

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 6 (1953)
Heft: 1

Artikel: Divergence de la théorie de perturbation
Autor: Petermann, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739996>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIVERGENCE
DE LA
THÉORIE DE PERTURBATION

PAR

A. PETERMANN

Institut de Physique de l'Université, Genève *.

(Avec 2 fig.)

Summary. — The simple case of a scalar theory with zero rest mass "photons" is investigated. Considering the Green's functions of this field theory, one obtains first a formula giving the exact Feynman graph's number at the $2n$ th approximation. This number is found to be asymptotically equal to $(n - 1)!$ Further, a detailed analysis of the integrals appearing at the $2n$ th approximation shows that the smaller of them gives a contribution greater than $(\text{const})^n (Ln)^{-n} n^{-n/2}$. Then, the general term of the perturbation expansion is asymptotically $(\text{const})^n (Ln)^{-n} n^{+n/2}$ and exhibits his divergence.

1. INTRODUCTION.

Les grandeurs physiques $F(\alpha)$, calculées, pour une théorie de champs quelconque, par intégration des équations de mouvement, sont données en terme de séries de puissances en $\alpha = g^2/4\pi$, du type

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \alpha^n \quad (1.1)$$

Depuis longtemps, et quelque optimistes qu'aient pu être certaines conclusions, on soupçonne ces développements d'être

* Recherche subventionnée par la Commission suisse d'énergie atomique.

divergents, même une fois écartées les difficultés ultra-violettes et autres [1, 2]. Plusieurs tentatives ont été faites récemment afin de le prouver directement. L'argument très suggestif de Dyson [3] en rendait du reste la réussite fort plausible. La complexité de l'analyse à effectuer n'a permis jusqu'à ce jour qu'une discussion utilisant des approximations assez grossières [4] ou n'envisageant qu'une partie du problème [5].

Le but du présent article est de démontrer cette divergence. Il est atteint en deux étapes:

Le § 2 est consacré à l'exposition d'une formule permettant de calculer le nombre exact de diagrammes apparaissant en $2n^{\text{ie}}$ approximation des fonctions de Green. Par souci de brièveté, nous ne donnons pas le processus de raisonnement qui a été suivi, tant la formule elle-même est explicite.

Au § 3, considérant une classe particulière de ces diagrammes, nous traitons de l'évaluation des intégrales de self-énergie en $2n^{\text{ie}}$ approximation. Les calculs effectués pour un cas simple de théorie de champs, faisant intervenir une interaction scalaire entre quanta de champs scalaires (les uns à masse de repos nulle), montrent que leur contribution asymptotique individuelle est supérieure à $K'^n n^{-n/2} \cdot (\log n)^{-n}$ dans la région $(-p^2) < x^2$. Les diagrammes négligés étant de même signe ne font qu'augmenter cette contribution, et on démontre alors que le terme général de la série de perturbation est supérieur à $K^n \cdot n^{n/2} \cdot (\log n)^{-n}$, et par conséquent celui d'une série divergente.

2. ENUMÉRATION DES DIAGRAMMES.

La première partie de cet exposé se doit de répondre à la question: combien de diagrammes de Feynman distincts existe-t-il à la $2n^{\text{ie}}$ approximation d'un effet physique quelconque ? Nous ne voulons pas nous appesantir sur ce point du problème, puisque, depuis l'élaboration de notre procédé de comptage, a paru une étude fort générale de la question due à Hurst [5]. Notre manière de l'aborder en diffère cependant essentiellement en ce sens qu'elle permet une énumération exacte, à une approximation donnée, des diagrammes afférents

à un effet physique particulier. C'est cet avantage qui justifie l'existence de ce court paragraphe.

Dans une théorie de deux champs (matière et interaction) comme celle que nous avons en vue de discuter, la fonction de Green d'un quantum de matière satisfait un système d'équations intégro-différentielles. Il fut signalé pour la première fois par Schwinger [6], dans le dessein précisément d'échafauder une théorie des dites fonctions sans le secours d'un développement en série. La résolution de ce système par le procédé même du développement en série fournit immédiatement un moyen de compter les diagrammes de chaque approximation. Les formules qui vont suivre ne sont qu'une traduction en symboles de ce procédé. Nous nous abstiendrons donc à ce sujet de tout commentaire ultérieur.

Si N_{2n} désigne le nombre de diagrammes distincts de la $2n^{\text{ie}}$ approximation représentant une self-énergie, il est donné, avec la convention ($-N_0 = 1$), par

$$\begin{aligned} N_{2n} = & (2n-3)N_{2n-2} + (2n-5)N_{2n-4}(K_0 K_2 + K_2 K_0) + \dots \\ & \dots + (2n-m-1)N_{2n-m}(K_0 K_{m-2} + \dots + K_r K_{m-r-2} + \dots K_{m-2} K_0) + \dots \\ & \dots + (K_0 K_{2n-2} + \dots + K_r K_{2n-r-2} + \dots K_{2n-2} K_0) . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les K_{2i} , nombre de diagrammes distincts de la $2i^{\text{ie}}$ approximation représentant la fonction de Green d'une particule, sont eux-mêmes déterminés en terme des N_{2j} , ($j \leq i$). On peut expliciter cette dépendance comme suit:

$$\begin{aligned} K_{2i} = & (N_2)^i + (i-1)(N_2)^{i-2}N_4 + \dots \quad (2.2) \\ & \dots + (N_r)^{2i/r-m}(N_s)_{s>r}^a(N_t)_{t>s}^b \dots \\ & \dots \frac{(2i/r-m+a+b+\dots)!}{(2i/r-m)! a! b! \dots} \delta(rm-as-bt-\dots) + N_{2i} . \\ r, s, t = & 2, 4 \dots 2i ; \quad m = 0, 2, 3, \dots (i-1) . \\ a, b, \dots \geq & 0 ; \quad 2i/r-m > 0 . \end{aligned}$$

