

D'où, de (109):

$$4 B = B_1 (1 - \kappa B^2 a^2)^3. \quad (111)$$

On a d'ailleurs:

$$r_I(a) = \alpha = \frac{2B}{1 - \kappa B^2 a^2} \quad (112)$$

On choisira B_1 de façon que l et r soient des infiniment grands équivalents à l'infini. Ainsi, d'après (103), $B_1 = 2$.

Dès lors (111) donne

$$2B = (1 - \kappa B^2 a^2)^3. \quad (113)$$

Cette équation définit B en fonction implicite de κa^2 ².

Il vient au deuxième ordre en κ :

$$\underline{B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \kappa a^2 + \frac{21}{16} \kappa^2 a^4 \right)}. \quad (114)$$

On tire alors de (101), au troisième ordre près en κ :

$$r_I \equiv l \left[1 + \frac{\kappa}{4} (l^2 - 3a^2) + \frac{\kappa^2}{16} (l^4 - 9a^2 l^2 + 21a^4) \right] \quad (115)$$

Et, de (103), au même ordre d'approximation

$$r_E \equiv l \left[1 - \frac{\kappa}{2} \frac{a^3}{l} + \frac{\kappa^2}{16} \frac{a^5}{l^2} (12l + a) \right]. \quad (116)$$

On vérifie que

$$\alpha = r_I(a) = r_E(a) = a \left(1 - \frac{\kappa}{2} a^2 + \frac{13}{16} \kappa^2 a^4 \right), \quad (117)$$

$$\left(\frac{dr_E}{dr_I} \right)_{l=a} = \sqrt{\frac{r_E^2 + \kappa \alpha^3 r_E}{r_I^2 + \kappa r_I^4}} = 1; \quad (118)$$

mais que

$$\left(\frac{d^2 r_E}{dr_I^2} \right)_{l=a} = -\frac{3}{2} \frac{\kappa \alpha}{1 + \kappa \alpha^2}. \quad (119)$$

¹ Remarque: Les relations (110), (111), (112) ne sont pas indépendantes: (112) et (111) donnent (110), (110) et (112) donnent (111). Les relations (111) et (112), par exemple, entraînent (107) et (108), quel que soit B_1 . Il fallait s'y attendre, car si $r(l)$ est continue, les dérivées r' et $l' = r'^{-1}$ sont continues aussi, d'après (100) et (103).

² On peut la résoudre par itération en partant de $B_0 = \frac{1}{2}$.

(115), (116) et (119) montrent que r_E et r_I n'appartiennent pas à un même système (repère) de coordonnées spatiales¹.

Cette remarque fait ressortir le caractère abstrait et purement analytique des coordonnées géodésiques.

b) *Calcul de H(l)*

On a (98)

$$H = - \left(\frac{r}{l} \right)^2 .$$

A l'intérieur, on tire de (115), au troisième ordre près en \varkappa :

$$H_I \equiv -1 - \frac{\varkappa}{2} (l^2 - 3a^2) - \frac{3}{16} \varkappa^2 (l^4 - 8a^2 l^2 + 17a^4) . \quad (120)$$

A l'extérieur, on tire de (116), au même ordre:

$$H_E \equiv -1 + \varkappa \frac{a^3}{l} - \frac{3}{8} \varkappa^2 \frac{a^5}{l^2} (4l + a) . \quad (121)$$

On vérifie que

$$H_I(a) = H_E(a) = -1 + \frac{\varkappa}{3} - \frac{5}{24} \varkappa^2 , \quad (122)$$

et que

$$\left(\frac{dH_I}{dl} \right)_{l=a} = \left(\frac{dH_E}{dl} \right)_{l=a} = -\varkappa a + \frac{9}{4} \varkappa^2 a^3 . \quad (123)$$

c) *Calcul de P(l)*

Dans la relation (23)

$$Pl^2 = 2\omega \varkappa \zeta , \quad (124)$$

nous devons exprimer ζ au degré 0 en \varkappa , en fonction de la distance isotropique l et du rayon isotropique a de la sphère fluide.

