Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 7 (1954)

Heft: 4

Artikel: Calcul des fonctions-source en diffusion de Ryleigh-Thomson

Autor: Bouvier, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738930

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CALCUL DES FONCTIONS-SOURCE EN DIFFUSION DE RAYLEIGH-THOMSON

PAR

Pierre BOUVIER

Les fonctions-source qui mesurent le rapport du coefficient d'émission à celui d'absorption dans le transfert du rayonnement à travers une atmosphère stellaire, sont évaluées ici en suivant un procédé de M. V. Kourganoff, pour le cas où le transfert s'effectue suivant une diffusion régie par la loi de Rayleigh-Thomson.

1. Cas simplifié où l'on néglige la polarisation.

En considérant un rayonnement non polarisé, diffusé d'après la loi correspondant à la fonction de phase

$$p(\cos\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta)$$

l'intensité émergeant à la surface $\tau=0$ de l'atmosphère stratifiée en couches plan parallèles (τ étant la profondeur optique) et dans la direction $\theta=\cos^{-1}\mu$ a pour expression

$$I_{n}(0,\mu) = \frac{3}{4}F\left\{\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{(3-\mu^{2})x_{\alpha}L_{\alpha}}{x_{\alpha}+\mu} + \mu + Q\right\} \quad (1.1)$$

dans l'approximation d'ordre n de la méthode de Wick-Chandrasekhar ¹. F désigne le flux net (constant), L_{α} et Q sont n

¹ S. Chandrasekhar, Ap. J., 100 (1944), 117.

constantes arbitraires à déterminer par la condition d'absence de rayonnement venant de l'extérieur et x_{α} sont les n-1 racines positives de l'équation caractéristique

$$T_n(x^2) = 1 - \frac{3}{8}x^2 \sum_{j=1}^n \frac{a_j(3 - \mu^2_j)}{x^2 - \mu^2_j} = 0$$

où les μ_j sont les *n* racines positives du polynôme de Legendre de degré 2n et les a_j les poids relatifs à la formule de quadrature de Gauss, basée sur la subdivision par les μ_j de l'intervalle (0, 1).

Introduisant la fonction $H_n(\mu)$ définie à l'aide des racines μ_i et x_α par

$$H_{n}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{0.3}} \frac{\prod_{i=1}^{n} (\mu + \mu_{i})}{\prod_{i=1}^{n} (\mu + x_{\alpha})}$$

nous pouvons transformer l'expression (1) en

$$I_{n}(0, \mu) = \frac{3}{4} \operatorname{F} \sqrt{0.3} \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_{\alpha} L_{\alpha} \right) \operatorname{H}_{n}(\mu) \qquad (1.2)$$

$$= \frac{3}{4} \operatorname{F} \left(3 \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{\alpha} + Q \right) \operatorname{H}_{n}(\mu)$$

D'autre part, la fonction-source du problème a pour valeur, en n-ième approximation,

$$\mathcal{J}_{n}(\tau,\mu) = \frac{3}{4} F \left\{ (3 - \mu^{2}) \sum_{\alpha=1}^{n} L_{\alpha} e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} + \tau + Q \right\}$$
 (1.3)

Reprenant ici l'élégante méthode appliquée par V. Kourganoff à la diffusion isotrope ¹, nous remarquerons d'abord, en comparant les formules (1.1) et (1.2) que $(3 - x_{\alpha}^2) x_{\alpha} L_{\alpha}$ peut être regardé comme le résidu de la fonction (prolongée analytiquement dans le domaine complexe) $(3 \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{\alpha} + Q) H_{n}(\mu)$

¹ V. Kourganoff, Basic methods in transfer problems (Oxford, 1952), § 27.3.

au pôle $\mu=-x_{\alpha}$; en conséquence, $L_{\alpha}e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}}$ qui apparaît dans (1.3), sera le résidu en $\mu=-x_{\alpha}$ de la fonction

$$\varphi_{n}\left(\mu\right) = \left(3\sum_{\alpha=1}^{n-1}L_{\alpha} + Q\right) \frac{H_{n}\left(\mu\right)e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\left(-\mu\right)\left(3-\mu^{2}\right)}$$

En vertu du théorème des résidus de Cauchy, la somme $\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{\alpha} \, e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} \, \text{pourra s'exprimer par une intégrale dans le plan complexe}$