Débutant avec $K_0 = K_2 = N_2 = 1$, on vérifie, à titre d'indication, les valeurs suivantes des premiers termes:

$$\begin{aligned} N_4 = & 3 ; \quad N_6 = 20 ; \quad N_8 = 189 ; \quad N_{10} = 2232 . \quad (2.3) \\ K_4 = & 4 ; \quad K_6 = 27 ; \quad K_8 = 248 ; \quad K_{10} = 2830 . \end{aligned}$$

Asymptotiquement, on voit que N_{2n} se comporte grossièrement comme $2^n \cdot n!$, résultat qui permet de conclure sur la rapidité avec laquelle croissent en nombre les diagrammes de self-énergie à n quanta virtuels.

3. EVALUATION DES INTÉGRALES DE SELF-ÉNERGIE EN $2n^{\text{te}}$ APPROXIMATION.

Suivant le formalisme de Feynman-Dyson dans la forme modifiée qu'en a proposé Koba [9], la matrice S :

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(q)!} (i)^q \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_q P^* (L(x_1) \dots L(x_q)) , \quad (3.1)$$

est donnée en terme du symbole P modifié: P^* , et $L(x_i)$, densité Lagrangienne d'interaction:

$$L = g u^\dagger u \Phi . \quad (3.2)$$

Cette dernière décrit le système constitué par le champ de matière u^\dagger , u et le champ photonique Φ en interaction. Ces champs satisfont les équations:

$$(\square - x^2) u = (\square - x^2) u^\dagger = 0 ; \quad \square \Phi = 0 . \quad (3.3)$$

Le symbole P^* est défini comme suit:

$$\begin{aligned} P^* (\Phi(x_1), \Phi(x_2)) = \\ \frac{1}{2} (1 + \varepsilon(x_1 x_2)) \Phi(x_1) \Phi(x_2) + (1 - \varepsilon(x_1 x_2)) \Phi(x_2) \Phi(x_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les espérances mathématiques du vide pour le P^* sont données en terme des fonctions causales D par

$$\begin{aligned} \langle P^* (\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \rangle_0 &= \frac{1}{2} D(x_1 - x_2) \\ \langle P^* (u^\dagger(x_1), u(x_2)) \rangle_0 &= \frac{1}{2} D_\varepsilon(x_1 - x_2) , \end{aligned} \quad (3.5)$$

dont les représentations de Fourier sont

$$D(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int e^{i(kx)} \frac{(dk)}{k^2}$$

$$D_x(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int e^{i(kx)} \frac{(dk)}{k^2 + x^2}. \quad (3.6)$$

La substitution de ces représentations dans les termes du développement de S relatif aux self-énergies nous fournira les expressions que nous donnons plus bas.

Parmi les N_{2n} diagrammes de self-énergie de la $2n^{\text{e}}$ approximation, nous ne retenons qu'une classe particulière définie comme suit: considérons la correction de radiation en g^2 d'un effet Compton multiple avec « émission » de $(n - 1)$ quanta d'interaction dans un ordre déterminé (fig. 1). Ces $(n - 1)$

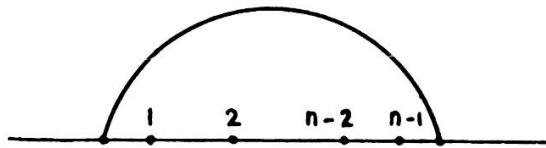


Fig. 1

quanta sont ensuite réabsorbés par la particule de matière et le peuvent être, selon l'ordre de cette réabsorption, de $(n - 1)!$ manières différentes, obtenues les unes des autres par permutation des $n - 1$ points du diagramme figuratif de la réabsorption. Ces effets de self-énergie, au nombre de $(n - 1)!$ et tous d'ordre $2n$ en g , ne représentent en gros que la $(2^{-n})^{\text{e}}$ partie de tous ceux qui peuvent se produire. Mais toutes les intégrales figurées par les diagrammes d'une même approximation ont même signe (voir Appendice III) et la partie omise ne peut, dans ces conditions, jouer de rôle compensateur. Si donc on peut démontrer que la classe restreinte d'effets envisagés contribue de façon telle qu'elle constitue à elle-même une série divergente, on aura atteint le but que l'on s'était proposé.

Nous utilisons, pour passer d'un diagramme donné à l'intégrale correspondante dans l'espace de Fourier le formalisme de Dyson [7] tel que nous l'avons brièvement exposé en tête de

ce paragraphe. Pratiquement, les règles formelles de passage peuvent se résumer comme suit:

- 1^o A chaque segment de ligne droite d'un diagramme (voir par exemple la figure 2), correspond, dans l'espace de Fourier, un facteur $\frac{1}{2} D_x(k_i)$ dont la représentation est fournie par (3.6);
- 2^o A chaque segment curviligne correspond un facteur $\frac{1}{2} D(k_j)$ (voir (3.6));
- 3^o A chaque point du diagramme opérant la jonction de trois lignes correspond un facteur $+ig$.

