Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 5 (1952)
Heft: 1

Artikel: Indéformabilité d'un corps à potentiel polyharmonique constant
Autor: Soudan, Robert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739503

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INDÉFORMABILITÉ D'UN CORPS A POTENTIEL POLYHARMONIQUE CONSTANT

PAR

Robert SOUDAN

(Avec 3 fig.)

---

§ 1. — Énoncé du théorème.

Soit un corps homogène V. Il engendre hors de sa frontière S le potentiel polyharmonique U (P):

$$U(P) = \delta \int_V \varphi_n(M, P)\, d\tau_M \ . \qquad (1)$$

On a posé:

$$\varphi_n(M, P) = \sum_{\alpha=-1}^{2n-2} C_\alpha \overline{MP}^\alpha \ .$$

Les constantes C_α sont arbitraires, éventuellement nulles.

On peut supposer sans restriction C_{2n-2} et C_{2n-3} non nulles simultanément.

Toutefois nous supposons:

a) $n > 1$ sinon (1) serait l'expression du potentiel newtonien ordinaire;

b) Au moins une constante C_α est différente de zéro pour α impair.

Dans ces conditions, il est impossible de déformer la frontière S du corps de manière continue et de façon à obtenir une

suite analytique de surfaces composées chacune d'un nombre fini de surfaces analytiques sans que U (P) ne change hors des masses.

Nous ferons la démonstration de ce théorème en raisonnant par l'absurde.

§ 2. — Invariance de la masse.

Soit S′ une déformation de S à potentiel constant et δ′ la densité correspondante.

On sait que:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\overline{MP}}{R} = 1 .$$

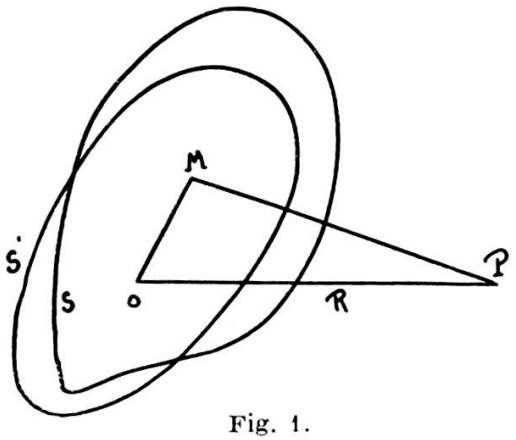

Fig. 1.

Donc, si N est la plus grande valeur de l'indice des C_α non nulles:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{v_n}{R^N} = C_N .$$

D'autre part, la condition d'invariance du potentiel s'écrit:

$$\delta \int_V v_n \, d\tau = \delta' \int_{V'} v_n \, d\tau .$$

Il s'ensuit:

$$\lim_{R\to\infty} \delta \int_V \frac{v_n}{R^N} \, d\tau = \lim_{R\to\infty} \delta' \int_{V'} \frac{v_n}{R^N} \, d\tau .$$

D'où:

$$C_N \delta \int_V d\tau = C_N \delta' \int_{V'} d\tau$$

et finalement:

$$M = M' .$$

Ainsi la masse doit être conservée pendant la déformation.

§ 3. — Condition nécessaire.

Soit ΔU le potentiel de masses de densité $\pm \delta'$ comprises entre S et S' et ΔV le volume de la couche sommé algébriquement:

$$\Delta V = V' - V .$$

La condition d'invariance du potentiel s'écrit:

$$\int_V \delta \varphi_n d\tau = \int_{V'} \delta' \varphi_n d\tau = \int_V \delta' \varphi_n d\tau + \int_{\Delta V} \delta' \varphi_n d\tau .$$

Par suite:

$$\Delta U = \int_{\Delta V} \delta' \varphi_n d\tau = (\delta - \delta') \int_V \varphi_n d\tau = \frac{\delta - \delta'}{\delta} U .$$

Le potentiel de la couche doit être égal, à un facteur près, au potentiel primitif.

