

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 1 (1948)
Heft: 1

Artikel: Quelques observations et expériences nouvelles : et leurs conséquences pour les théories de la physique
Autor: Prunier, F.
Kapitel: 3: Revision des théories fondamentales de la physique contemporaine : discussion et conclusions
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739256>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

*TROISIÈME PARTIE*REVISION DES THÉORIES FONDAMENTALES
DE LA PHYSIQUE CONTEMPORAINE
DISCUSSIONS ET CONCLUSIONS*Chapitre VII.*

INTERPRÉTATION DE LA DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ.

I. — *Essai d'une dynamique newtonienne des champs de forces naturels.* Il est presque évident que dans tout champ de forces qui agit par actions de milieu, l'action du champ sur un point matériel ne doit pas être la même suivant que ce point matériel est au repos en un point du champ ou, au contraire, qu'il se trouve passer en ce point avec une certaine vitesse dirigée suivant une certaine direction. Simplement pour faire comprendre ce que l'on veut dire, on peut pour le champ électromagnétique, par exemple, donner de cet effet la figuration suivante, où entrent en jeu les tensions de Maxwell. Dans le champ d'une charge électrique ou d'une masse magnétique, supposée immobile en un point d'une portion d'éther, imaginons que soit d'abord au repos une autre charge électrique ou une

nètes qui en ont plusieurs, que la loi des rapports de carrés demeure assez bien vérifiée, quoique avec des rapports qui ne sont pas toujours très simples dans les systèmes de Jupiter et de Saturne. On peut essayer de mettre cette loi sous la forme récurrente trouvée pour les planètes par M. Coliac. Pour les deux satellites de Mars, on voit que leurs distances 2,77 et 6,95 sont entre elles, à peu près, comme 5^2 et 8^2 . Dans le système d'Uranus, les quatre satellites ont pour distances: 7,71; 10,75; 17,63; 23,57. Ces distances sont entre elles comme 16; 22,30; 36,58; 48,91, c'est-à-dire à peu de chose près comme les carrés des nombres entiers *successifs* 4, 5, 6, 7, avec une réserve (disons de «structure fine») pour le second. La loi de M. Coliac trouve ainsi dans ce système une confirmation intéressante.

autre masse magnétique. Entre ces deux charges ou ces deux masses existe une certaine force représentée par des tensions et compressions qui s'exercent par l'intermédiaire du milieu. Admettons, sans penser que cela se passe ainsi en réalité, que la tension puisse être comparée à un ressort tendu entre les deux points où se trouvent les charges et dont l'extrémité se contracte avec une certaine vitesse, que nous désignerons par c . Ces deux charges étant en repos dans l'éther, la tension s'applique intégralement. Quand la charge secondaire vient à passer au point du champ envisagé avec une certaine vitesse, la tension ressort ne s'applique plus intégralement; si, par exemple, la charge est animée précisément de la vitesse c avec laquelle se contracte le ressort, il est bien évident que l'action du ressort et, par suite, celle du champ, sera nulle sur la charge. Cette vitesse c prend ainsi figure de vitesse limite que le corps ne peut dépasser dans le champ en l'absence d'autres forces.

Il n'y a rien là qui soit contraire au second principe de la dynamique newtonienne. Ce principe énonce deux Lois distinctes. D'une part, l'effet d'une force sur ce point matériel est le même quelle que soit la vitesse du point; d'autre part, il n'est pas modifié par la présence d'autres forces. Mais il est bien évident que la première partie de cet énoncé suppose que la même force puisse s'appliquer quelle que soit la vitesse du point. Le principe n'intervient qu'au moment où on a la certitude que la même force est appliquée; et la discussion nécessaire pour arriver à cette certitude est du domaine de la physique, en ce qui concerne les champs de forces naturels.