Un diagramme de self-énergie comprenant $2n$ points est constitué de $2n - 1$ segments de droite et de n segments curvilignes. On a donc, dans l'espace de Fourier, à effectuer $3n - 1$ intégrations quadridimensionnelles. $2n - 1$ d'entre elles sont immédiates, utilisent les lois de conservation d'impulsion-énergie et conduisent à exprimer les $3n - 1 k_i$ comme combinaisons linéaires de n d'entre eux appelés variables de base. Dans ces conditions, un diagramme de $2n$ points se ramènera immédiatement à n intégrations quadridimensionnelles sur k_1, k_2, \dots, k_n . De plus, pour rendre compacts les dénominateurs, l'identité

$$a^{-n} b^{-1} = n \int_0^1 x^{n-1} (ax + b(1-x))^{-n-1} dx, \quad (3.7)$$

due à Feynman est invoquée. Les n intégrations sur les variables internes sont effectuées à l'aide de:

$$\int \frac{(dk)}{(k^2 + L)^n} = \frac{i\pi^2}{(n-1)(n-2)L^{n-2}} \quad (3.8)$$

Des $(n-1)!$ intégrales $J_{n; a, b, \dots, d}$ envisagées, nous commençons par en évaluer une particulière, $J_{n; 2, 3, \dots, n}$, qui est illustrée par le diagramme de la figure 2. La notation utilisant les indices $2, 3, \dots, n$, spécifie que les photons, toujours émis dans l'ordre $2, 3, \dots, n$, sont également réabsorbés dans l'ordre $2, 3, \dots, n$, tandis que l'index a, b, \dots, d dénoterait une absorption dans cet ordre là. De sorte que si J_n signifie la

contribution totale des $(n-1)!$ intégrales envisagées, on aura:

$$J_n = \sum_{\text{Perm.}}^{\text{(n-1)!}} J_{n; 2, 3, \dots, n} . \quad (3.7)$$

A l'aide des définitions suivantes:

$$\begin{aligned} a_{(0)mm} &= x_{n-m+1} \dots x_{n-1} (1 - x_{n-m+1} \dots x_n) \quad m = 2, \dots, n . \\ b_{(0)kl} &= \begin{cases} x_{n-k+1} \dots x_{n-1} (1 - x_{n-l+1} \dots x_n) & \text{si } k > l ; \quad k = 2, \dots, n . \\ x_{n-l+1} \dots x_{n-1} (1 - x_{n-k+1} \dots x_n) & \text{si } l > k ; \quad l = 2, \dots, n . \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

effectuées en terme des $n-1$ paramètres de Feynmann x_2, \dots, x_n , l'intégrale $J_{n; 2, 3, \dots, n}$:

$$\begin{aligned} J_{n; 2, 3, \dots, n} &= (2\pi)^4 (-i)^{n-1} \left(\frac{\alpha}{4\pi^3} \right)^n \int (dk_1) \dots \\ &\quad \dots \int (dk_n) F_{n; 2, 3, \dots, n} (k_1, \dots, k_n, p) , \\ F_{n; 2, 3, \dots, n} &= k_1^{-2} \dots k_n^{-2} \cdot [(p + k_1)^2 + \kappa^2]^{-1} \dots \\ &\quad \dots [(p + k_1 + \dots + k_n)^2 + \kappa^2]^{-1} [(p + k_2 + \dots + k_n)^2 + \kappa^2]^{-1} \dots \\ &\quad \dots [(p + k_n)^2 + \kappa^2]^{-1} \end{aligned}$$

s'exprime, intégration faite sur les n variables internes, par:

$$\begin{aligned} J_{n; 2, 3, \dots, n} &= i (2\pi)^4 \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^n (n-2)! \\ &\quad \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 dv_2 \dots \int_0^1 dv_n \int_0^1 dw_2 \dots \int_0^1 dw_n \cdot k_{n; 2, 3, \dots, n} . \\ k_{n; 2, 3, \dots, n} &= x_2 x_3^2 \dots x_{n-1}^{n-2} \cdot v_2^{n-2} \dots v_n^{n-2} \cdot G_{n; 2, 3, \dots, n} . \\ G_{n; 2, 3, \dots, n} &= \left[(1 - v_2 w_2 (1 - a_{(0)22})) \dots \right. \\ &\quad \dots \left. (1 - v_n w_n (1 - a_{(n-2)nn})) \right]^{-2} (\kappa^2 + p^2 a_{(n-1)11})^{-n+1} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

en fonction des $2n - 2$ paramètres $\nu_2, \dots \nu_n, \omega_2, \dots \omega_n$ et des grandeurs telles que $a_{(k)m,m}$, construites par récurrence selon

$$a_{(k)m,m} = 1 - \nu_k (1 - a_{(k-1)m,m}) - \frac{\omega_k (1 - \nu_k (1 - b_{(k-1)m,k+1}))^2}{1 - \nu_k \omega_k (1 - a_{(k-1)k+1,k+1})} \quad (3.12)$$

et

$$b_{(k)l,m} = 1 - \nu_k (1 - b_{(k-1)l,m}) - \frac{\omega_k (1 - \nu_k (1 - b_{(k-1)l,k+1})) (1 - \nu_k (1 - b_{(k-1)m,k+1}))}{1 - \nu_k \omega_k (1 - a_{(k-1)k+1,k+1})} \quad (3.12 \text{ bis})$$

La recherche d'une minorante pour $J_{n;2 \dots n}$ est maintenant le point capital à éclaircir. A cet effet, on doit remarquer que :

- 1^o Sur tous les chemins d'intégration, l'intégrande est positif, pour autant que $(-p^2) < x^2$, tous les $a_{(j)}$ étant compris entre 0 et 1 (Appendice I);
- 2^o La presque totalité de la contribution offerte à l'intégrale est fournie par le voisinage de la valeur 1 des paramètres x_i , ν_i et ω_i .

