Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 10 (1957)

Heft: 2

Artikel: Distribution de charge d'un état lié dans le formalisme de Bethe-Salpeter

Autor: Wanders, G. / Ruegg, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738703

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

5. WEYL, H., *Zs. f. Physik*, *56*, 330 (1929). L'équivalence entre les théories de Weyl et de Majorana a été démontrée par J. SERPE, *Physica*, *18*, 295 (1952), et indépendamment par M. FIERZ. Voir aussi J. A. MCLENNAN, *Phys. Rev.*, *106*, 821 (1957).

6. TOUSCHEK, B. F., *Nuovo Cimento*, *5*, 1281 (1957). Cet article traite le groupe (12) et en déduit la conservation de la charge léptonique. Il ne nous est parvenu qu'après la préparation de cette note. Il nous semble pourtant intéressant de signaler que dans notre exposé les tenseurs $T_{(\ )}$, $S_{(\ )\text{resp.}}$ $J_{(\ )}$ sont formés par la moitié de la somme, resp. de la différence, de l'expression habituelle et de sa conjuguée de charge.

Université de Genève.
Institut de Physique.

G. Wanders [1] et **H. Ruegg.** — *Distribution de charge d'un état lié dans le formalisme de Bethe-Salpeter.*

En théorie relativiste des champs quantifiés, un état lié de deux particules scalaires est décrit par une amplitude $\Phi(x_1, x_2)$, fonction de deux points de l'espace-temps $x_1 = (\vec{x}_1, t_1)$ et $x_2 = (\vec{x}_2, t_2)$. Cette amplitude est solution d'une équation de Bethe-Salpeter [1]. Si l'état lié est un état-propre de l'énergie-impulsion totale, on a:

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi_a(\mathrm{P}, x)\, e^{i(\mathrm{P},\mathrm{X})} \tag{1}$$

où $x = (x_1 - x_2)$ et $\mathrm{X} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, si les deux particules liées ont la même masse m. P est le quadrivecteur énergie-impulsion du système: $\mathrm{P} = (\vec{\mathrm{P}}, \mathrm{E})$, $\mathrm{E} = (\vec{\mathrm{P}}^2 + \mathrm{M}_a^2)^{\frac{1}{2}}$, M_a^2 étant la masse du système lié, valeur-propre de l'équation de Bethe-Salpeter ($\mathrm{M}_a = 2m - \mathrm{B}_a$, B_a = énergie de liaison ($\mathrm{B}_a > 0$)).

L'amplitude $\Phi(x_1, x_2)$ caractérise complètement l'état lié et permet de calculer toutes les grandeurs physiques associées au système (Nishijima [2], Mandelstam [3]). Ainsi, si la liaison entre les particules est d'origine non-électromagnétique, due par exemple à l'interaction avec un champ mésonique scalaire, et si une seule des deux particules liées est électriquement

[1] Bénéficiaire de l'aide financière de la Commission suisse de l'énergie atomique.

chargée (comme dans le cas du deuton), l'élément de matrice de la densité de courant $j_\mu(x)$, due à la particule chargée, est donnée, en première approximation [2], par:

$$\langle a \mid j_\mu(x_1) \mid b \rangle = \frac{1}{2} \int (dx_2)^4 \, \overline{\Phi}_a(x_1, x_2) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_1{}^\mu} (\Box_2 - m^2) \Phi_b(x_1, x_2) \, . \qquad (2)$$

Le symbole de différentiation $\overleftrightarrow{\partial}$ est expliqué par:

$$f \overleftrightarrow{\partial} g = f(\partial g) - (\partial f) g$$

$\mid a>$ et $\mid b>$ sont deux états liés décrits par les amplitudes $\Phi_a(x_1, x_2)$ et $\Phi_b(x_1, x_2)$. $\overline{\Phi}_a(x_1, x_2)$ se construit à partir de $\Phi_a(x_1, x_2)$ par inversion temporelle et conjugaison complexe [2], [3]. Cette note est consacrée à l'étude d'un élément diagonal de la densité de courant ($\mid a> = \mid b>$ dans (2)), représentant la distribution de courant dans l'état lié $\mid a>$.