Examinons les choses de plus près. Soit un champ de force quelconque, occupant une partie de l'espace. La force que ce champ exercerait sur un point matériel, immobile en un point déterminé de ce champ est, par exemple, F , dont les composantes suivant trois axes rectangulaires fixes sont X, Y, Z , fonctions de diverses variables, en particulier des coordonnées x, y, z du point. Si le point matériel est en mouvement et passe avec la vitesse $V (u, v, w)$ au point du champ en question, il se pourra que la force soit la même, mais il se pourra aussi, suivant la structure du champ, que la force qui agit véritablement sur le corps ne soit pas F , mais une force F' dont les composantes

X' , Y' , Z' seront liées aux composantes X , Y , Z par des relations de la forme :

$$X' = X \times f_1(u, v, w)$$

$$Y' = Y \times f_2(u, v, w)$$

$$Z' = Z \times f_3(u, v, w)$$

ou par des relations plus compliquées encore.

Pour qu'on puisse considérer un champ de forces naturel, c'est-à-dire physique, comme défini, il faudra donc pouvoir énoncer deux lois :

- 1^o La loi qui définit la force X Y Z agissant sur un point au repos au point x , y , z du champ.
- 2^o Celle qui permet de passer de la force X Y Z à la force X' Y' Z' qui s'exerce sur le même point matériel lorsqu'il passe en x , y , z avec la vitesse u , v , w .

La seconde de ces lois n'avait été donnée jusqu'ici pour aucun des deux principaux champs naturels, ni pour le champ gravifique, ni pour le champ électromagnétique. C'était là une lacune grave dans l'édifice de la science.

La théorie de la relativité s'est trouvée conduite à combler cette lacune, non point par hasard d'ailleurs, mais pour des raisons profondes qui sont des raisons de similitude, similitude de principe, similitude de démarche.

C'est à montrer les possibilités d'explication d'une telle remarque qu'est consacré le présent exposé. Il y s'agit surtout de montrer que le principe *lui-même* de relativité (qui constitue sinon la plus importante, du moins la partie essentielle de cette théorie) n'est nullement indispensable pour rendre compte des phénomènes expérimentaux où l'on en voit des vérifications. Et, d'abord, de montrer que tous les phénomènes d'ordre dynamique dont fait état la relativité sont parfaitement compatibles avec la mécanique newtonienne, compte tenu du fait que la force réellement appliquée peut varier avec la vitesse du corps sur lequel agit le champ. On reconnaît là des idées qui sont proches parentes de celles qu'a exposées M. Varcollier sous le nou

général d'aberration des champs ¹, et qui elles-mêmes se rapprochent d'idées de Painlevé ². La théorie de M. Varcollier est très élaborée. D'autres tentatives, qui ont aussi un fonds commun avec la nôtre, mais qui nous paraissent moins au point que celle de M. Varcollier ont été émises à plusieurs reprises, notamment par Milne. Nous préférons la théorie de M. Varcollier à celle de Milne, encore un peu trop métaphysique à notre gré, à cause de l'introduction de son temps cinématique et de son temps dynamique ³.

Ces phénomènes dynamiques dont fait état la relativité sont : le mouvement séculaire du périhélie des planètes, la déviation des rayons lumineux par le soleil, le déplacement des raies du spectre solaire, la variation de la masse, le spectre des rayons X, la structure des raies de l'hydrogène.

Si, dans le champ de gravitation d'un centre unique, de masse newtonienne M , l'action du champ sur un corps de masse unité dépend de la vitesse de ce point dans le champ, il n'y a plus de potentiel. Faisons cependant l'hypothèse, pour serrer du plus près qu'il est possible, la théorie newtonienne, que le travail dépensé sur le corps par le champ, lors du passage du corps d'un point A à un point B du champ par des trajectoires différentes pour suivre ensuite, à partir du point B , la même trajectoire, est indépendant du chemin suivi. Si la force était fonction de point, cela veut dire qu'il y aurait potentiel, mais ce n'est pas le cas.

1^o — Supposons, toujours dans le cas du point attirant unique, un mobile situé d'abord à l'infini, et possédant une certaine énergie totale W et une énergie cinétique T . Définissons l'énergie que nous appellerons potentielle par :

$$T + U = W .$$

Si la force était fonction de point, la fonction potentielle serait aussi fonction de point. Ici, la fonction U , que nous continuerons d'appeler fonction potentielle dépendra des coor-

¹ VARCOLLIER, *op. cit.*

² PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, 174, 1922, 1143.