Dans ces conditions, une formule de la moyenne (du type $\int_a^b f(x) dx \geq (b-a) [\text{minimum de } f(x) \text{ sur l'intervalle } a \rightarrow b]$, $b > a$; $f(x) \geq 0$ pour $a \leq x \leq b$) fournit la borne :

$$J_{n;2,3 \dots n} \geq i (2\pi)^4 \frac{C^n (n-2)!}{n^{3n-2}}$$

[Min. de $G_{n;2,3 \dots n}$ sur les intervalles $1 - 1/n$ à 1] (3.13)

C^n désignant $\alpha^n (4\pi e^2)^{-n}$.

Le minimum de $G_{n;2,3 \dots n}$ sur les intervalles de $1 - 1/n$ à 1 doit avoir lieu lorsque le maximum des $a_{(m-2),mm}$ est atteint. C'est donc la borne supérieure de ces dernières grandeurs qui

va nous retenir dès lors. Or, tenant compte de (3.12) et (3.12 bis),

$$\begin{aligned} a_{(m-2)m, m} &= 1 - v_{m-2} (1 - a_{(m-3)m, m}) - \\ &- (1 - v_{m-2} (1 - b_{(m-3)m, m-1})) \frac{w_{m-2} - v_{m-2} w_{m-2} (1 - b_{(m-3)m, m-1})}{1 - v_{m-2} w_{m-2} (1 - a_{(m-3)m-1, m-1})} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} \Delta_{(m-3)m-1, m} &\equiv a_{(m-3)m-1, m-1} - b_{(m-3)m-1, m} = \\ &= v_{m-3} \Delta_{(m-4)m-1, m} \\ &- \frac{v_{m-3} w_{m-3} (1 - v_{m-3} (1 - b_{(m-4)m-2, m-1}))}{1 - v_{m-3} w_{m-3} (1 - a_{(m-4)m-2, m-2})} (b_{(m-4)m-1, m-2} - b_{(m-4)m, m-2}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_{(m-3)m, m-1} &\equiv a_{(m-3)m, m} - b_{(m-3)m, m-1} = v_{m-3} \Delta_{(m-4)m, m-1} \\ &+ \frac{v_{m-3} w_{m-3} (1 - v_{m-3} (1 - b_{(m-4)m-2, m}))}{1 - v_{m-3} w_{m-3} (1 - a_{(m-4)m-2, m-2})} (b_{(m-4)m-1, m-2} - b_{(m-4)m, m-2}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$a_{(m-2)m, m}$ peut s'exprimer simplement à l'aide de ces nouvelles grandeurs. En effet :

$$\begin{aligned} a_{(m-2)m, m} &= v_{m-2} \Delta_{(m-3)m, m-1} + \frac{1 - v_{m-2} (1 - b_{(m-3)m-1, m})}{1 - v_{m-2} w_{m-2} (1 - a_{(m-3)m-1, m-1})} \\ &(1 - w_{m-2} + v_{m-2} w_{m-2} \Delta_{(m-3)m-1, m}) \leqslant \\ &\leqslant (1 - w_{m-2}) + v_{m-2} (\Delta_{(m-3)m, m-1} + \Delta_{(m-3)m-1, m}) , \end{aligned} \quad (3.17)$$

puisque $\Delta_{(m-3)m-1, m} \geqslant 0$ (Appendice I).

Puis, en invoquant (3.15) et (3.16):

$$\begin{aligned}
 a_{(m-2)m, m} &\leq (1 - \omega_{m-2}) + \varrho_{m-2} \varrho_{m-3} (\Delta_{(m-4)m-1, m} + \Delta_{(m-4)m, m-1}) \\
 &\quad - \frac{\varrho_{m-2} \varrho_{m-3}^2 \omega_{m-3} (b_{(m-4)m-1, m-2} - b_{(m-4)m, m-2})^2}{1 - \varrho_{m-3} \omega_{m-3} (1 - a_{(m-4)m-2, m-2})} \\
 &\leq (1 - \omega_{m-2}) + \varrho_{m-2} \varrho_{m-3} (\Delta_{(m-4)m, m-1} + \Delta_{(m-4)m-1, m}) \leq \dots \\
 \dots &\leq (1 - \omega_{m-2}) + \varrho_{m-2} \dots \varrho_1 (\Delta_{(0)m, m-1} + \Delta_{(0)m-1, m}) \leq (1 - \omega_{m-2}) + \\
 &\quad + x_{n-m+1} x_{n-m+2}^2 \dots x_{n-1}^2 x_n (1 - x_{n-m+1}) + \\
 &\quad + (1 - x_{n-m+2} \dots x_n) x_{n-m+2} \dots x_{n-1} \\
 (1 - x_{n-m+1}) &\leq (1 - \omega_{m-2}) + 2(1 - x_{n-m+1}) . \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

expression dont le maximum est atteint, sur le chemin $1 - 1/n$ à 1 , pour $x_{n-m+1} = 1 - 1/n$, et $\omega_{m-2} = 1 - 1/n$.