Si $\mid a>$ est un état-propre de l'énergie-impulsion totale, la densité de courant obtenue en insérant (1) dans (2) ($\mid a> = \mid b>$) est un vecteur constant, parallèle à P_μ. Celà vient de ce que dans un tel état, le centre de gravité X, porté par l'onde plane $e^{i(P,X)}$ n'est pas localisé et les particules composantes peuvent être observées avec la même probabilité en tout point de l'espace. Pour obtenir une distribution de charge qui caractérise de manière significative l'état lié, il faut donc localiser le centre de gravité dans un paquet d'ondes d'extension finie. Soit $\chi(X)$ ce paquet d'ondes:

$$\chi(X) = (2\pi)^{-3/2} \int (d\,P)^3 [E(\vec{P})]^{-\frac{1}{2}} \tilde{\chi}(\vec{P}) \, e^{i(P,X)} \qquad (3)$$

avec $P^4 = E(\vec{P}) = (\vec{P}^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}$ (ayant affaire dorénavant à un seul état lié, nous laissons tomber l'indice a et écrivons M

[2] Cette approximation est consistante avec la « ladder approximation » de l'équation de Bethe-Salpeter en ce sens que le courant (approché) (2) satisfait l'équation de continuité $\partial_\mu \langle a \mid j^\mu(x) \mid b \rangle = 0$, si Φ_b et Φ_a sont solutions de la « ladder approximation » de l'équation de Bethe-Salpeter.

pour M_a). χ (X) est une solution normée de l'équation de Klein-Gordon:

$$(\Box - M^2)\,\chi\,(X) = 0\,. \tag{4}$$

Nous demandons que pour $T = 0$, $\chi\,(X) = \chi\,(\vec{X}, 0)$ soit à symétrie sphérique, fonction lentement variable et uniformément décroissante de $R = |\vec{X}|$, sensiblement différente de zéro pour $R < R_0$ seulement. Dans ces conditions, le centre de gravité est pratiquement localisé dans une sphère de rayon R_0 au temps $T = 0$. D'autre part, nous demandons que $\tilde{\chi}\,(\vec{p})$ soit centrée autour de $\vec{p} = 0$ (centre de gravité pratiquement au repos).

L'état lié dont le centre de gravité est porté par χ (X), est décrit par l'amplitude:

$$\Phi\,(x_1, x_2) = (2\,\pi)^{-3/2} \int (d\,P)^3 \,[E\,(\vec{P})]^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\chi}\,(\vec{P})\, \varphi\,(P, x)\, e^{i(P,X)} \tag{5}$$

$\overline{\Phi}\,(x_1, x_2)$ est donnée par:

$$\overline{\Phi}\,(x_1, x_2) = (2\,\pi)^{-3/2} \int (d\,P)^3 \,[E\,(\vec{P})]^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\chi}\,(\vec{P})\, \overline{\varphi}\,(P, x)\, e^{-i(P,X)}\,. \tag{6}$$

Si, comme nous le supposons toujours dans la suite, l'état lié considéré est un état S (moment angulaire nul), et si la théorie est invariante par rapport à la réflexion temporelle:

$$\overline{\varphi}\,(P, x) = \varphi\,(P, -x)\,. \tag{7}$$

Avec la représentation de Fourier:

$$\varphi\,(P, x) = (2\,\pi)^{-2} \int (dp)^4\, \tilde{\varphi}\,(P, p)\, e^{i(p,x)}\,. \tag{8}$$

(2) donne, compte tenu de (5), (6) et (7):

$$j_\mu\,(x) = (2\,\pi)^{-3} \int (dp)^3 \int (dk)^3 \left(\omega^2 - \frac{1}{4}\,\nu^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{\chi}^* \left(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{k}\right) \tilde{\chi} \left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) \tilde{\eta}_\mu\,(p, k)\, e^{i(k,x)} \tag{9}$$

où:

$$\omega = p^4 > 0\,,\ \nu = k^4\,,$$
$$\left(p \pm \frac{1}{2}\,k\right)^2 = \left(\vec{p} \pm \frac{1}{2}\vec{k}\right)^2 - \left(\omega \pm \frac{1}{2}\,\nu\right)^2 = -\,M^2 \tag{10}$$

et:

$$\tilde{\eta}_\mu(p, k) = i \int (dq)^4 \varphi\left(p - \frac{1}{2}k, \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{2}k\right) + q\right) \tilde{\varphi}\left(p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}k, \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}k\right) + q\right) \quad (q^2 + m^2)(p_\mu + q_\mu) . \qquad (11)$$