¹ $r_E(l)$ n'est pas le prolongement analytique de $r_I(l)$. Pour la sphère immobile, cf. DE DONDER, *Mémor. des Sc. math.*, fasc. XLIII, pp. 9 et 21. (Au second membre de la formule (134) (p. 21), il manque le facteur $\frac{3}{2}$).

A l'intérieur, on a obtenu, en coordonnées géodésiques (90):

$$\zeta_I \equiv \frac{r_I^2}{5} (3 r_I^2 - 5 \alpha^2) .$$

Il suffit donc de substituer à r_I et α leurs expressions en fonction de l et a , à l'ordre 0 en \varkappa , c'est-à-dire d'écrire simplement l au lieu de r_I et a au lieu de α :

$$\underline{\zeta_I \equiv \frac{l^2}{5} (3 l^2 - 5 a^2)} . \quad (125)$$

D'où, au premier degré en \varkappa , donc à l'ordre de $\varkappa^{\beta+1}$ ($\frac{1}{2} < \beta \leq 1$), c'est-à-dire à l'ordre de \varkappa^2 au plus

$$\boxed{P_I \equiv -\frac{2}{5} \omega \varkappa (3l^2 - 5a^2)} . \quad (126)$$

A l'extérieur on a, en coordonnées géodésiques (90):

$$\underline{\zeta_E \equiv -\frac{2}{5} \frac{\alpha^5}{r_E}} .$$

Il suffit encore de substituer a à α et l à r_E pour obtenir, en coordonnées isotropiques à l'ordre 0 en \varkappa :

$$\underline{\zeta_E \equiv -\frac{2}{5} \frac{a^5}{l}} . \quad (127)$$

Et, à l'ordre de \varkappa^2 , au plus,

$$\boxed{P_E \equiv \frac{4}{5} \omega \varkappa \frac{a^5}{l^3}} . \quad (128)$$

On vérifie que:

$$P_I(a) = P_E(a) = \frac{4}{5} \omega \varkappa a^2 . \quad (129)$$

et que

$$\left(\frac{dP_I}{dl} \right)_{l=a} = \left(\frac{dP_E}{dl} \right)_{l=a} = -\frac{12}{5} \omega \varkappa a . \quad (130)$$

d) *Calcul de Q(l)*

On a (22)

$$Q \equiv e^{\lambda(r)}.$$

A l'intérieur, en coordonnées géodésiques (80)

$$e^{\lambda_I} \equiv \frac{c^2}{4} \left(3 \sqrt{1 + \kappa \alpha^2} - \sqrt{1 + \kappa r_I^2} \right)^2.$$

En exprimant α et r_I en fonction de a et l , au premier degré en κ , on obtient, à l'ordre de κ^2 :

$$Q_I \equiv c^2 \left[1 - \frac{\kappa}{2} (l^2 - 3a^2) - \frac{\kappa^2}{16} (l^4 - 6a^2l^2 + 21a^4) \right]. \quad (131)$$

A l'extérieur, en coordonnées géodésiques (79)

$$Q_E \equiv e^{\lambda_E} \equiv c^2 \left(1 + \kappa \frac{\alpha^3}{r_E} \right)$$

où α^3 et r_E^{-1} seront exprimés en fonction de a et l , au premier degré en κ . On trouve:

$$Q_E \equiv c^2 \left[1 + \kappa \frac{a^3}{l} - \frac{\kappa^2}{2} a^5 \left(\frac{3}{l} - \frac{a}{l^2} \right) \right]. \quad (132)$$

On vérifie que

$$Q_I(a) = Q_E(a) = c^2 (1 + \kappa a^2 - \kappa^2 a^4) \quad (133)$$

et que

$$\left(\frac{dQ_I}{dl} \right)_{l=a} = \left(\frac{dQ_E}{dl} \right)_{l=a} = -c^2 \kappa a \left(1 - \frac{\kappa}{2} a^2 \right). \quad (134)$$

e) *Calcul de ρ(l)*

A l'extérieur: $\rho_E = 0$.