De proche en proche, les $a_{(m-2)m, m}, m = 2, \dots, n$, fixent les valeurs des x_i, ω_i , pour lesquelles le maximum des $a_{(m-2)m, m}$ est atteint, à $x_i = \omega_j = 1 - 1/n$, $i, j = 2, \dots, n$. Dans ces conditions

$$a_{(m-2)m, m} \leq \frac{2}{n} + (1 - \omega_{m-2}) = \frac{3}{n} . \tag{3.19}$$

Négligeant par la suite, dans le calcul des bornes supérieures pour les parenthèses figurant dans l'expression de $G_{n, 2 \dots n}$, tout terme en $1/n^2$ (nous ne sommes intéressés qu'à des valeurs de n pour lesquelles $n \gg 1$), (3.13) nous fournit la minorante:

$$\begin{aligned}
 J_{n, 2, 3 \dots n} &\geq i C^n \frac{(n-2)!}{n^{3n-2}} \kappa^2 \left(\frac{n}{5\kappa}\right)^{2n} \cong i \kappa^2 \left(\frac{C}{25e\kappa^2}\right)^n ; \\
 (0 < (-p^2) < \kappa^2) & \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Le calcul ci-dessus, relativement aisé du fait de la contexture particulière de l'intégrale étudiée (fig. 2), va nous servir de base pour l'étude des $(n-1)!$ intégrales obtenues par permutation

des réabsorptions. Permuter l'ordre des réabsorptions en laissant inchangé celui des émissions équivaut à permuter l'ordre de ces dernières et laisser inchangées les premières.

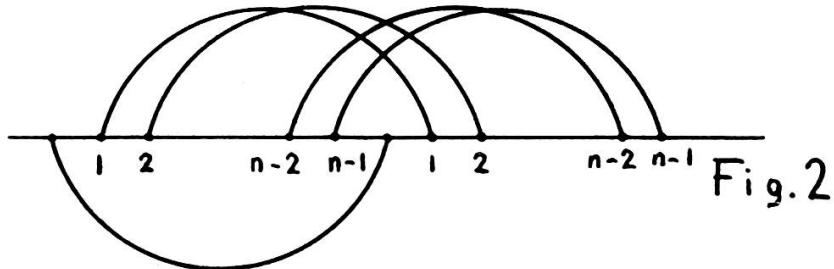


Fig. 2

Or, après avoir calculé l'effet Compton multiple représenté par la figure 1, on obtient une expression dont la dépendance des k_i est du type:

$$[\chi^2 + a_{(0)22} k_2^2 + a_{(0)33} k_3^2 + \dots + a_{(0)nn} k_n^2 + \\ + 2 b_{(0)23} (k_2 k_3) + \dots + 2 b_{(0)n-1, n} (k_{n-1} k_n)]^{-n+1}.$$

Dès lors, intervertir par exemple k_2 et k_3 dans le diagramme, figure 1, revient à opérer les échanges $a_{(0)2,2} \leftrightarrow a_{(0)3,3}$, $b_{(0)2,k} \leftrightarrow b_{(0)3,k}$, dans l'expression ci-dessus. La suite du calcul restant exactement la même (réabsorptions inchangées), les mêmes échanges sont à effectuer dans l'expression finale (3.11).

Afin de donner un exemple simple des modifications apparaissant lors de l'échange de deux indices (l et k pour fixer les idées), toute autre chose restant inchangée, $a_{(l-2)l,l}$ devient $a_{(l-2)k,k}$, $a_{(k-2)k,k}$ devient $a_{(k-2)l,l}$, $b_{(j)k,m} \leftrightarrow b_{(j)l,m}$, en spécifiant par ces notations que les $a_{(i)}$, $b_{(j)}$ restent construits exactement comme auparavant, mais que, chaque fois qu'ils apparaissent, $a_{(0)l,l}$, $a_{(0)k,k}$, $b_{(0)k,m}$, $b_{(0)l,m}$, se transforment respectivement en $a_{(0)k,k}$, $a_{(0)l,l}$, $b_{(0)l,m}$, $b_{(0)k,m}$. Ces modifications provoquent une diminution de l'intégrale correspondante qu'il s'agit de contrôler. Reprenant (3.14), en y changeant

m en $m - r$, sans modifier bien entendu l'indice $(m - 2)$, et toutes autres choses égales,

$$a_{(m-2), m-r, m-r} = 1 - v_{m-2} (1 - a_{(m-3) m-r, m-r}) - \frac{w_{m-2} (1 - v_{m-2} (1 - b_{(m-3) m-r, m-1}))^2}{1 - v_{m-2} w_{m-2} (1 - a_{(m-3) m-1, m-1})} . \quad (3.21)$$

Du fait que $a_{(m-3) m-1, m-1} > b_{(m-3) m-1, m-r}$, si $r (r < m)$ est suffisamment grand le terme fractionnaire est négligeable $\left(0 \left(\frac{a_{(m-3) m-r}}{r}\right)\right)$ devant $a_{(m-3) m-r, m-r}$. Puis:

$$a_{(m-3) m-r, m-r} \cong 1 - v_{m-3} (1 - a_{(m-4) m-r, m-r}) \quad (3.22)$$

pour la même raison, et

$$a_{(m-2) m-r, m-r} \cong 1 - v_{m-2} v_{m-3} (1 - a_{(m-4) m-r, m-r}) \quad (3.21 b)$$

jusqu'à ce que l'on ait, par exemple:

$$\begin{aligned} a_{(m-2) m-r, m-r} &\cong 1 - v_{m-2} \cdots v_{m-r-1} (1 - a_{(m-r-2) m-r, m-r}) \\ &\leq 1 - (1 - 1/n)^r + \frac{2}{n} + (1 - w_{m-r-2}) \leq \frac{r+2}{n} + (1 - w_{m-r-2}) . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le passage de m à $m - r$ des indices de $a_{(m-2) m, m}$ augmente la borne supérieure de ce dernier et diminue par conséquent la valeur de l'intégrale correspondante.

