Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 2 (1949)

Artikel: Le théorème d'adiabatie dans le formalisme canonique homogène

Autor: Werfell, Arnold / Mercier, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739780

D'autre part, l'état physiologique des plantes d'expériences et la période de l'année au cours de laquelle les expériences sont effectuées jouent un rôle déterminant.

L'acide nicotinique et la nicotinamide interviennent certainement comme précurseurs de la codéhydrase I. L'action de cette dernière peut certainement être mise en relation avec sa fonction de transporteur d'hydrogène. Le mécanisme de l'action reste à élucider.

Ces recherches ont été effectuées avec l'aide de la « Fritz-Hoffmann Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Arbeitsgemeinschaften in der Schweiz », à laquelle nous exprimons notre reconnaissance.

Université de Berne.
Institut et Jardin botaniques.

Arnold Werfeli et **André Mercier**. — *Le théorème d'adiabatie dans le formalisme canonique homogène.*

1. Des travaux précédents [1] ayant fait emploi du formalisme canonique homogène, et d'autres [2] ayant insisté sur une nécessité d'ordre statistique dans l'obtention du procédé canonique de quantification, il importe de savoir si le formalisme homogène est compatible avec l'expression du théorème d'adiabatie qui, de la mécanique, ouvre le passage autant vers la théorie quantique que vers la thermodynamique.

2. *Transformations canoniques homogènes* [3]. — Ayant conjugué à la $(f+1)^{\text{ième}}$ coordonnée q_{f+1} ($\equiv t$, temps) un moment

[1] A. Mercier et E. Keberle, *Arch. des Sciences*, *2*, 186, 1949.
A. Mercier, *Arch. des Sciences*, *2*, 403, 1949.

[2] E. Keberle, *Helv. Phys. Acta*, *22*, *627*, 1949.
A. Mercier, pour paraître dans les Proc. Amsterdam Academy.

[3] Les éléments de départ du calcul se trouvent par exemple dans les articles de Nordheim et Fues, *Handbuch der Physik*, herausg. v. Geiger & Scheel, V, Berlin, 1927.

p_{f+1}, on a des équations canoniques homogènes

$$\left\{\begin{aligned} q'_\alpha &= \lambda[q_\alpha, \mathfrak{H}] = \lambda\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\alpha} \\ p'_\alpha &= \lambda[p_\alpha, \mathfrak{H}] = -\lambda\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$\left(\lambda = q'_{f+1} = \dfrac{dt}{ds}\right.$, s = variable indépendante.

$[q_\alpha, \mathfrak{H}]$: parenthèse homogène de Poisson)

en vertu d'une condition

$$\int \sum_1^{f+1} p_\alpha q'_\alpha \, ds = \text{extremum}$$

avec la condition accessoire

$$\mathfrak{H}(p, q) = \mathrm{H}(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t) + p_{f+1} = 0$$

où $q = [q_\alpha]$ désigne l'ensemble des q_α. Lors d'une transformation canonique homogène, la forme différentielle

$$\sum_1^{f+1} p_\alpha \, \delta q_\alpha \quad (\text{avec } \mathfrak{H} = \mathrm{H} + p_{f+1} = 0)$$

se transforme en

$$\sum_1^{f+1} \mathrm{P}_\alpha \, \delta \mathrm{Q}_\alpha + \delta\Phi \quad (\text{avec } \overline{\mathfrak{H}} = \overline{\mathrm{H}} + \mathrm{P}_{f+1} = 0) .$$

Pour un système multipériodique en s, on peut passer à des coordonnées angulaires ω_α et variables d'action J_α. Pour cela, on cherche une intégrale $\mathrm{S}(q, \omega)$ de l'équation d'Hamilton homogène

$$\mathfrak{H}\left(\left[\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_\alpha}\right], q\right) = \overline{\mathfrak{H}}(\mathrm{J}) , \quad \text{avec} \quad \mathrm{J}_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha = \oint \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha .$$

S est de ce fait aussi la fonction de transformation grâce à laquelle on passe, au moyen de