A l'intérieur on a, en coordonnées géodésiques (73):

$$\rho_I = \frac{2q}{3 - \sqrt{\frac{1 + \kappa r_I^2}{1 + \kappa \alpha^2}}}$$

ou, au troisième ordre près en \varkappa :

$$\rho_I \equiv q \left[1 - \frac{\varkappa}{4} (1 - \varkappa \alpha^2) (\alpha^2 - r_I^2) \right]. \quad (135)$$

Dans le deuxième facteur du crochet, il suffit d'écrire a au lieu de α . Dans le troisième, α^2 et r_I^2 seront exprimés, en fonction de a et l , au premier degré en \varkappa . Il vient

$$\rho_I \equiv q \left[1 - \frac{\varkappa}{4} (a^2 - l^2) + \frac{\varkappa^2}{8} (l^4 - 5 a^2 l^2 + 4 a^4) \right]^1. \quad (136)$$

Remarque. — Au deuxième ordre près en \varkappa , la variation de la densité d'inertie est conforme à la loi de Roche.

f) *Calcul de $p(l)$*

A l'intérieur:

$$\rho_I \equiv q + c^{-2} p_I;$$

d'où, en coordonnées géodésiques [(70) et (136)], au troisième ordre près en \varkappa :

$$p_I \equiv -\frac{c^2}{4} \varkappa q (1 - \varkappa \alpha^2) (\alpha^2 - r^2). \quad (138)$$

Et, au même ordre près, en coordonnées isotropiques:

$$p_I = -\frac{c^2}{4} \varkappa q \left[1 + \frac{\varkappa}{2} (l^2 - 4 a^2) \right] (a^2 - l^2). \quad (139)$$

A l'extérieur: $p_E = 0$.

¹ A titre de vérification, cette formule peut être obtenue à partir de la relation (69):

$$Q_I \equiv e^{\lambda_I} \equiv \frac{C_1}{\rho_I^2},$$

et des formules (131) et (133). En remarquant que $\rho_I(a) = q + c^{-2} p_I(a) = q$, on a, en effet,

$$\rho_I^2 \equiv q^2 \frac{Q_I(a)}{Q_I(l)}. \quad (137)$$

2. LE CHAMP EN COORDONNÉES ISOTROPIQUES POLAIRES

Au moyen des formules (120), (121), (126), (128), (131), (132) nous pouvons écrire le ds^2 du champ en coordonnées isotropiques polaires, au degré d'approximation que nous venons de préciser.

A l'intérieur :

$$\begin{aligned} ds_I^2 \equiv & - \left[1 - \frac{\kappa}{2} (3 a^2 - l^2) + \frac{3}{16} \kappa^2 (l^4 - 8 a^2 l^2 + 17 a^4) \right] \\ & \times [dl^2 + l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2)] \\ & + \frac{2}{5} \omega \kappa l^2 (3 l^2 - 5 a^2) \sin^2 \theta \cdot d\psi dt \\ & + c^2 \left[1 + \frac{\kappa}{2} (3 a^2 - l^2) - \frac{\kappa^2}{16} (l^4 - 6 a^2 l^2 + 21 a^4) \right] dt^2. \end{aligned} \quad (140)$$

A l'extérieur :

$$\begin{aligned} ds_E^2 \equiv & - \left[1 - \kappa \frac{a^3}{l} + \frac{3}{8} \kappa^2 \frac{a^5}{l^2} (4 l + a) \right] \\ & \times [dl^2 + l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2)] \\ & - \frac{4}{5} \omega \kappa \frac{a^5}{l} \sin^2 \theta \cdot d\psi dt \\ & + c^2 \left[1 + \kappa \frac{a^3}{l} - \frac{\kappa^2}{2} \frac{a^5}{l^2} (3 l - a) \right] dt^2. \end{aligned} \quad (141)$$

Nous avons obtenu aussi:

A l'intérieur (136) et (139):

$$\rho_I \equiv \sigma \left[1 - \frac{\kappa}{4} (a^2 - l^2) + \frac{\kappa^2}{8} (l^4 - 5 a^2 l^2 + 4 a^4) \right], \quad (142)$$

$$p_I \equiv - \frac{c^2}{4} \kappa \sigma \left[1 + \frac{\kappa}{2} (l^2 - 4 a^2) (a^2 - l^2) \right]. \quad (143)$$

A l'extérieur :

$$\rho_E = 0, \quad p_E = 0.$$

Remarque sur la dimension nulle de la quantité $\kappa a^2 = \frac{A\sigma}{3} a^2$, pour le contrôle de l'homogénéité des formules obtenues.