Lors d'une permutation tout à fait générale des indices des $a_{(0)}$ et $b_{(0)}$, on montre (voir Appendice II) que la plus petite intégrale offre une contribution bornée par:

$$J_{n(\min)} \geq i \propto^2 \left(\frac{\alpha}{36\pi \propto^2 e^3} \right)^n \cdot n^{-n/2} (\log n)^{-n} ; \quad (0 < (-p^2) < \propto^2) . \quad (3.24)$$

Le nombre de ces intégrales étant supérieur à $N = n^n \cdot e^{-2n}$ (Appendice II), la contribution totale J_n est minorée par:

$$J_n \geq i \propto^2 \left(\frac{\alpha}{36\pi \propto^2 e^5} \right)^n n^{n/2} (\log n)^{-n} , \quad (3.25)$$

terme général de la série:

$$\Sigma = \sum_n^{\infty} \alpha^n d_n = \sum_n^{\infty} J_n \geq i \sum_n^{\infty} \alpha^n (\text{Const.})^n \cdot n^{n/2} (\text{Log})^{-n}, \quad (3.26)$$

qui diverge quelque petite que soit la constante αC . C'est ce que nous voulions montrer.

Pour terminer, il faut remarquer que la divergence de cette série de perturbation ne met en cause que la méthode de développement en série et non l'existence éventuelle d'une solution du problème qui serait alors non analytique autour de $g = 0$. Les conséquences physiques d'un tel état de fait ont été discutées par Dyson [3], ce qui nous évite de disserter ici à leur sujet.

Nous tenons à remercier tout particulièrement MM. les professeurs L. Rosenfeld et E. C. G. Stueckelberg, le premier pour nous avoir suggéré cette étude, le second pour l'intérêt qu'il y a porté tout au long de son élaboration.

APPENDICE I

Les $a_{(j)}$ sont des nombres positifs ou nuls.

Nous le montrerons pour $J_{n;23\dots n}$ qui est du reste le cas le plus intéressant vu qu'il donne lieu, pour les $a_{(m-2)m,m}$, aux bornes supérieures les plus faibles. Par souci de concision, nous laissons au lecteur intéressé le soin de vérifier que, lors d'une permutation générale des indices des $a_{(0)}$ et $b_{(0)}$, dans chaque cas les $a_{(j)}$ restent positifs.

Utilisant les définitions (3.10) des $a_{(0)}$, $b_{(0)}$, on établit tout d'abord les cinq lemmes:

Lemme 1:

$$0 \leq a_{(0)kh} \leq 1 \quad k > l \text{ et } k < l. \\ 0 \leq b_{(0)kl} \leq 1$$

Lemme 2:

$$\Delta_{(0)kl} = a_{(0)kk} - b_{(0)kl} \geq 0, \quad k \geq l.$$

Lemme 3:

$$\Delta_{(0)pkq} = b_{(0)pk} - b_{(0)qk} \geq 0, \quad k < p < q.$$

Corollaire:

$$\Delta_{(0)qkp} = -\Delta_{(0)pkq} \leq 0.$$

Lemme 4:

$$\Delta_{(0)pq} - \Delta_{(0)pkq} \geq 0; \quad k < p < q.$$

Corollaire:

$$\Delta_{(0)qp} - \Delta_{(0)qkp} \geq 0, \text{ des lemmes 2 et 3.}$$

Lemme 5:

$$\Delta_{(0)pkq} - \Delta_{(0)p_rq} \geq 0, \quad r < k < p < q.$$

Corollaires:

a.) $\Delta_{(0)qkp} - \Delta_{(0)q_rp} \leq 0, \text{ de 3 et 5.}$

b.) $\Delta_{(0)q_rp} - \Delta_{(0)qkp} \geq 0.$

c.) $\Delta_{(0)p_rq} - \Delta_{(0)pkq} \leq 0.$

Des cinq propositions énoncées, toutes relatives à l'ordre 00 des formules de récurrence pour les $a_{(j)}$, $b_{(j)}$, on peut maintenant déduire cinq propositions équivalentes pour l'ordre 1.

Lemme I:

$$a_{(1)hk} \geq v_1 \Delta_{(0)k2} \geq 0,$$

du lemme 2;

$$a_{(1)hk} \leq 1 - v_1 (1 - a_{(0)hk}) \leq 1,$$

des lemmes 1 et 2. Egalement on a:

$$0 \leq b_{(1)kl} \leq 1, \quad k > l \text{ et } k < l.$$

Lemme II: Pour

$$k \geq l \text{ et } k, l > 2, \\ \Delta_{(1)kl} \leq \varrho_1 (\Delta_{(0)kl} - \Delta_{(0)k_2l}) \geq 0,$$

des lemmes 2, 3 et 4.

Lemme III:

$$\Delta_{(1)p_kq} \geq \varrho_1 (\Delta_{(0)p_kq} - \Delta_{(0)p_2q}) \geq 0, \quad (2 < k < p < q)$$

des lemmes 2, 3, 5.