En vertu de l'invariance de la masse:

$$\frac{\delta - \delta'}{\delta} = 1 - \frac{\delta'}{\delta} = 1 - \frac{V}{V'} = \frac{\Delta V}{V'} .$$

Finalement:

$$\Delta U(P) = \frac{\Delta V}{V'} U(P) . \qquad (2)$$

Il faut remarquer que ΔV peut être positif, négatif ou nul.

Soit maintenant $\Delta \xi$ l'épaisseur de la couche et Δx sa borne supérieure. Déplaçons normalement les masses de la couche de façon à les amener toutes sur S. Le potentiel de la couche

deviendra un potentiel polyharmonique engendré par une densité superficielle. Nous l'écrirons $\Delta_s U$.

Chaque masse ayant été déplacée au plus de Δx, on aura, en vertu du théorème de la moyenne (Θ étant une fonction comprise entre -1 et $+1$):

$$|\Delta_s U - \Delta U| = \left| \int_s \delta' v(\overline{MP})\, \Delta\xi\, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \int_s \delta' v(\overline{MP} + \Theta\Delta\xi)\, \Delta\xi\, d\sigma \right|$$

$$\leqslant \int_s |\delta'|\, |\Delta\xi|\, \left| v(\overline{MP}) - v(\overline{MP} + \Theta\Delta\xi) \right| d\sigma \ .$$

Puis, en majorant $\Delta\xi$ et Θ:

$$|\Delta_s U - \Delta U| \leqslant |\delta'|\, \Delta x \int_s |v(\overline{MP}) - v(\overline{MP} \pm \Delta x)|\, d\sigma \ .$$

On choisira le signe de la façon la plus désavantageuse.

Il est aisé de voir que:

$$\left| v(\overline{MP}) - v(\overline{MP} \pm \Delta x) \right| \leqslant A\, \Delta x \ ,$$

A étant un nombre donné, suffisamment grand et à la condition de se trouver à une distance d des masses telle que:

$$B \geqslant d > a > \Delta x > 0 \ .$$

a et B sont deux constantes. Il faut remarquer que B est aussi grand que l'on veut, mais A croît avec B.

Nous obtenons finalement:

$$|\Delta_s U - \Delta U| \leqslant A\, |\delta'|\, S\, \Delta x^2 = A^*\, \Delta x^2 \ . \qquad (3)$$

Le potentiel de la couche n'a varié qu'au second ordre par rapport à l'épaisseur de celle-ci. Ce résultat est intuitif: on a déplacé selon des distances du premier ordre, des masses du premier ordre.

(3) s'écrit, en tenant compte de (2):

$$\left| \Delta_s U - \frac{\Delta V}{V'} U \right| \leqslant A^*\, \Delta x^2 \ .$$

D'autre part, la densité superficielle $\Delta\omega$ engendrant $\Delta_s U$ a pour expression:

$$\Delta\omega = \frac{dm}{d\sigma} = \frac{\delta' \, d\sigma \, \Delta\xi}{d\sigma} = \delta' \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \Delta x = \omega \, \Delta x \; . \qquad (4)$$

Remarquons que la fonction ω ne peut être identiquement nulle ni supérieure à δ'. C'est en effet une fonction analytique égale à δ' là oú $\Delta\xi = \Delta x$. Cette propriété subsiste à la limite oú $\Delta x \longrightarrow 0$ en vertu des hypothèses faites au § 1 sur les surfaces S'.

En tenant compte de (4), nous obtenons:

$$\left| \Delta x \int_S \omega(M) \, \varphi(\overline{MP}) \, d\sigma - \frac{\Delta V}{V'} \int_V \delta \, \varphi(\overline{MP}) \, d\tau \right| \leqslant A^* \, \Delta x^2 \; .$$

Divisons membre à membre par Δx puis passons à la limite oú $\Delta x \longrightarrow 0$. Nous obtenons la condition nécessaire:

$$\int_S \omega(M) \, \varphi(\overline{MP}) \, d\sigma = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x \, V'} \right) \delta \int_V \varphi(\overline{MP}) \, d\tau \; .$$

La limite du second membre existe en vertu de l'analyticité de la déformation.