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{\alpha} e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c}^{\tau} \varphi_{n}(\mu) d\mu$$

pour toute valeur de n. Le contour C doit englober tous les pôles — x_{α} , lesquels se trouvent dans l'intervalle (0, -1) de l'axe réel, et exclure les singularités $\mu = 0$ et $\mu = -\sqrt{3}$ de $\varphi_n(\mu)$. Alors que l'exclusion du point — $\sqrt{3}$ est en quelque sorte automatique, il convient d'entourer l'origine par un petit cercle de rayon ε inférieur au plus petit des modules $|x_{\alpha}|$.

Eliminant $H_n(\mu)$ à l'aide de l'identité de Chandrasekhar

$$\mathbf{H}_{n}\left(\mu\right)\,\mathbf{H}_{n}\left(-\mu\right)\,=\,\frac{1}{\mathbf{T}_{n}\left(\mu^{2}\right)}$$

nous aurons

$$\varphi_{n}\left(\mu\right) \,=\, -\, \frac{3\displaystyle\sum_{1}^{n-1} \mathbf{L}_{\alpha} \,+\, \mathbf{Q}}{\mu\,\left(3\,-\,\mu^{2}\right)} \,\, \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mathbf{H}_{n}\left(-\,\mu\right)\,\mathbf{T}_{n}\left(\mu^{2}\right)}$$

et passerons ensuite à la limite $n \to \infty$. Alors $\varepsilon \to 0$, et $I_n(0, \mu)$ devient ¹

$$I(0,\mu) = \frac{F}{2\alpha_1} H(\mu)$$

¹ S. Chandrasekhar, Radiative transfer (Oxford, 1950; abrégé R.T. par la suite), § 45.

où α_1 est le premier moment de la fonction H (μ), définie maintenant comme la solution (unique) de l'équation intégrale

$$\begin{split} H\left(\mu\right) \; = \; 1 \; + \; \mu \; H\left(\mu\right) \; \int\limits_{0}^{1} \frac{H\left(\mu'\right) \; \psi\left(\mu'\right)}{\mu \; + \; \mu'} \, d \; \mu' \\ \\ \text{où } \; \psi\left(\mu\right) \; = \; \frac{3}{16} \left(3 \; - \; \mu^2\right) \, . \end{split} \label{eq:polyanger} \tag{1.4}$$

En outre, la forme limite de $T_n(\mu^2)$ s'écrit:

$$T(\mu^2) = 1 + \frac{3}{8}\mu^2 \int_0^1 \frac{(3-z^2) dz}{z^2 - \mu^2}$$
 (1.5)

Envisagée comme une fonction de la variable complexe μ , la fonction (1.5) apparaît multiforme et il faut en choisir une détermination particulière afin d'écarter toute ambiguité dans le passage à la limite $n \to \infty$. Il est naturel d'adopter, avec V. Kourganoff, la détermination de (1.5) pour laquelle cette fonction est réelle sur l'axe réel en dehors de l'intervalle (—1, 1). Posant alors

$$arg (1 + \mu) = \theta'$$
 $arg (1 - \mu) = \theta''$

nous trouvons, après intégration,

$$T(\mu^{2}) = 1 - \frac{3}{8}\mu^{2} + \frac{3}{16}\mu(3 - \mu^{2}) \left\{ \log \left| \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right| + i(\theta'' - \theta' + \pi) \right\}$$
(1.6)

et la forme limite de φ_n (μ) devient

$$\varphi(\mu) \, = \, -\, \frac{2}{3\,\alpha_1} \, \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu\,(3\,-\,\mu^2)\,\,\mathrm{H}\,(-\,\mu)\,\,\mathrm{T}\,(\mu^2)}$$

où T (μ^2) est la détermination (1.6).