Corollaire:

$$\Delta_{(1)q_kp} = -\Delta_{(1)p_kq} \leq 0, \quad 2 < k < p < q.$$

Lemme IV:

$$\Delta_{(1)pq} - \Delta_{(1)p_kq} \geq 0, \quad 2 < k < p < q.$$

$$\Delta_{(1)pq} - \Delta_{(1)p_kq} = \varrho_1 (\Delta_{(0)pq} - \Delta_{(0)p_kq}) - \\ - \frac{\varrho_1^2 \varpi_1 \Delta_{(0)p_2q} \Delta_{(0)p_2k}}{1 - \varrho_1 \varpi_1 (1 - a_{(0)22})} \geq 0,$$

car: $\Delta_{(0)pq} - \Delta_{(0)p_kq} \geq 0$ (lemme 4), $\Delta_{(0)p_2q} \geq 0$ (lemme 3),
 $\Delta_{(0)p_2k} \leq 0$ (corollaire lemme 3).

Corollaire:

$$\Delta_{(1)qp} - \Delta_{(1)q_kp} \geq 0 : \quad 2 < k < p < q.$$

$$\Delta_{(1)qp} - \Delta_{(1)q_kp} = \varrho_1 (\Delta_{(0)qp} - \Delta_{(0)q_kp}) + \\ + \frac{\varrho_1 \varpi_1 \Delta_{(0)q_2p}}{1 - \varrho_1 \varpi_1 (1 - a_{(0)22})} \varrho_1 (\Delta_{(0)k_2q}) \geq -\varrho_1 \Delta_{(0)q_kp} + \varrho_1 \Delta_{(0)q_2p},$$

puisque $\Delta_{(0)qp} \geq 0$ tandis que $\Delta_{(0)q_2p} \leq 0$, des lemmes 2 et 3.
D'où: $\varrho_1 (\Delta_{(0)q_2p} - \Delta_{(0)q_kp}) \geq 0$ par corollaire 2 du lemme 5.

Lemme V:

$$\Delta_{(1)p_k p} - \Delta_{(1)p_r q} \geq 0, \quad 2 < r < k < p < q .$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)p_k q} - \Delta_{(1)p_r q} &= \alpha_1 (\Delta_{(0)p_k q} - \Delta_{(0)p_r q}) - \\ &- \frac{\alpha_1^2 \omega_1 \Delta_{(0)p_2 q} \Delta_{(0)k_2 r}}{1 - \alpha_1 \omega_1 (1 - a_{(0)22})} \geq 0 , \end{aligned}$$

car: $\Delta_{(0)p_k q} - \Delta_{(0)p_r q} \geq 0$ (lemme 5), $\Delta_{(0)p_2 q} \geq 0$ (lemme 3),
 $\Delta_{(0)k_2 r} \leq 0$ (corollaire lemme 3).

Corollaires:

$$a) \quad \Delta_{(1)q_k p} - \Delta_{(1)q_r p} \leq 0 ; \quad 2 < r < k < p < q .$$

car: $\Delta_{(1)q_k p} = -\Delta_{(1)p_k q}$, etc.

$$b) \quad \Delta_{(1)q_r p} - \Delta_{(1)q_k p} \geq 0 ; \quad 2 < r < k < p < q .$$

$$c) \quad \Delta_{(1)p_r q} - \Delta_{(1)p_k q} \leq 0 ; \quad 2 < r < k < p < q .$$

Dès lors, supposant ces cinq lemmes vérifiés à l'ordre $m = 1$,
ils le seront à l'ordre m . On a ainsi établi par récurrence la
positivité de tous les $a_{(j)k,k}$, $k > j$, intervenant dans le calcul
de $J_{n;2,3 \dots n}$.

APPENDICE II

Démonstration de (3.24).

Si M indique le plus grand des deux nombres P et D , P étant
le nombre de $a_{(j)}$ à franchir au dénominateur de $G_{n;a \dots d}$ pour
trouver à gauche un $a_{(j-P)}$ dont les indices diffèrent de D de
ceux de $a_{(j)}$, on voit que la borne B d'un $a_{(j)k,k}$ sera:

$$a_{(j)k,k} \leq \frac{P + 2D}{n} + (1 - \omega) \equiv B . \quad (A.1)$$

(Pour fixer les idées, en (3.23) P serait égal à r et D à 1. (3.23)
donnerait alors $a_{(m-2)m-r, m-r} \leq \frac{r+2}{n} + (1 - \omega)$.) De plus,

pour évaluer cette borne, on doit chercher parmi tous les M obtenus en faisant successivement $P = 1, 2, \dots$, celui dont la valeur est la plus petite.

Exemple: Si figurent consécutivement au dénominateur de $G_{n;2,n,4}, \dots, a_{(0)2,2}, a_{(1),n,n}, a_{(2)4,4}$ et que c'est la borne de ce dernier qu'il s'agit d'évaluer, on fait tout d'abord $P = 1$, ce qui donne $D = n - 4$ et $M = n - 4$. Pour $P = 2$, $D = 4 - 2$ et $M = 2$. Ce sera ce dernier qui est à choisir.

Divisons maintenant les n premiers nombres entiers figuratifs des indices des $a_{(j)}$ en $n^{1/2}$ groupes de $n^{1/2}$ nombres chacun. Dans le premier de ces groupes on range les $n^{1/2}$ nombres: $n^{1/2}$, $2n^{1/2}$... n . Puis, dans le m^{me} groupe, on range les nombres $n^{1/2} - 1$, $2n^{1/2} - 1$, ... $n - 1$, dans le $2m^{\text{me}}$: $n^{1/2} - 2$, $2n^{1/2} - 2$, ... $n - 2$ et ainsi de suite. Ainsi, la m^{me} partie des nombres de 1 à n est disposée dans un ordre bien déterminé, tandis que les $n \frac{m-1}{m}$ nombres restants peuvent être permutés au hasard.