Il est aisé de voir que:

$$\tilde{\eta}_\mu(p, k) = p_\mu \tilde{\eta}(p, k) \qquad (12)$$

où $\tilde{\eta}(p, k)$ est, dans l'hypothèse d'un état S [1], une fonction invariante des quadrivecteurs p et k, qui peut donc être exprimée en termes de p^2, (p, k) et k^2 seulement. Or il résulte de (10) que $\left(p^2 + \frac{1}{4}k^2\right) = -M^2$ et $(p, k) = 0$. Ceci permet d'éliminer p^2 et (p, k), $\tilde{\eta}(p, k)$ devenant fonction de la seule variable k^2 $(\tilde{\eta}(p, k) \to \tilde{\eta}(k^2))$.

Il convient d'introduire la fonction:

$$\eta(x) = (2\pi)^{-4} \int (dk)^4 \tilde{\eta}(k^2) e^{i(k,x)} \qquad (13)$$

et le « courant du centre de gravité »:

$$J_\mu(x) = \frac{1}{2i} \chi^*(x) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu} \chi(x) = (2\pi)^{-3} \int (dp)^3 \int (dk)^3 \left(\omega^2 - \frac{1}{4}\nu^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\chi^*\left(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{k}\right) \tilde{\chi}\left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) e^{i(k,x)} . \qquad (14)$$

Cela permet de donner à (9) la forme:

$$j_\mu(x) = \int (dy)^4 \eta(x - y) J_\mu(y) . \qquad (15)$$

Cette formule montre clairement comment la densité de courant de la particule chargée dépend du paquet d'ondes choisi, par l'intermédiaire du courant (fictif) $J_\mu(x)$, la fonction invariante $\eta(x)$ étant la même pour tout état lié de masse M. S'il était possible de fixer à tout instant le centre de gravité à l'origine $(J_\mu(x) \to \delta_4{}^\mu \delta(\vec{x}))$, l'intégrale en (15) se réduirait à la moyenne temporelle de $\eta(x)$ et donnerait la distribution de charge stationnaire:

[1] Dans ce cas, $\varphi(P, p)$ est en effet une fonction invariante de P et p.

$$\overline{\eta}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \eta(x) = (2\pi)^{-3} \int (dk)^3\, \tilde{\eta}(\vec{k}^2)\, e^{i(\vec{k},\vec{x})} . \qquad (16)$$

Toutefois, il est bien connu qu'une localisation aussi stricte est impossible avec un paquet d'ondes χ (X) solution de l'équation de Klein-Gordon (4). Une diffusion du paquet d'ondes est inévitable, d'autant plus forte que la localisation au temps $T = 0$ est plus précise.

Pour poursuivre notre discussion, nous devons faire certaines hypothèses sur la forme de $\tilde{\chi}(\vec{P})$. Nous supposons:

I. $\chi(\vec{P})$ est une fonction uniformément décroissante de $|\vec{P}|$, de largeur $1/R_0$, avec $1/R_0 \ll M$ (c'est-à-dire la largeur R_0 du paquet d'ondes est, pour $T = 0$, beaucoup plus grande que la longueur d'onde de Compton d'une particule de masse M);

II. χ (P) est lentement variable, sensiblement constante dans l'intervalle $|\Delta P| < 1/R_0' \gg 4\rho$ avec $\rho^2 = m^2 - \frac{1}{4}M^2 = (mB)$ si $B \ll m$.

On a nécessairement $1/R_0' < 1/R_0$, et les hypothèses (I) et (II) ne sont compatibles que si $4\rho \ll M$. Cette condition est réalisée dans la limite non-relativiste, ou statique: $m \to \infty$, $B \to 0$, $\rho^2 \cong (mB)$ restant fini.