Elle peut, à priori, être nulle.

Elle ne peut être supérieure, en valeur absolue, à S/V car:

$$\left| \frac{\Delta V}{\Delta x \, V'} \right| = \left| \frac{\int_{\Delta V} d\tau}{V' \, \Delta x} \right| \leqslant \frac{\int_{\Delta V} |d\tau|}{V' \, \Delta x} \leqslant \frac{\int_S \Delta x \, d\sigma}{V' \, \Delta x} = \frac{S}{V'} \; .$$

Dans tous les cas nous arrivons à la condition nécessaire:

$$\int_S \omega(M) \, \varphi_n(\overline{MP}) \, d\sigma_M = C \int_V \varphi_n(\overline{MP}) \, d\tau_M \qquad (I)$$

pour tout point P à distance $B \geqslant d > a > 0$ des masses. Or B peut être aussi grand que l'on veut. (I) est donc vrai pour toute distance d des masses telle que:

$$d > a > 0$$

a est un nombre choisi aussi petit que l'on veut.

Il convient de remarquer que (I) exprime qu'il doit exister (si $C \neq 0$) une densité superficielle de matière engendrant le même potentiel polyharmonique, hors des masses, que le corps homogène envisagé.

Montrons maintenant que $C \neq 0$, c'est-à-dire qu'une déformation à potentiel constant ne saurait se faire aussi à volume constant. Cette propriété est vraie également pour le potentiel newtonien ordinaire; cela résulte du fait que nous n'avons pas encore fait usage, et nous n'en ferons pas usage dans ce paragraphe, de la restriction *a*) du premier paragraphe.

Si $C = 0$, nous aurions:

$$\int_S \omega(M)\, v_n(\overline{MP})\, d\sigma \equiv 0 \tag{5}$$

pour P hors de S.

Soit $\alpha = 2l - 1$ la valeur impaire la plus élevée de l'indice des constantes C_α non nulles. (Il y en a au moins une en vertu des hypothèques faites au § 1.) Faisons opérer l fois le laplacien sur les deux membres de (5). On trouve aisément:

$$C^*_{2l-1} \int_S \frac{\omega\, d\sigma}{\overline{MP}} + \sum_{k=l}^{n-1} C^*_{2k} \int_S \omega\, \overline{MP}^{2k-2l}\, d\sigma \equiv 0 \tag{6}$$

avec:

$$C^*_\alpha = \frac{(\alpha + 1)!\, C_\alpha}{(\alpha - 2l + 1)!}\,.$$

Le deuxième terme représente un polynôme $\mathfrak{P}$ de degré $2n - 2l - 2$ en les variables cartésiennes x, y, z, repérant le point potentié P. Soit m la puissance la plus élevée de x dans ce polynôme. Divisons (6) par x^m et faisons croître x en gardant constantes y et z. (6) se réduit à un polynôme en y, z et à des termes dont on peut rendre la somme inférieure à ε choisi arbitrairement petit pourvu que x soit assez grand. Par suite ce polynôme (primitivement facteur de x^m) est nul pour toutes valeurs de y, z, donc identiquement nul. De proche en proche on voit que tous les termes de $\mathfrak{P}$ sont nuls. Par conséquent (6) se réduit à:

$$\int_S \frac{\omega\, d\sigma}{\overline{MP}} \equiv 0\,.$$

On démontre en théorie du potentiel newtonien que la dernière relation ne peut être satisfaite que pour ω identiquement nulle. Cette dernière conclusion est absurde, ω devant être analytique et égale à δ' en un point de S. Par suite $C \neq 0$ dans (I) et peut être incorporé à ω.

§ 4. — Balayage au moyen des fonctions de Green.

Cherchons d'une manière générale à remplacer la densité spatiale δ par une densité superficielle engendrant hors de $V + S$ le même potentiel.