On sait que

$$A = -\frac{8\pi}{c^2} G ;$$

où G est la constante newtonienne de la gravitation universelle ($G = 6,67 \times 10^{-8}$ c.g.s.).

La formule de dimension de G est $L^3 T^{-2} M^{-1}$; celle de A est LM^{-1} ; celle de σ est ML^{-3} ; on voit que κa^2 est sans dimension, donc indépendant du système d'unités choisi.

3. LE CHAMP EN COORDONNÉES ISOTROPIQUES RECTILIGNES RECTANGULAIRES

La formule (13), d'où nous sommes partis, nous donne immédiatement, au moyen des expressions ci-dessus (120), (121), (126), (128), (131), (132) de H, P, Q:

A l'intérieur :

$$\left. \begin{aligned} ds_1^2 &\equiv - \left[1 - \frac{\kappa}{2} (3a^2 - l^2) + \frac{3}{16} \kappa^2 (l^4 - 8a^2 l^2 + 17a^4) \right] \\ &\quad \times (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &+ \frac{2}{5} \omega \kappa (3l^2 - 5a^2) (ydz - zdy) dt \\ &+ \left[1 - \frac{\kappa}{2} (l^2 - 3a^2) - \frac{\kappa^2}{16} (l^4 - 6a^2 l^2 + 21a^4) \right] c^2 dt^2 \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

où l^2 est mis pour $x^2 + y^2 + z^2$.

A l'extérieur :

$$\left. \begin{aligned} ds_E^2 &\equiv - \left[1 - \kappa \frac{a^3}{l} + \frac{3}{8} \kappa^2 \frac{a^5}{l^2} (4l + a) \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &+ \frac{4}{5} \omega \kappa \frac{a^5}{l^3} (zdy - ydz) dt \\ &+ \left[1 + \kappa \frac{a^3}{l} - \frac{\kappa^2}{2} (3l - a) \frac{a^5}{l^2} \right] c^2 dt^2 . \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

§ VI. UNICITÉ DE LA SOLUTION η

a) Exprimons d'abord l'équation en η (82) dans le système des coordonnées isotropiques, où la même variable l mesure, à l'intérieur comme à l'extérieur, la distance au centre.

On a

$$\eta' = \partial_l \eta \frac{1}{\frac{dr}{dl}}, \quad (146)$$

$$\eta'' = \frac{1}{\left(\frac{dr}{dl}\right)^2} \left(\partial_l^2 \eta - \partial_l \eta \frac{d^2 r}{dl^2} \right). \quad (147)$$

D'où l'équation isotropique en η :

$$\frac{r^2(l)}{\left(\frac{dr}{dl}\right)^2} \left(\partial_l^2 \eta - \partial_l \eta \frac{d^2 r}{dl^2} \right) + \partial_\theta^2 \eta - \cot \theta \cdot \partial_\theta \eta = 6 \times r^4 \frac{\sigma}{q} \sin^2 \theta.$$

Mais, η étant de l'ordre de \varkappa , il suffit, pour obtenir l'expression de cette équation au même ordre, de réduire les fonctions $r^2(l)$, $\left(\frac{dr}{dl}\right)^2$, $\frac{d^2 r}{dl^2}$ à l'ordre 0 en \varkappa , c'est-à-dire de leur substituer respectivement l^2 , 1, 0, à l'intérieur comme à l'extérieur. Il vient

$$l^2 \partial_l^2 \eta + \partial_\theta^2 \eta - \cot \theta \cdot \partial_\theta \eta = 6 \times l^4 \frac{\sigma}{q} \sin^2 \theta. \quad (148)$$

On voit qu'au premier ordre en \varkappa , l'équation en η conserve la même forme dans les deux systèmes de coordonnées.