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} n^{\frac{1}{2}}, 2n^{\frac{1}{2}}, \dots n-1 & \dots & . & \dots & n^{\frac{1}{2}}-1, 2n^{\frac{1}{2}}-1, \dots n-2 & \dots \\ \text{groupe 1} & \text{gr. 2} & . & \text{gr. m-1} & \text{groupe m} & . \\ \hline \end{array} \right| \xleftarrow{\text{mn}^{\frac{1}{2}} \text{ nombres}} \xrightarrow{\quad}$$

De cette façon, on est assuré que chaque nombre permutable trouve, pour un $P \leq mn^{\frac{1}{2}}$, un nombre appartenant à un intervalle à ordre déterminé, différent de lui-même de $D \leq n^{\frac{1}{2}}$. La borne B d'un $a_{(i)}$ possédant un tel indice permutable se trouve être ainsi au plus :

$$B \leq \frac{m+2}{n} n^{1/2} + (1-\omega) \cong mn^{-1/2} + (1-\omega) \quad (\text{A.2})$$

Le nombre N d'intégrales distinctes obtenues par permutation des $n \frac{m-1}{m} a_{(j)}$ permutables sera

$$N = \left(\frac{m-1}{m} \frac{n}{e} \right)^{\frac{m-1}{m} n}.$$

Elargissant alors l'intervalle d'intégration de tous les ω_i (qui s'étendait auparavant de $1 - 1/n$ à 1) à: $1 - m/n^{1/2}$ à 1

$(mn^{1/2} \gg 1)$, et reprenant en entier l'argument utilisé lors de l'évaluation de $J_{n;23\dots n}$ (formule (3.4)), on trouve que

$$B \leq 2 m \cdot n^{-1/2} , \quad (A.3)$$

et chacune des parenthèses figurant au dénominateur de $G_{n; \min}$ sera bornée par:

$$B' \leq 3 m \cdot n^{-1/2} + O\left(\frac{1}{n}\right) . \quad (A.4)$$

En négligeant $1/n$ devant $1/n^{1/2}$, $G_{n; \min}$ sera borné inférieurement par

$$G_{n; \min} \geq n^n \cdot (3 m)^{-2n} . \quad (A.5)$$

Dans ces conditions, on peut chercher la valeur de m qui conférera le maximum à l'expression:

$$NG_{n; \min} = \left(\frac{m-1}{m} \frac{n}{e}\right)^{\frac{m-1}{m} n} \cdot n^n (3 m)^{-2n} \cong \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{m-1}{m} n} \cdot n^n (3 m)^{-2n} , \quad (A.6)$$

et qui est approximativement

$$m = \log n . \quad (A.7)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} J_{n; \min} &\geq i \propto^2 \left(\frac{\alpha}{4\pi\propto^2}\right)^n \left(\frac{n}{e^3}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \left(\frac{\log n}{n^{1/2}}\right)^n \frac{n^n}{(3 \log n)^{2n}} = \\ &= i \propto^2 \left(\frac{\alpha}{36\pi\propto^2 e^3}\right)^n \frac{n^{-n/2}}{(\log n)^n} . \end{aligned} \quad (A.8)$$

et

$$N = \left(\frac{n}{e}\right)^{(1-1/\log n)n} = n^n e^{-2n} e^{2n/\log n} > n^n e^{-2n} , \quad (A.9)$$

conduisent aux formules (3.24) et (3.25) que nous voulions montrer.

APPENDICE III

Toutes les intégrales de self-énergie apparaissant en $2n^{\text{ie}}$ approximation sont de même signe.

A cet effet, on remarque que:

- 1^o Les intégrales du genre « pattern graphs » [10] de la $2n^{\text{ie}}$ approximation sont toutes du type des $(n-1)!$ intégrales $J_{n; a, b \dots d}$ définies par (3.11). Les « pattern graphs » comprennent tous les diagrammes de self-énergie dont les lignes ne contiennent en leur intérieur aucun terme de self-énergie ni de diffusion de photons par eux-mêmes;
- 2^o Les $a_{(j)m, n}$ étant tous compris entre 0 et 1 (Appendice I), ces intégrales sont de même signe pour $(-p^2) < x^2$ (démonstrations analogues à celle de (3.11));
- 3^o L'insertion de self-énergies ou de termes plus complexes (diffusion de photons par eux-mêmes) d'ordre k dans une ligne ou plusieurs lignes quelconques d'une self-énergie d'ordre $2n - k$ ne change ni la réalité ni le signe de l'intégrale d'ordre n ainsi obtenue par rapport aux autres intégrales de même ordre.

Ainsi, toutes les intégrales de self-énergie négligées dans notre discussion ont même signe que celles de la classe particulière envisagée dans nos calculs.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. FERRETTI, *Nuovo Cimento*, 8, 108 (1951).
2. R. JOST and A. PAIS, *Phys. Rev.*, 82, 840 (1951).
3. F. J. DYSON, *Phys. Rev.*, 85, 631 (1952).
4. Y. KATAYAMA and K. YAMAZAKI, *Progr. Theor. Phys.*, 7, 601 (1952).
5. C. A. HURST, *Proc. Roy. Soc.*, A, 214, 44 (1952).
6. J. SCHWINGER, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 37, 452, 455 (1951).
7. F. J. DYSON, *Phys. Rev.*, 75, 1736 (1949).
8. R. P. FEYNMAN, *Phys. Rev.*, 76, 769 (1949).
9. Z. KOBA, *Progr. Theor. Phys.*, 5, 696 (1950).
10. A. PETERMANN, *Phys. Rev.*, 89 (1953), March 1.