Intégrons donc φ (μ) le long d'un contour allant de — ε à — 1 par le bord supérieur de la coupure (0, — 1), contournant le point — 1 dans le sens positif et revenant à — ε par le bord

inférieur de la même coupure. Nous obtenons, en écrivant $\mu = -u$, une expression de la forme:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} L_{\alpha} e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} = -\frac{1}{3\alpha_{1}} \int_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{\tau}{u}} du}{H(u) Z(u)}$$
(1.7)

οù

$$\mathbf{Z}\left(u
ight) \ = \ \left[1 - rac{3}{8}u^2 + rac{3}{16}u\left(3 - u^2
ight)\lograc{1 + u}{1 - u}
ight]^2 + \left(rac{3\pi}{16}
ight)^2u^2\left(3 - u^2
ight)^2$$

et nous parviendrons finalement à la valeur exacte de la fonction-source en substituant (1.7) dans (1.3) où la constante Q aura été remplacée par le rapport α_2/α_1 des moments d'ordre 2 et 1 de la fonction H (μ).

2. Remarques sur la diffusion isotrope avec absorption pure.

Nous savons que l'équation caractéristique de ce problème, où l'albedo ω est inférieur à l'unité, a pour expression ¹

$$T_n(x^2) = 1 - \omega x^2 \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{x^2 - \mu_j^2} = 0$$
 (2.1)

et qu'elle possède n racines positives distinctes. Chassant les dénominateurs de (2.1), nous avons un polynôme de degré n en $x^2 = X$

$$R(X) - \omega X \sum_{j} a_{j} R_{j}(X) = 0$$

où

$$R(X) = \prod_{1}^{n} (X - M_{j}), \quad R_{j}(X) = \prod_{k \neq j} (X - M_{k}), \quad M_{j} = \mu_{j}^{2}$$

Ecrivant explicitement le premier et le dernier terme de ce polynôme ordonné suivant les puissances de X,

$$(1 - \omega) X^n + \cdots + (-1)^n M_1 M_2 \ldots M_n = 0$$

¹ R.T., § 26.4.

nous tirons de là une relation entre les racines X_{α} de (2.1) et les racines μ_{j} à savoir

$$\frac{\mathbf{M_1} \,\mathbf{M_2} \,\ldots\,\mathbf{M_n}}{\mathbf{X_1} \,\mathbf{X_2} \,\ldots\,\mathbf{X_n}} = 1 - \omega \tag{2.2}$$

Le problème d'intérêt physique majeur, lorsque $\omega < 1$, est le plus souvent celui de la réflexion diffuse; l'intensité diffusée par réflexion à la surface $\tau = 0$ de l'atmosphère vaut:

$$\begin{split} \mathrm{I}_{n}^{\mathrm{refl.}}\left(0,\mu\right) &= \frac{\omega}{4}\,\mathrm{F}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{x_{\alpha}\,\mathrm{L}_{\alpha}}{\mu+x_{\alpha}} + \frac{\gamma\,\mu_{0}}{\mu+\mu_{0}}\right\} \\ &= \frac{\omega}{4}\,\mathrm{F}\,\frac{\mu_{0}}{\mu+\mu_{0}}\,\mathrm{H}_{n}\left(\mu_{0}\right)\,\mathrm{H}_{n}\left(\mu\right) \end{split}$$

si l'intensité incidente forme avec la normale aux plans de stratification l'angle $\cos^{-1} \mu_0$.

La fonction-source s'écrit ici:

$$\mathcal{J}_n(\tau) = \frac{\omega}{4} \operatorname{F} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n L_{\alpha} e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} + \gamma e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \right\}$$
 (2.3)

Son rôle physique est moins important qu'il n'était dans le problème à flux net constant, mais ceci ne nous empêche pas de rechercher la forme exacte de (2.3) quand $n \longrightarrow \infty$, par la même méthode qu'au § 1.

En particulier, la constante γ s'obtient immédiatement en écrivant

 $\gamma\,\mu_0\,=\,\text{r\'esidu en}\,\,\mu\,=\,-\,\,\mu_0\,\,\text{de la fonction}\,\frac{\mu_0}{\mu\,+\,\mu_0}\,\text{H}\,(\mu_0)\,\,\text{H}\,(\mu).$

$$= \mu_0 H (\mu_0) H (-\mu_0) = \frac{\mu_0}{T (\mu_0^2)}$$

Parmi les n racines positives de (2.1), l'une d'entre elles, soit x_n , peut devenir, contrairement aux autres, supérieure à l'unité. En exprimant alors la somme $\sum_{1}^{n} L_{\alpha} e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}}$ comme une intégrale complexe, nous devrons ajouter à une intégrale prise sur le contour entourant les points $-x_1, ..., -x_{n-1}$ et excluant

l'origine, le résidu relatif au pôle isolé $\mu=-x_n$. Nous n'allons pas reproduire ce calcul ici, car il se révèle identique à celui qu'avait effectué V. Kourganoff pour le problème, mathématiquement équivalent, de la formation des raies d'absorption selon Eddington et Milne; nous nous bornerons à quelques remarques.