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_\alpha}, \qquad \mathrm{J}_\alpha = -\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \omega_\alpha},$$

des équations (1) aux équations

$$\left\{\begin{aligned} \omega'_\alpha &= \overline{\lambda}[\omega_\alpha, \overline{\mathfrak{H}}] = \overline{\lambda}\frac{\partial \overline{\mathfrak{H}}}{\partial J_\alpha} = q'_{f+1}\nu_\alpha \quad (\nu_\alpha = \text{const.}) \\ J'_\alpha &= -\overline{\lambda}[J_\alpha, \overline{\mathfrak{H}}] = 0 \,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'ailleurs, en calculant ω'_α et J'_α à partir de $\omega_\alpha = \omega_\alpha(q, p)$ et de $J_\alpha = J_\alpha(q, p)$ et tenant compte du fait que les parenthèses de Poisson sont des invariants des transformations canoniques, on vérifie que $\overline{\lambda} = \lambda$. On s'en assure aussi en remarquant que

$$\overline{\lambda} = \frac{d\,\omega_{f+1}}{ds} = \lambda\nu_{f+1} = \lambda \,.$$

car la période en t ($= q_{f+1}$) est la même que celle en s (correspondance biunivoque de s et de t).

On a alors, en intégrant (2),

$$\omega_\alpha = q_{f+1}\nu_\alpha + \delta_\alpha = t\nu_\alpha + \delta_\alpha \,,$$
$$J_\alpha = \text{const.}$$

3. *Invariance adiabatique* [1]. — Soit un système mécanique soumis à une perturbation représentée par le paramètre extérieur $a = a(t) = a(t[s]) = a(s)$. Une modification adiabatique ne doit avoir aucune relation avec les périodes du système non perturbé; elle doit être assez lente pour qu'au cours d'un laps de temps $t_2 - t_1$ fini bien qu'arbitrairement grand, $\dot{a}(t_2 - t_1)$ reste fini. Le système étant multipériodique dans un certain domaine de variation de a, mais à a constant, on peut employer les variables d'action. $\mathfrak{H}$ est alors une fonction:

$$\mathfrak{H}\left(\left[\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right], q, a\right),$$

la fonction de transformation: $S^* = S(q, \omega, a)$, et la transformation fournit un $\overline{\mathfrak{H}} = \overline{\mathfrak{H}}^*$ valant

$$\overline{\mathfrak{H}}^* = \overline{\mathfrak{H}}(J, a) = \overline{\mathfrak{H}}(J) + \frac{\partial S^*}{\partial s} = \overline{\mathfrak{H}} + \frac{\partial S^*}{\partial a}a'$$

[1] Nous nous inspirons de la démonstration reproduite dans l'ouvrage de M. Born, *Vorlesungen uber Atommechanik*, Berlin, 1925, § 10.

(car $\frac{\partial S^*}{\partial s}$ n'a lieu que par l'intermédiaire de $a(s)$). Les nouvelles équations canoniques s'écrivent

$$\omega'_\alpha = \bar{\lambda}\frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}^*}{\partial J_\alpha} = \bar{\lambda}\left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}}{\partial J_\alpha} + \frac{\partial}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S^*}{\partial a}a'\right],$$

$$J'_\alpha = -\bar{\lambda}\frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}^*}{\partial \omega_\alpha} = -\bar{\lambda}\left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}}{\partial \omega_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}\frac{\partial S^*}{\partial a}a'\right] = -\bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}\left(\frac{\partial S^*}{\partial a}\right)a'.$$

La modification subie par J_α dans l'intervalle $t_2 - t_1$ vaut

$$J_\alpha^{(2)} - J_\alpha^{(1)} = -\int_{s_1}^{s_2}\bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}\left(\frac{\partial S^*}{\partial a}\right)a'ds.$$

Or du fait que la modification adiabatique est « lente » (en t, donc en s) et indépendante des périodes, on peut faire passer a' devant l'intégrale, et du fait que $\bar{\lambda} = \lambda$, il vient

$$J_\alpha^{(2)} - J_\alpha^{(1)} = -a'\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}\left(\frac{\partial S^*}{\partial a}\right)\frac{dt}{ds}ds = -a'\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}\left(\frac{\partial S^*}{\partial a}\right)dt.$$

Puis, S* étant multipériodique, $\frac{\partial S^*}{\partial a}$ l'est aussi; l'intégrand est alors une série de Fourier, et l'estimation de l'intégrale, qui se fait par un procédé connu, fournit

$$J_\alpha^{(2)} - J_\alpha^{(1)} \simeq a'\dot{a}\,(t_2 - t_1) = \lambda\,\dot{a}^2\,(t_2 - t_1),$$

qui tend vers zéro pour toute valeur non divergente de λ et pour tout intervalle $(t_2 - t_1)$ fini.

Donc les J_α du formalisme homogène sont des invariants adiabatiques.

Université de Berne,
Séminaire de Physique théorique.