Portons dans la formule de Gutzmer qui généralise l'identité de Green:

$$\int_D (A\,\Delta_n B - B\,\Delta_n A)\,d\tau = -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathcal{F}} \left(\Delta_k A \frac{d}{dn} \Delta_{n-k-1} B - \Delta_{n-k-1} B \frac{d}{dn} \Delta_k A \right) d\sigma$$

$$A = v_n(B\,,\,P) \qquad \text{donc} \qquad \Delta_n A = 0 \qquad \text{dans } V\,,$$

$$B = \mathcal{G}_n(B\,,\,M)\ .$$

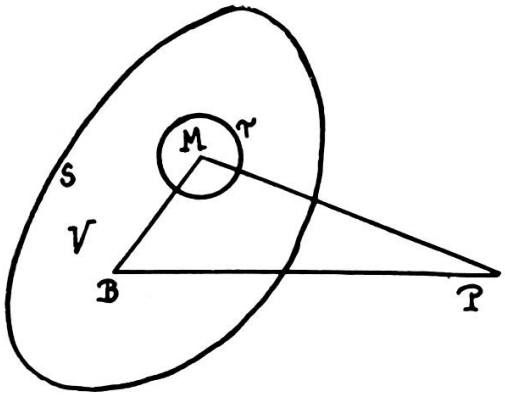

Fig. 2 [1].

[1] Dans la figure lire σ au lieu de τ.

$\mathcal{G}_n$ est la fonction de Green de seconde espèce [1] pour l'intérieur de S. Elle est nulle sur S, continue dans V, même pour B = M (si $n > 1$) et symétrique [2] en B et M. Enfin:

$$\Delta_m \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n-m} \; ;$$

— $\mathcal{G}_1$ est la fonction de Green ordinaire.

Intégrons dans V — σ, σ étant une petite sphère centrée sur M. Il vient, en tenant compte des propriétés de $\mathcal{G}_k$ et en faisant tendre σ vers 0:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_S \Delta_k v_n(\mathrm{B}, \mathrm{P}) \frac{d}{dn} \mathcal{G}_{k+1}(\mathrm{B}, \mathrm{M})\, d\sigma_\mathrm{B} = 0 -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k v_n(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \lim_{\sigma \to 0} \int_\sigma \frac{d}{dn} \mathcal{G}_{k+1}(\mathrm{B}, \mathrm{M})\, d\sigma_\mathrm{B} \; . \qquad (7)$$

Montrons que seul le terme $k = 0$ du second membre n'est pas nul. Tenons compte de l'expression [1] définissant $\mathcal{G}_k$ par récurrence, du fait que $\mathcal{G}_k$ est continue pour B = M si $k \geqslant 2$ et symétrique en B et M. Alors:

$$\frac{d}{dn} \mathcal{G}_{k+1}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dn} \int_\mathrm{V} \mathcal{G}_k(\mathrm{B}, \mathrm{Q})\, \mathcal{G}_1(\mathrm{M}, \mathrm{Q})\, d\tau_\mathrm{Q} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_\mathrm{V} \mathcal{G}_k(\mathrm{B}, \mathrm{Q}) \frac{d}{dn} \mathcal{G}_1(\mathrm{M}, \mathrm{Q})\, d\tau_\mathrm{Q}$$

ou encore:

$$\left| \frac{d}{dn} \mathcal{G}_{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_\mathrm{V} \mathrm{A} \left| \frac{d}{dn} \mathcal{G}_1 \right| d\tau \leqslant \mathrm{B}$$

pour $k \geqslant 2$. A est la borne supérieure de $\mathcal{G}_k$ (qui existe puisque $k \geqslant 2$). B est une constante choisie convenablement.

Par suite de la dernière relation les termes du second membre de (7) sont tous nuls pour $k \geqslant 2$.

[1] Voir par exemple: *Actualités scientifiques et industrielles*, 331; Miron Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques*, p. 29.