Démontrons que $(1-\omega)^{-1}$ est une limite supérieure des racines de (2.1). En effet, les a_j étant tous $\geqslant 0$ et tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, les μ_j^2 étant d'autre part tous < 1, nous pouvons écrire l'inégalité

$$1 - \omega \sum_{1}^{n} \frac{a_{j}}{1 - \frac{\mu_{j}^{2}}{x^{2}}} > 1 - \omega \sum_{1}^{n} \frac{a_{j}}{1 - \frac{1}{x^{2}}} = 1 - \frac{\omega}{1 - \frac{1}{x^{2}}}$$

Or la valeur $\xi^2 = (1 - \omega)^{-1}$ annule le second membre de cette inégalité, de sorte qu'elle en rend positif le premier membre $T_n(\xi^2)$. Cependant, la fonction (2.1) est monotone croissante au-delà du dernier de ses pôles (soit μ_n) et jusqu'à l'infini; elle passe, dans cet intervalle (μ_n , ∞) de la valeur — ∞ à la valeur positive 1 — ω , de sorte qu'elle ne s'annulera plus, avant même que x^2 n'atteigne la valeur ξ^2 .

Il résulte de là et de la relation (2.2), que nous aurons

$$\frac{\mathbf{M_1} \, \mathbf{M_2} \, \dots \, \mathbf{M_n}}{\mathbf{X_1} \, \mathbf{X_2} \, \dots \, \mathbf{X_{n-1}}} < 1$$

inégalité qui est à rapprocher du cas où le premier membre vaut 1/3, lorsque $\omega=1$.

3. Cas général de la diffusion Rayleigh-Thomson avec flux net constant.

Ce problème, qui a été résolu complètement par S. Chandrasekhar en ce qui concerne les lois d'assombrissement ², nous

¹ V. Kourganoff, Ap. J., 113 (1951), 419.

² R.T., § 68.

met en présence de deux intensités, $I_l(\tau, \mu)$ et $I_r(\tau, \mu)$ relatives aux radiations polarisées dans des directions respectivement parallèle et perpendiculaire au plan méridien contenant la direction d'émission. A la surface de l'atmosphère, nous avons en n-ième approximation les valeurs

$$I_{l}(0,\mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \mu + Q + (1 - \mu^{2}) \sum_{\beta=1}^{n-1} \frac{\xi_{\beta} L_{\beta}}{\mu + \xi_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{M_{\alpha}}{x_{\alpha}} (x_{\alpha} - \mu) \right\}$$

$$(3.1)$$

$$I_{r}(0,\mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \mu + Q - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{M_{\alpha}}{x_{\alpha}} \frac{1 - x_{\alpha}^{2}}{\mu + x_{\alpha}} \right\}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{3} F \frac{\mu + c}{\sqrt{2}} H_{r}(\mu)$$

où q, c, Q sont des constantes à exprimer finalement en termes des moments des fonctions $H_l(\mu)$, $H_r(\mu)$, lesquelles seront solutions d'équations intégrales du type (1.4) d'Ambarzumian-Chandrasekhar avec

$$\psi_l(\mu) = \frac{3}{4} (1 - \mu^2)$$
, respectivement $\psi_r(\mu) = \frac{3}{8} (1 - \mu^2)$.

Dans les formules (3.1) et (3.2), les L_{β} et M_{α} sont des constantes arbitraires, les ξ_{β} sont les n-1 racines positives de l'équation

$$T_l(\mu^2) = 1 - \frac{3}{2}\mu^2 \sum_{j=1}^n \frac{a_j(1-\mu_j^2)}{\mu^2 - \mu_j^2} = 0$$
 (3.3)

ces racines, séparées par les pôles μ_j , sont toutes < 1 ($a_j \ge 0$). Quant aux x_{α} , qui sont les racines positives de

$$T_r(\mu^2) = 1 - \frac{3}{4}\mu^2 \sum_{j=1}^n \frac{a_j(1-\mu_j^2)}{\mu^2 - \mu_j^2} = 0$$
 (3.4)

les n-1 plus petites d'entre elles sont, pour la même raison que tout à l'heure, inférieures à 1 et il en va de même pour la

dernière, soit x_n , contrairement au cas de la fonction (2.1), puisqu'ici $T_r(\mu^2)$ est croissante monotone de $T_r(1)=\frac{1}{4}$ à $T_r(\infty)=\frac{1}{2}$.