Le changement de variable

$$L = \log l \quad (149)$$

donne ensuite à cette équation la forme canonique des équations aux dérivées partielles du type elliptique¹:

$$\nabla \eta - \partial_L \eta - \cot \theta \cdot \partial_\theta \eta = 6 \times e^{4L} \frac{\sigma}{q} \sin^2 \theta, \quad (150)$$

¹ E. GOURSAT, *Analyse mathématique*, t. III, 1942, p. 83.

où

$$\nabla \eta \equiv \partial_L^2 \eta + \partial_\theta^2 \eta .$$

La fonction inconnue $\eta(L, \theta)$ devant ici satisfaire aux conditions aux limites suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \eta(L, 0) \equiv 0 , \quad \eta(L, \pi) \equiv 0 , \quad \text{quel que soit } L; \\ \eta(-\infty, \theta) \equiv 0 \quad (\text{au centre du fluide, quel que soit } \theta), \\ \eta(+\infty, \theta) \equiv 0 \quad (\text{à l'infini, quel que soit } \theta) . \end{array} \right\} \quad (151)$$

b) La solution η obtenue satisfait bien aux conditions ci-dessus. Supposons qu'il existe deux telles solutions: η_1 et η_2 . Leur différence $w = \eta_1 - \eta_2$ satisferait aux mêmes conditions et serait une intégrale de l'équation homogène:

$$\underline{\nabla w - \partial_L w - \cot \theta \cdot \partial_\theta w = 0} . \quad (152)$$

Opérons la substitution

$$w = \left(1 + e^{\frac{L}{2}} \right) W . \quad (153)$$

L'équation (152) devient

$$\nabla W - \frac{1}{1 + e^{\frac{L}{2}}} \partial_L W - \cot \theta \cdot \partial_\theta W - \frac{1}{4} \frac{e^{\frac{L}{2}}}{1 + e^{\frac{L}{2}}} W = 0 \quad (154)$$

où le coefficient de la nouvelle fonction inconnue W est *essentiellement négatif*.

D'après (153), W doit satisfaire aux mêmes conditions aux limites que w .

L'unicité de notre solution η sera donc établie si nous démontrons que la seule intégrale de l'équation (154) satisfaisant à ces conditions est $W \equiv 0$.

Imaginons que W ne soit pas identiquement nulle dans la bande infinie B comprise entre les droites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Cette fonction qui doit être continue dans B , comme η_1 , η_2 et w , admettrait alors nécessairement une borne inférieure

$W_m < 0$, ou une borne supérieure $W_M > 0$, ou à la fois une borne inférieure < 0 et une borne supérieure > 0 ¹.

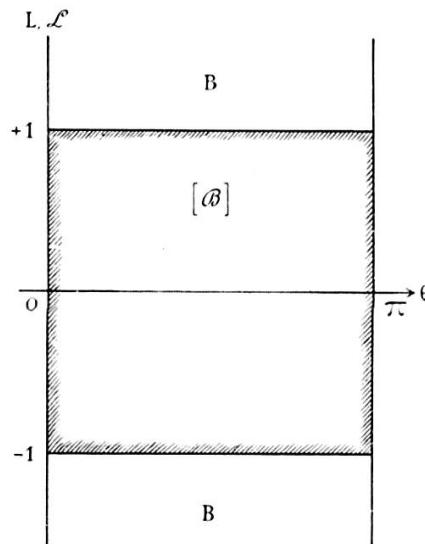


Fig. 4.

De plus, W étant nulle à l'infini, ces bornes ne pourraient être atteintes qu'en des points intérieurs de B à distance finie².

¹ En établissant la correspondance biunivoque

$$\mathcal{L} = \theta L \quad \text{ou} \quad L = \log \sqrt{\frac{1 + \mathcal{L}}{1 - \mathcal{L}}}, \quad (155)$$

on substitue à la bande infinie B , le domaine *fermé* $[\alpha]$ limité aux droites $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{L} = -1$. La fonction continue $W[\mathcal{L}, \theta]$ dans $[\alpha]$ est bornée dans ce domaine.

² Voici une démonstration de cette proposition intuitive utilisant les propriétés des ensembles:

Supposons que l'ensemble des valeurs de W admette dans B une borne supérieure $W_M > 0$.

Pour chaque valeur de L , la fonction $W(L, \theta)$ continue en θ dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$ atteindrait, dans cet intervalle une borne supérieure $\bar{W}(L) \geq 0$ et l'ensemble des valeurs $\bar{W}(L)$ admettrait encore W_M comme borne supérieure.