[2] Pour la symétrie, généraliser au moyen de la formule de Gutzmer la démonstration décrite dans *Mémorial Sc. Math.* 1926, fasc. XI, Bouligand, p. 12.

Envisageons maintenant le terme $k = 1$: Il faut étudier le comportement de:

$$\frac{d}{dn}\mathcal{G}_2(\mathrm{B}, \mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dn}\int_V \mathcal{G}_1(\mathrm{B}, \mathrm{Q})\,\mathcal{G}_1(\mathrm{M}, \mathrm{Q})\,d\tau \quad \text{pour } \mathrm{B} \to \mathrm{M}.$$

Le second membre de l'expression ci-dessus se comporte comme:

$$\int_V \frac{1}{\overline{\mathrm{BQ}}}\,\frac{1}{\overline{\mathrm{MQ}}^2}\,d\tau\ .$$

Pour étudier cette expression lorsque $\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{M}$, centrons sur B et M deux sphères σ et σ' de rayon $\overline{\mathrm{MB}}/2$, sur M une sphère σ'' de rayon $a = 2\,\overline{\mathrm{MB}}$, puis une quatrième, σ''', de rayon fixe b. Divisons le domaine d'intégration en cinq domaines: σ, σ', $\sigma'' - \sigma' - \sigma$, $\sigma''' - \sigma''$, $V - \sigma'''$. Il vient successivement:

$$\int_\sigma \frac{d\tau}{\overline{\mathrm{BQ}}\,\overline{\mathrm{MQ}}^2} \leqslant \frac{4}{\overline{\mathrm{MB}}^2}\int_\sigma \frac{d\tau}{\overline{\mathrm{BQ}}} = 2\pi\ ,$$

$$\int_{\sigma'} \frac{d\tau}{\overline{\mathrm{BQ}}\,\overline{\mathrm{MQ}}^2} \leqslant \frac{2}{\overline{\mathrm{MB}}}\int_\sigma \frac{d\tau}{\overline{\mathrm{MQ}}^2} = 4\pi\ ,$$

$$\int_{\sigma''-\sigma'-\sigma} \frac{d\tau}{\overline{\mathrm{BQ}}\,\overline{\mathrm{MQ}}^2} \leqslant \frac{8}{\overline{\mathrm{MB}}^3}\int_{\sigma''} d\tau = \frac{256\pi}{3}\ ,$$

$$\mathcal{J} = \int_{\sigma'''-\sigma''} \frac{d\tau}{\overline{\mathrm{BQ}}\,\overline{\mathrm{MQ}}^2} = \int_{\sigma'''-\sigma''} \frac{1}{\overline{\mathrm{MQ}}^3}\sum_0^\infty \left(\frac{\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{MQ}}}\right)^n \mathrm{P}_n(z)\,d\tau$$

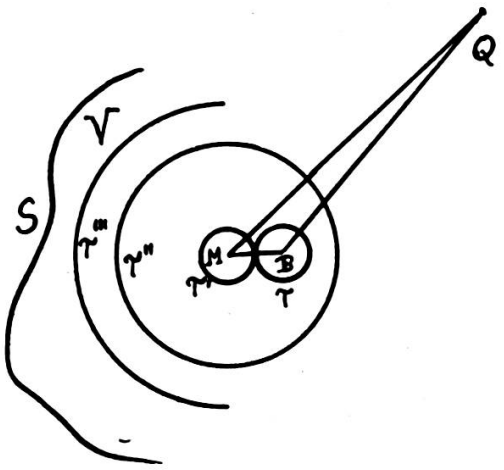

Fig. 3 [1].

[1] Dans la figure lire σ au lieu de τ.