Les fonctions-source ont pour expression

$$\mathcal{J}_{j}(\tau,\mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \tau + Q + (1 - \mu^{2}) \sum_{\beta=1}^{n-1} L_{\beta} e^{-\frac{\tau}{\xi_{\beta}}} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{M_{\alpha}}{x_{\alpha}^{2}} (x_{\alpha}^{2} - \mu^{2}) e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} \right\}$$

$$\mathcal{J}_{r}(\tau,\mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \tau + Q - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{M_{\alpha}}{x_{\alpha}^{2}} (1 - x_{\alpha}^{2}) e^{-\frac{\tau}{x_{\alpha}}} \right\}$$

Procédant comme § 1, nous mettrons leurs valeurs exactes sous la forme

$$\begin{split} \mathcal{J}_{l}(\tau,\,\mu) \, &= \, \frac{3}{8} \, \mathrm{F} \, \bigg\{ \, \tau \, + \, \mathrm{Q} \, + \, \frac{1 \, - \, \mu^{2}}{2 \, \pi \, i} \, \int\limits_{c_{1}}^{\bullet} \, \phi_{ll}(z) \, dz \, + \\ &\quad + \, \frac{1}{2 \, \pi \, i} \, \int\limits_{c_{2}}^{\bullet} \, \phi'_{\,\, lr}(z) \, dz \, + \, \frac{\mu^{2}}{2 \, \pi \, i} \, \int\limits_{c_{2}}^{\bullet} \, \phi''_{\,\, lr}(z) \, dz \, \bigg\} \\ \\ \mathcal{J}_{r}(\tau,\,\mu) \, &= \, \frac{3}{8} \, \mathrm{F} \, \bigg\{ \, \tau \, + \, \, \mathrm{Q} \, + \, \frac{1}{2 \, \pi \, i} \, \int\limits_{c_{2}}^{\bullet} \, \phi_{rr}(z) \, dz \, \bigg\} \end{split}$$

où

$$\begin{split} \phi_{ll}(\mu) &= -\frac{q}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu(1-\mu^2)} \, \mathrm{H}_l(\mu) \\ \phi'_{lr}(\mu) &= \frac{\mu+c}{\sqrt{2}} \frac{\mu \, e^{\frac{\tau}{\mu}}}{1-\mu^2} \, \mathrm{H}_r(\mu) \\ \phi''_{lr}(\mu) &= -\frac{\mu+c}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu(1-\mu^2)} \, \mathrm{H}_r(\mu) \\ \phi_{rr}(\mu) &= -\frac{\mu+c}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} \, \mathrm{H}_r(\mu) \end{split}$$

Le contour C_1 englobera tous les pôles — ξ_{β} de $I_l(0, \mu)$ et le contour C_2 tous les pôles — x_{α} de $I_r(0, \mu)$; tous deux doivent

exclure les points 0 et -1. Comme précédemment, nous éliminons $H_l(\mu)$ et $H_r(\mu)$ non définies en (0, -1) à l'aide des identités

$$H_l(\mu) H_l(-\mu) = \frac{1}{T_l(\mu^2)}, H_r(\mu) H_r(-\mu) = \frac{1}{T_r(\mu^2)}$$

où les fonctions T désignent maintenant les déterminations particulières uniformes

$$\begin{array}{l} (0<\theta'<2\pi, \qquad 0<-\theta''<2\pi) \\ \\ T_l(\mu^2) \,=\, 1-\frac{3}{2}\,\mu^2\,+\,\frac{3}{4}\,\mu\,(1-\mu^2)\, \Big\{\log\Big|\frac{1-\mu}{1+\mu}\Big|\,+\,i\,(\theta''-\theta'+\pi)\,\Big\} \\ \\ T_r(\mu^2) \,=\, 1-\frac{3}{4}\,\mu^2\,+\,\frac{3}{8}\,\mu\,(1-\mu^2)\, \Big\{\log\Big|\frac{1-\mu}{1+\mu}\Big|\,+\,i\,(\theta''-\theta'+\pi)\,\Big\} \end{array}$$

qui sont réelles sur l'axe réel en dehors de l'intervalle (-1, +1).