Soit $\epsilon > 0$, tel que

$$\epsilon < W_M. \quad (156)$$

Par définition de la borne supérieure W_M , il existerait des valeurs \bar{L} telles que

$$\bar{W}(\bar{L}) > W_M - \frac{\epsilon}{2}. \quad (157)$$

Voir la suite à la page suivante.

Pour montrer que W est nécessairement identiquement nul dans B , il nous suffit d'examiner le cas où cette fonction admettrait une borne supérieure $W_M > 0$. Le cas d'une borne inférieure $W_m < 0$ se ramenant au premier par la substitution de $-W$ à W .

Soit donc P_M un point intérieur de B à distance finie, de où W atteindrait sa borne supérieure $W_M > 0$. Je dis d'abord que W_M serait un *maximum* de W .

Considérons un domaine fermé $[D_M]$ contenu dans (B) et dont P_M est un point intérieur. Dans $[D_M]$ tous les coefficients de l'équation (154) sont analytiques en L et θ ($\cot \theta \neq 0$). Il en résulte, d'après un théorème de E. Picard, que l'intégrale W de cette équation est aussi analytique en L et θ dans le même domaine¹.

Suite de la note 1.

Or $\bar{W}(L)$ tendant vers 0, quand $|L|$ augmente indéfiniment, on peut choisir un nombre $N > 0$, tel que $|L| > N$ entraîne

$$|\bar{W}(L)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (158)$$

Dans ces conditions, je dis que l'ensemble des valeurs $|\bar{L}|$ est borné par N .

En effet, s'il existait une valeur $|\bar{L}| > N$, on aurait, pour cette valeur, d'après (158)

$$|\bar{W}(\bar{L})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ou

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \bar{W}(\bar{L}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce qui, d'après (157), entraînerait

$$W_M - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \varepsilon > W_M,$$

en contradiction avec (156).

Ainsi l'ensemble des valeurs $|\bar{L}|$ de $|L|$ telles que

$$W_M - \bar{W}(\bar{L}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (159)$$

est certainement borné par N . On en déduit que la borne supérieure W_M , si elle existe, est atteinte à distance finie dans B .

La démonstration est semblable dans le cas d'une borne inférieure $W_m < 0$.

¹ Cf. E. GOURSAT, *Analyse mathématique*, t. III, 1942, p. 230.

On est alors certain de l'existence et de la continuité des dérivées partielles $\partial_L W$, $\partial_\theta W$, $\partial_L^2 W$, $\partial_\theta^2 W$ dans $[D_M]$.

W_M est donc bien un maximum de $W(L, \theta)$, et l'on a en P_M :

$$\left. \begin{aligned} W_M > 0, \quad \partial_L W[P_M] = 0, \quad \partial_\theta W[P_M] = 0 \\ \partial_L^2 W[P_M] \leq 0, \quad \partial_\theta^2 W[P_M] \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Or ces conditions ne satisfont pas l'équation (154). On en conclut que W est identiquement nul et que $\eta_1 \equiv \eta_2$ dans B^1 .

CONFRONTATIONS

1. TERME EN ωz

Dans *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste* (t. II, p. 173), J. CHAZY a donné le terme correctif à ajouter au ds^2 galiléen *extérieur* induit par une masse sphérique tournante, de très faible densité et dénuée de pression, pour tenir compte de sa rotation, au premier ordre en ω :

Ce terme, qui s'écrit

$$\frac{8}{5} f M \frac{R^2}{r^3} \omega (x dy - y dx), \quad (161)$$

(où M est la masse de la sphère, R , son rayon; f , la constante de la gravitation universelle; r , la distance au centre du point (x, y, z) ; la vitesse de la lumière étant prise pour unité; et l'axe Oz étant placé sur l'axe de rotation) est égal au terme correspondant de notre formule (145). Au degré de nos approximations ($\omega^2 z \sim 0$, $z^3 \simeq 0$, $\omega \sim z^\beta$ ($\beta > \frac{1}{2}$)) l'influence de la pression interne sur la morphologie de l'Ether extérieur est donc négligeable.

¹ Cette démonstration étend au domaine infini B et à l'équation (150) à coefficients non tous analytiques dans B , une démonstration de Paraf pour les domaines bornés et les équations à coefficients tous analytiques dans ces domaines.