Les formules (10) déterminent ω et ν comme fonctions de $\vec{p}$ et $\vec{k}$. Avec l'hypothèse I on obtient:

$$\omega \cong E\,; \quad \nu \cong \frac{1}{M}(\vec{p}, \vec{k})\,; \quad k^2 = \vec{k}^2 - \nu^2 \cong \vec{k}^2 . \qquad (17)$$

D'autre part, on peut montrer que $\tilde{\eta}(\vec{k}^2)$ est une fonction décroissante de $\vec{k}^2$, de largeur $16\rho^2$. Ce résultat et l'hypothèse (II) permettent de négliger $\vec{k}$ dans $\tilde{\chi}^*\left(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{k}\right)$ et $\tilde{\chi}\left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{k}\right)$[1]. (9) donne dans ces conditions:

[1] La discussion qui précède n'est pas rigoureuse, en particulier l'énoncé « $\chi(\vec{P})$ est sensiblement constante dans l'intervalle... » devrai être précisé. Bien que cela ne présente pas de difficultés de principes, nous n'entrons pas ici dans ces détails.

$$j^4(x) \cong (2\pi)^{-3} \int (dp)^3 \int (dk)^3 \,|\, \tilde{\chi}(\vec{p}) \,|^2\, \tilde{\eta}(\vec{k}^2)\, e^{i\left(\vec{k},\vec{x} - \frac{t}{M}\vec{p}\right)} \qquad (18)\,[1]$$

$$j^i(x) \cong (2\pi)^{-3} \int (dp)^3 \int (dk)^3 \,|\, \tilde{\chi}(\vec{p}) \,|^2\, \tilde{\eta}(\vec{k}^2) \frac{p^i}{M} e^{i\left(\vec{k},\vec{x} - \frac{t}{M}\vec{p}\right)} .$$

Pour $t = 0$, on obtient:

$$j^4(\vec{x}, 0) \cong \tilde{\eta}(\vec{x}) \quad \text{(cf. (16))} \; ; \quad j^i(\vec{x}, 0) \cong 0 \; , \qquad (19)$$

compte tenu de la condition de normation

$$\int (dp)^3 \,|\, \tilde{\chi}(\vec{p}) \,|^2 = 1 \; .$$

Par contre, pour $t \to \infty$,

$$j^4(\vec{x}, t) \cong \left(\frac{M}{t}\right)^3 \left|\tilde{\chi}\left(\frac{M}{t}\vec{x}\right)\right|^2 ; \quad j^i(\vec{x}, t) \cong \left(\frac{M}{t}\right)^3 \left|\tilde{\chi}\left(\frac{M}{t}\vec{x}\right)\right|^2 \frac{x^i}{t} \; . \qquad (20)$$

Nous avons ainsi établi que pour $t = 0$ la distribution de charge est approximativement donnée par $\overline{\eta}(\vec{x})$, indépendante du choix du paquet d'ondes vérifiant les hypothèses (I) et (II). Par contre, pour $t \to \infty$, la distribution de charge se déduit de la transformée de Fourier $\tilde{\chi}(\vec{P})$ du paquet d'ondes, la charge étant contenue dans une sphère de rayon $R(t) \cong t/(M R_0)$. Ces résultats deviennent exacts dans la limite non-relativiste. Voir figure 1.

D'autre part, nous avons établi que dans le cas d'une liaison assurée par des photons scalaires (mésons scalaires de masse nulle), la limite non-relativiste de la fonction $\overline{\eta}(\vec{x})$ correspondant à l'état fondamental (caractérisé par les valeurs $n = l = m = \varkappa = 0$ des nombres quantiques usuels n, l et m, et du nouveau nombre quantique $\varkappa$) est donnée par:

$$j^4(\vec{x}, 0) = \overline{\eta}(\vec{x}) \longrightarrow \frac{(2\rho)^3}{\pi} e^{-4\rho r} \; . \qquad (21)$$

[1] Cette forme approchée vérifie l'équation de continuité $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$.

Cette limite est identique à la distribution de charge prévue par le formalisme non-relativiste de Schroedinger. Nous obtenons ainsi une nouvelle confirmation de l'équivalence des for-