³ *Relativity, Gravitation and World—Structure*, Oxford, 1935.

données du point du champ où se trouve le mobile et de la vitesse u, v, w avec laquelle le mobile y passe. Elle se réduira à la fonction potentielle de point quand on y fera $u = v = w = 0$. Elle sera de la forme $U = f(x, y, z, u, v, w)$. Supposons-la développable en série de Mac-Laurin par rapport à u, v, w . Si u, v, w ont des valeurs relativement petites, on pourra, dans le développement s'en tenir aux termes du second degré en u, v, w , c'est-à-dire écrire :

$$U = f(x, y, z, 0, 0, 0) + \sum_{uvw} u f'(x y z 0 0 0) + \frac{1}{2} \sum_{uvw} u^2 f''_u(x y z 0 0 0) .$$

D'autre part, si l'on considère, non plus le potentiel en un même point du champ sur des mobiles animés de diverses vitesses, mais le mouvement continu d'un même mobile dans le champ sous l'action du champ, il existe dans ce mouvement des relations entre les coordonnées du mobile et les composantes de sa vitesse. Il existe donc une fonction $a_1(x y z)$ telle que : $f'_u(x y z 0 0 0) = u \cdot a_1(x y z)$ et deux autres fonctions a_2 et a_3 jouant des rôles analogues. De sorte que U peut encore s'écrire :

$$U = f(x y z 0 0 0) + \frac{1}{2} u^2 \varphi_1(x y z) + \frac{1}{2} v^2 \varphi_2 + \frac{1}{2} w^2 \varphi_3 .$$

On pourrait d'ailleurs montrer que, d'une façon rigoureuse, la fonction U peut s'écrire sous la forme que nous venons ainsi de trouver comme approchée. Elle s'écrit en effet d'abord :

$$U = W - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) .$$

Pour pouvoir l'écrire, rigoureusement, sous la forme envisagée, il suffit que :

$$W - f(x y z 0 0 0) = \frac{1}{2} \sum_{uvw} u^2 (\varphi_1 + 1) .$$

Comme dans le mouvement, u, v, w ont des relations avec les coordonnées du point du champ où se trouve passer le point matériel mobile, on voit qu'on peut déterminer des fonc-

tions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, de façon à pouvoir satisfaire à la relation voulue.

La recherche de la loi de la gravitation se ramène à celle de la fonction U pour le champ gravifique.

2^o — Admettons que l'énergie totale se conserve lors du mouvement du point matériel. Dans le passage du mobile d'un point à un autre, en vertu de l'hypothèse faite plus haut, le travail du champ, et par suite le T final, et par suite aussi le U final, ne dépendront pas des circonstances du mouvement. Le mobile pouvant être guidé de A en B par divers chemins, pour suivre ensuite à partir de B la même trajectoire, s'il part de A , dans ces divers cas, avec la même vitesse, le travail dépensé sur lui par le champ étant le même, les diverses valeurs finales de T , et par suite de U , et aussi, si l'on veut, de $-2T + 2U - c^2$ ou de $2T + 2U + c^2$, ou de toute autre combinaison de T et de U — par exemple de $\sqrt{\left(\frac{2U}{c^2} - 1\right)(T + c^2) + 2c^2}$ que l'on pourrait identifier, à très peu près, avec le $\frac{ds}{dt}$ de la relativité — seront aussi les mêmes quel que soit le chemin par lequel le mobile les aura réalisées. Dans ces expressions, c est une constante dont le sens sera précisé tout à l'heure.

Opérons avec l'une quelconque de ces expressions, $2T + 2U + c^2$, par exemple, et en coordonnées polaires r, φ , dans le plan de l'orbite. La recherche de la fonction U , indépendante du chemin par lequel le mobile aura été guidé pour la réaliser, et fonction à la fois du point et de la vitesse en ce point, se ramène donc elle-même à celle de la fonction $2T + 2U + c^2$, polynome linéaire en $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2, \left(\frac{rd\varphi}{dt}\right)^2$.