2. TERME EN dt^2 POUR LA MASSE AU REPOS

Dans le même ouvrage, J. Chazy a donné, pour le champ extérieur d'une sphère au repos, le ds^2 isotropique approché suivant, obtenu en poussant, dans le coefficient de dt^2 , les approximations jusqu'au carré de la constante de la gravitation. On a, en désignant par \bar{r} la distance isotropique au centre et V la vitesse de la lumière¹:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\mu}{V^2 \bar{r}} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \\ + \left(V^2 - 2\frac{\mu}{\bar{r}} + 2\frac{\mu^2}{V^2 \bar{r}^2} \right) dt^2, \quad (162)$$

où

$$\mu = \frac{4}{3}\pi \rho f R^3 \quad (163)$$

est le *coefficient attractif klépérien*; ρ désignant ici la densité substantielle; f , la constante de la gravitation; R , le rayon de la sphère².

Le coefficient de dt^2 dans (162) devrait donc être équivalent (aux notations près) à notre coefficient Q_E (132) correspondant, puisque ω , qui est ici nul, n'y figure pas.

Avec nos notations, le coefficient attractif dans le repère isotropique s'écrit

$$\frac{4}{3}\pi q G a^3 = - \frac{c^2}{2} \times a^3. \quad (164)$$

Le coefficient de dt^2 dans (162) devrait alors être équivalent à

$$c^2 \left(1 + \times \frac{a^3}{l} + \frac{\times^2}{2} \frac{a^6}{l^2} \right), \quad (165)$$

¹ J. CHAZY, *loc. cit.*, t. II, p. 157. Ce ds^2 coïncide avec le ds^2 approché de de Sitter (*Proceedings*, Amsterdam, vol. XIX, 1916, p. 371) obtenu en substituant, dans le ds^2 bien connu de Schwarzschild, exprimé en coordonnées géodésiques, la somme $\bar{r} + \frac{\mu}{V^2}$, à la variable géodésique r , et en négligeant les termes en $\frac{1}{V^2}$.

² Cf. CHAZY, *loc. cit.* t. II, p. 119.

et identique à notre coefficient Q_E [(132) et (145)]

$$c^2 \left[1 + \kappa \frac{a^3}{l} - \frac{\kappa^2}{2} (3l - a) \frac{a^5}{l^2} \right]. \quad (166)$$

Or la quantité entre parenthèses (165) excède la quantité entre crochets (166) de la quantité

$$\frac{3}{2} \kappa^2 \frac{a^5}{l}, \quad (167)$$

de l'ordre de l'approximation considérée et, par suite, non négligeable.

Cet écart vient de ce que, dans le ds^2 *isotropique* de Chazy, μ est encore la valeur du coefficient attractif dans le repère *géodésique* de Schwarzschild, alors que \bar{r} y désigne bien, comme il convient, la nouvelle mesure *isotropique* de la distance au centre.

L'expression de ce ds^2 présente donc une incohérence.

Pour la faire disparaître, il suffit, dans (163), de substituer à la mesure géodésique R du rayon de la sphère, son expression en fonction de sa mesure \bar{R} en coordonnées isotropiques:

$$R = \bar{R} + \frac{\mu}{V^2}; \quad (168)$$

puis de substituer à μ dans (162) son expression en fonction de \bar{R} et de la nouvelle mesure $\bar{\mu}$ du coefficient klépérien, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, on a

$$\mu = \bar{\mu} \left(1 + \frac{3}{\bar{R}} \frac{\bar{\mu}}{V^2} \right). \quad (169)$$

Le coefficient de dt^2 dans (162) devient ainsi

$$V^2 - \frac{2\bar{\mu}}{r} + \frac{2\bar{\mu}^2}{V^2 \bar{r}^2} - 6 \frac{\bar{\mu}^2}{V^2 \bar{R} r}. \quad (170)$$

On vérifie bien, en effet, qu'en substituant, dans cette expression, l à \bar{r} et a à \bar{R} , c à V , on retrouve l'expression exacte du coefficient Q_E de dt^2 dans notre ds_E^2 (145).

*Faculté des Sciences de Montpellier.
Mathématiques.*