Isolant les singularités 0 et -1 dans des cercles de rayons ε , respectivement η suffisamment petits, nous adoptons pour C_1 et C_2 un contour longeant le bord supérieur de la coupure (0,-1) de $-\varepsilon$ à $-1+\eta$, traversant cette coupure (l'argument de log $(1+\mu)$ passe alors de façon discontinue de 0 à 2π , tandis que celui de log $(1-\mu)$ reste nul) et revenant à $-\varepsilon$ par le bord inférieur.

On trouve un résultat de la forme

$$\begin{split} \mathcal{J}_{l}(\tau,\mu) &= \frac{3}{8} \mathrm{F} \left\{ \tau + \mathrm{Q} - \frac{3 \, q}{4 \, \sqrt{2}} (1 - \mu^{2}) \int_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{\tau}{u}} \, du}{\mathrm{H}_{l}(u) \, \mathrm{Z}_{l}(u)} + \right. \\ &+ \frac{3}{8 \, \sqrt{2}} \int_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{\tau}{u}} \, (c - u) \, (u^{2} - \mu^{2})}{\mathrm{H}_{r}(u) \, \mathrm{Z}_{r}(u)} \, du \right\} \\ \mathcal{J}_{r}(\tau,\mu) &= \frac{3}{8} \mathrm{F} \left\{ \tau + \mathrm{Q} - \frac{3}{8 \, \sqrt{2}} \int_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{\tau}{u}} \, (c - u) \, (1 - u^{2})}{\mathrm{H}_{r}(u) \, \mathrm{Z}_{r}(u)} \, du \right\} \end{split}$$

où

$$\begin{split} \mathbf{Z}_l(u) &= \left[1 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{4}u\left(1 - u^2\right)\log\frac{1 - u}{1 + u}\right]^2 + \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2u^2\left(1 - u^2\right)^2 \\ \mathbf{Z}_r(u) &= \left[1 - \frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{8}u\left(1 - u^2\right)\log\frac{1 - u}{1 + u}\right]^2 + \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2u^2\left(1 - u^2\right)^2 \end{split}$$

Les constantes q et c, qui apparaissent dans les lois d'assombrissement, ont d'après Chandrasekhar les valeurs ¹

$$q = 2 \frac{4 (A_1 + 2 \alpha_1) - 3 A_0 \alpha_1 + A_1 \alpha_0)}{3 (A_1^2 + 2 \alpha_1^2)}$$

$$c = \frac{8 (A_1 - \alpha_1) + 3 (2 \alpha_0 \alpha_1 - A_0 A_1)}{3 (A_1^2 + 2 \alpha_1^2)}$$

en fonction des moments d'ordre 1 et 2, α_1 et α_2 de $H_l(\mu)$, A_1 et A_2 de $H_r(\mu)$.

Pour obtenir la valeur exacte de la constante Q, nous multiplions les deux membres de (3.2) où $\mu = \mu_i$ par a_i $(1 - \mu_i^2)$ et sommons sur i de -n à +n. Tenant compte de l'équation (3.4) et de ce que

$$I_r(0,\mu_i < 0) \equiv 0,$$

$$\sum_{i=-n}^{+n} a_i (1 - \mu_i^2) = \frac{4}{3}$$

nous trouvons sans peine

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j} (1 - \mu_{j}^{2}) I_{r}(0, \mu_{j}) = F \left\{ \frac{1}{2} Q - \sum_{\alpha=1}^{n} M_{\alpha} \frac{1 - x_{\alpha}^{2}}{x_{\alpha}^{2}} \right\}$$

et, passant finalement à la limite $n \longrightarrow \infty$, après quelques réductions,

$$Q = \frac{3}{4\sqrt{2}} (A_3 + c A_2 - A_1 - c A_0) + c \sqrt{2}$$

ce qui achève de résoudre le problème.

¹ R.T., éq. (99), ch. X.