3. — A l'infini, loin de la masse attirante, et même à distance finie, si la vitesse est très faible, la loi cherchée doit se réduire à la valeur newtonienne, c'est-à-dire que U doit se réduire à la valeur $-\frac{KM}{r}$, K étant la constante d'attraction de Newton et r , la distance au centre; à l'infini U doit se réduire à 0 quelle que soit la vitesse.

Dans la comparaison des expressions $(2T + 2U + c^2) dt^2$ réalisées suivant les divers chemins, rien n'empêche de choisir

des valeurs égales de dt^2 , de telle sorte que l'expression garde aussi la même valeur quel qu'ait été le chemin suivi. Les temps mis varient suivant les chemins, et les r , φ sont des fonctions de t qui changent aussi de valeur suivant les chemins; quel que soit le système de variables employées, pour une même valeur de dt , l'expression considérée doit garder la même valeur.

Les trois conditions ci-dessus imposées à cette expression (conservation de l'énergie, invariance lors du changement de variables, condition à l'infini), sont celles qu'impose Einstein au ds^2 de la relativité.

Les calculs d'Einstein et de Schwarzschild subsistent entièrement et peuvent se reproduire tels qu'ils sont donnés dans les traités de relativité pour le ds^2 de cette théorie.

D'ailleurs — et c'est une similitude de plus avec la théorie de la relativité — si l'on choisit d'opérer sur $(2T + 2U + c^2) dt^2$, on peut tout de suite affirmer que pour les mêmes valeurs finales de dt , quand on passe d'un point A à un point B par différents chemins, cette expression est indépendante du chemin par lequel le mobile l'a réalisée: on ne fait appel pour cet énoncé qu'au principe de la conservation de l'énergie. La constante c^2 est introduite en vue d'annuler U, et, par conséquent, la force appliquée, pour une vitesse limite voisine de la vitesse c de la lumière dans le vide, lors d'un mouvement du mobile effectué suivant une trajectoire rectiligne passant par le centre gravifique.

Indiquons sommairement le calcul à faire pour trouver U. Plaçons nous d'ailleurs du premier coup dans le cas où le coefficient de $r^2 d\varphi^2$ n'est pas nécessairement l'unité, mais une constante $g_2 = 1 + 2A$.

L'expression T est un polynôme linéaire en $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Et U aussi, avons-nous vu.

D'autre part, une relation existe, dans le mouvement, entre les coordonnées du mobile et sa vitesse. Ces considérations permettent d'écrire en un point quelconque:

$$d\sigma^2 = (2T + 2U + c^2) dt^2 = g_1 dr^2 + g_2 r^2 d\varphi^2 + g_4 c^2 dt^2$$

les g_i dépendant des coordonnées. Dans la comparaison des expressions $(2T + 2U + c^2) dt^2$ réalisées de A en B suivant les

divers chemins par lesquels le mobile aura pu être guidé, nous prenons, comme il a été dit, les mêmes valeurs de dt^2 , pour que les diverses expressions $(2T + 2U + c^2) dt^2$ puissent être considérées comme ayant la même valeur quel qu'ait été le chemin suivi.

Les temps mis variant suivant les chemins et les r et φ sont des fonctions de t qui changent aussi de valeur suivant les chemins. Mais les g_i doivent satisfaire à de certaines équations (aux dérivées partielles), puisque toutes les expressions $d\sigma^2$ considérées ont la même valeur en B.

C'est un problème de mathématiques pures, qu'Einstein a résolu, de former un système covariant de dix équations entre ces coefficients g_i de la forme quadratique $d\sigma^2$.

En fin de compte, on obtient comme expression de $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = (2T + 2U + c^2) dt^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{k}{r}} + g_2 r^2 d\varphi^2 + \left(1 - \frac{k}{r}\right) c^2 dt^2 .$$

Les conditions à la limite imposées pour U permettent de fixer à $\frac{2 \text{ KM}}{c^2}$ la valeur de la constante k .