La série du développement classique de l'inverse de la distance au moyen des polynômes de Legendre est absolument et uniformément convergente dans le domaine d'intégration puisque $\overline{MQ} \geqslant 2\overline{MB}$. Par conséquent:

$$\mathcal{J} \leqslant \int_{\sigma'''-\sigma'} \frac{1}{\overline{MQ}^3} \sum_0^\infty \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MQ}}\right)^n d\tau =$$

$$= \sum_0^\infty \overline{MB}^n \int_{2\overline{MB}}^b 4\pi\rho^{-n-1}\, d\rho \leqslant 8\pi + 4\pi \mathrm{L} \frac{b}{2\overline{MB}} .$$

D'autre part:

$$\int_{V-\sigma'''} \frac{d\tau}{\overline{BQ}\,\overline{MQ}^2} \leqslant \int_{V-\sigma'''} \frac{d\tau}{b^3} < \frac{V}{b^3} .$$

Par suite des calculs précédents $\frac{d}{dn}\mathcal{G}_2$ tend vers ∞ si $B \longrightarrow M$ comme $\mathrm{L}\,\overline{MB}$. Il en résulte que le terme du second membre de (7) pour lequel $k = 1$ est nul.
Le second membre de (7) s'écrit finalement:

$$+ v_n(M, P) \lim_{\sigma \to 0} \int_\sigma \frac{d}{dn} \frac{1}{\overline{BM}}\, d\sigma = -4\pi\, v_n(M, P)$$

et la formule (7) devient:

$$v_n(M, P) = \frac{-1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \Delta_k v_n(B, P) \frac{d}{dn} \mathcal{G}_{k+1}(B, M)\, d\sigma_B . \quad (8)$$

(8) exprime que l'on peut remplacer une masse unité située dans V en M par une suite de densités superficielles $\frac{-1}{4\pi}\frac{d}{dn}\mathcal{G}_{k+1}$ engendrant hors de S le même potentiel. On peut donc écrire:

$$U(P) = \int_V \delta(M)\, v_n(M, P)\, d\tau_M = \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \omega_k(B)\, \Delta_k v_n(B, P)\, d\sigma_B \quad (II)$$

avec:

$$\omega_k(B) = \frac{-1}{4\pi} \int_V \delta(M) \frac{d}{dn_B} \mathcal{G}_{k+1}(M, B)\, d\tau_M . \quad (III)$$

Les intégrales ci-dessus ont un sens en vertu de ce que nous avons dit de $\frac{d}{dn}\mathcal{G}_k$.

Les formules (II) et (III) généralisent le problème du balayage de Poincaré qui consiste à remplacer une densité spatiale par une densité superficielle engendrant le même potentiel newtonien hors du corps.

§ 5. — Indéformabilité a potentiel constant.

La condition nécessaire (I) s'écrit, en tenant compte de (II):

$$\int_S \omega(M)\, v_n(M, P)\, d\sigma_M = \sum_0^{n-1} \int_S \omega_k(M)\, \Delta_k v_n(M, P)\, d\sigma_M \,. \quad (9)$$

Faisons opérer l fois le laplacien sur les deux membres de (9) en nous rappelant que $2l - 1$ est la valeur impaire la plus élevée de l'indice des constantes C_α non nulles. On trouve aisément:

$$C^*_{2l-1} \int_S \frac{\omega\, d\sigma}{\overline{MP}} - C^*_{2l-1} \int_S \frac{\omega_0\, d\sigma}{\overline{MP}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+l}^{n-1} \frac{(2i+1)!\, C_{2i}}{(2i+1-2k-2l)!} \int_S \omega_k\, \overline{MP}^{2(i-k-l)}\, d\sigma -$$

$$- \sum_{i=l}^{n-1} C^*_{2i} \int_S \omega\, \overline{MP}^{2(i-l)}\, d\sigma \,. \quad (10)$$

Le second membre ne contient que des puissances paires de $\overline{MP}$. C'est donc un polynôme (de degré $2n - 2l - 2$) en les variables cartésiennes repérant le point P. En raisonnant comme au § 3 on voit que ce polynôme doit être identiquement nul. Donc (10) devient:

$$\int_S \frac{\omega - \omega_0}{\overline{MP}}\, d\sigma = 0 \,, \qquad \text{ce qui implique} \qquad \omega \equiv \omega_0$$

et la condition nécessaire (9) devient:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_S \omega_k(M)\, \Delta_k\, \varphi_n(M, P)\, d\sigma_M = 0 \,. \qquad \text{(IV)}$$

Deux cas peuvent se présenter:

a) $2l - 1 \neq -1$, alors $l \geqslant 1$.