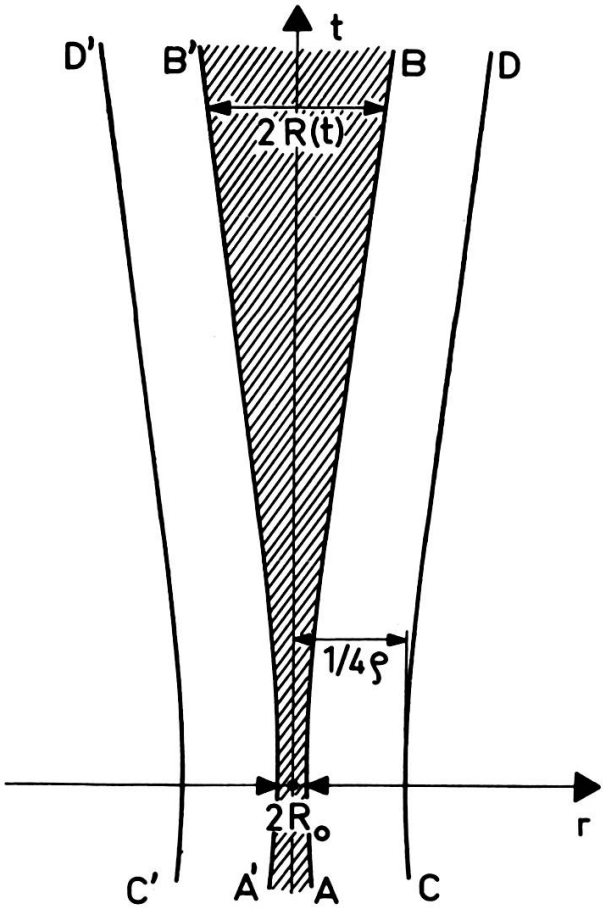

Fig. 1.

Représentation schématique du comportement spatio-temporel de la distribution de courant dans un état lié.
Le centre de gravité est localisé dans le domaine hachuré, limité par les courbes AB et A′ B′, de rayon R (t) (R $(0) = R_0$). Les lignes CD et C′ D′ indiquent la largeur de la distribution de charge. Cette largeur est de l'ordre (R (t) + 1/4 ρ), ce qui vaut environ 1/4 ρ pour $t = 0$ et R (t) pour $t \to \infty$.

malismes de Schroedinger et de Bethe-Salpeter dans la limite non-relativiste et si l'on se borne aux états caractérisés par $\varkappa = 0$ (Wick [4], Cutkosky [5], Wanders [6]).

Pour calculer la limite (21) nous utilisons la représentation intégrale de Wick [4] des solutions $n = l = m = 0$:

$$\tilde{\varphi}(P, p) = \int_{-1}^{+1} du\, g(u) [p^2 + u(P, p) + M^2 - i\varepsilon]^{-3} \tag{22}$$

avec:

$$g(u) \to C(1 - |u|) \quad \text{pour} \quad \varkappa = 0 . \tag{23}$$

L'insertion de (22) dans (11) et l'utilisation de (23) donnent, après un calcul assez laborieux basé sur la technique des représentations de Feynman, le résultat suivant:

$$\tilde{\eta}(k^2) \to - C^2 \frac{8\pi^3}{M\rho} \frac{1}{(k^2 + 16\rho^2)^2} . \tag{24}$$

Ce qui donne (21) si $C = i\pi^{-3/2}(2\rho)^{5/2} M^{1/2}$. Ce coefficient de normation est identique à celui obtenu par Nishijima [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. Salpeter, E. E. and H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, *84*, 1232 (1951).
2. Nishijima, K., *Prog. of Theor. Phys.*, *10*, 549 (1953); *12*, 279 (1954); *13*, 305 (1955).
3. Mandelstam, S., *Proc. Roy. Soc.*, *233*, 248 (1955).
4. Wick, G. C., *Phys. Rev.*, *96*, 1124 (1954).
5. Cutkosky, R. E., *Phys. Rev.*, *96*, 1135 (1954).
6. Wanders, G., *Phys. Rev.*, *104*, 1782 (1956) et *Helv. Phys. Acta* (sous presse).

Université de Genève.
Institut de Physique.

R. Lacroix et **Ch. Ryter.** — *Influence de la structure fine sur la structure hyperfine en résonance paramagnétique.*

(Voir *Archives des Sciences*, vol. 10, numéro spécial (1957).

Roland Beeler, Georges Béné, Richard Extermann et **Dominique Roux.** — *Effets de relaxation des spins électroniques observés dans la résonance en champ faible.*

La forme des courbes de résonance obtenues lorsque la largeur de raie est de l'ordre de grandeur du champ H_0 peut être établie dans le formalisme classique de Bloch en écrivant que la magnétisation globale de l'échantillon se fait suivant la résultante des deux champs appliqués, c'est-à-dire en ne négli-