Faisons opérer $l - 1$ fois le laplacien sur les deux membres de (IV). Il vient:

$$C^*_{2l-1} \int_S \frac{\omega_1(M)\, d\sigma}{\overline{MP}} = -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+l-1}^{n-1} \frac{(2i+1)!\, C_{2i}}{(2i+3-2k-2l)!} \int_S \omega_k\, \overline{MP}^{2(i+1-k-l)}\, d\sigma \,.$$

Le second membre de cette expression est un polynôme de degré $2n - 2l - 2$. Comme précédemment on voit qu'il doit être identiquement nul. Par suite (IV) implique:

$$\omega_1(M) \equiv 0 \,.$$

Nous en déduisons une condition nécessaire:

$$\int_S \omega_1\, d\sigma = 0 \,. \qquad \text{(V)}$$

b) $2l - 1 = -1$.

Il ne subsiste plus de puissance impaire de $\overline{MP}$ dans (IV). La plus grande puissance paire de $\overline{MP}$ est $2n - 2$. Faisons opérer $n - 2$ fois le laplacien sur les deux membres de (IV). Tous les termes pour lesquels $k > 1$ s'annulent et il vient:

$$\int_S \omega_1\, \Delta_{n-1}\, \varphi_n\, d\sigma = (2n-1)!\, C_{2n-2} \int_S \omega_1\, d\sigma = 0 \,.$$

Dans les deux éventualités nous arrivons à la condition nécessaire (V). Le théorème sera démontré si elle est absurde. C'est ce que nous allons montrer.

(V) s'écrit, en tenant compte de (III):

$$\frac{-1}{4\pi} \int_S \int_V \frac{d}{dn_B} \mathcal{G}_2(M.\ B)\, d\sigma_B\, d\tau_M = 0 \ .$$

Par suite de notre étude de $\frac{d}{dn} \mathcal{G}_2$ nous pouvons permuter l'ordre des sommations et écrire la condition nécessaire sous la forme:

$$\int_V d\tau_M \int_S \frac{d}{dn_B} \mathcal{G}_2(M,\ B)\, d\sigma_B = 0 \ . \qquad \text{(VI)}$$

Posons dans l'identité de Green:

$$\int_D (A\Delta B - B\Delta A)\, d\tau = -\int_{\mathfrak{F}} \left(A \frac{d}{dn} B - B \frac{d}{dn} A\right) d\sigma$$

$$A = 1 \ ,$$

$$B = \mathcal{G}_2$$

et intégrons dans le domaine V — σ, σ étant une petite sphère centrée sur M. Il vient, en faisant tendre σ vers 0:

$$\int_V \Delta_B \mathcal{G}_2(M,\ B)\, d\tau_B = -$$

$$- \int_S \frac{d}{dn_B} \mathcal{G}_2(M,\ B)\, d\sigma_B - \lim_{\tau \to 0} \int_\sigma \frac{d}{dn} \mathcal{G}_2\, d\sigma \ .$$

Nous avons vu précédemment que le dernier terme était nul. En tenant compte de cette dernière relation, (VI) devient:

$$\int_V d\tau_M \int_V \Delta_B \mathcal{G}_2(M,\ B)\, d\tau_B = 0$$

ou:

$$\int_V \int_V \mathcal{G}_1(M, B)\, d\tau_M\, d\tau_B = 0 .$$

Cette dernière condition nécessaire est absurde car $-\mathcal{G}_1$ reste positive dans V. L'indéformabilité annoncée au début en résulte.

La démonstration précédente subsiste dans l'espace à m dimensions. Pour m pair, on lève facilement quelques petites difficultés supplémentaires.