On déduit pour U la valeur:

$$U = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}\right)^{-1} - 1 \right] \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + A r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{\text{KM}}{r}$$

ou, approximativement:

$$U = \frac{\text{KM}}{c^2 r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + A r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{\text{KM}}{r} .$$

La manière dont nous avons fait cette étude montre qu'il doit exister dans le champ de gravitation d'un centre, une vitesse limite qu'un corps soumis à la seule action du champ ne doit pas pouvoir dépasser. Cette vitesse une fois atteinte, la valeur de U doit demeurer constante. Cette vitesse est d'ailleurs sans doute la vitesse de propagation de l'action gravifique qui, se faisant par l'intermédiaire de l'éther, doit avoir la même valeur que celle de la lumière, hypothèse que légitimera l'accord, s'il se produit, de cette théorie avec les observations astronomiques.

C'est ce qui montre que la constante c de la formule est la vitesse de la lumière dans le vide.

II. — *Généralisation.* — La théorie se prête à une généralisation très simple au cas de plusieurs masses mobiles dans le champ d'un centre et réagissant l'une sur l'autre. Dans le cas de deux masses m et μ , par exemple, on est conduit à envisager une expression de la forme: $g_1 dr^2 + g_2 r^2 d\theta^2 + g_3 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + h_1 dr'^2 + h_2 r'^2 d\theta'^2 + h_3 r'^2 \sin^2 \theta' d\varphi'^2 + h_4 dt^2$, dépendant de 7 variables: 6 coordonnées polaires, trois pour chaque mobile, le pôle étant au centre principal, et le temps au lieu que la théorie de la relativité n'introduirait dans son ds^2 que quatre coordonnées ou plutôt quatre variables. Cette expression doit être astreinte à être indépendante, en une position donnée, de la manière dont le système mobile l'a réalisée. La solution résulte de sept équations tensorielles dérivant d'un tenseur du second ordre à quarante neuf composantes dont quarante-deux sont identiquement nulles.

III. — *Mouvement des planètes ou plus généralement d'un mobile matériel animé dans le champ d'une vitesse due à ce champ ou à toute autre cause.* — La valeur de $2T + 2U$ est, d'après ce qui vient d'être trouvé:

$$2T + 2U = \left(1 - \frac{2 KM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (1 + 2A) r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2 KM}{r} \quad (1)$$

et celle de U sensiblement:

$$U = \frac{KM}{c^2 r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{KM}{r} .$$

La loi des aires est vérifiée, comme on le déduit du calcul ¹

¹ Nous admettons ici que l'on peut avoir à la fois $\delta J (T - U) dt = 0$ et $T + U = Cte$. En réalité ceci n'est pas forcément tout à fait exact du moment que U dépend de la vitesse. Si l'on admet que $T + U$ est constant, U ne représente pas alors exactement la fonction $-L + T$ du principe de la moindre action (L fonction de Lagrange) ou plutôt L n'est pas exactement égale à $T - U$. On sait que la quantité qui est constante est: $\Sigma p_i q_i' - L$, les p_i étant les

ci-après :

$$\delta \int (T - U) dt = 0 ,$$

qui donne, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ étant nul dans l'opérateur de Lagrange, car φ ne figure dans $T - U$ que par sa dérivée φ' :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \varphi'} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial (T - U)}{\partial \varphi'} = C^{\text{te}} ,$$

soit ici: $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h$, h étant ici la constante des aires.

L'équation de la conservation de l'énergie s'écrit alors, B désignant une constante :

$$\left(1 - \frac{2 KM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (1 + 2A) r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = B + \frac{2 KM}{r} . \quad (2)$$

En développant et en tenant compte de la loi des aires, cette équation s'écrit, avec $u = \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \left(1 + \frac{4 K^2 M^2}{c^2 h^2} + 2A\right) &= \frac{B}{h^2} + \\ &+ \frac{2 KM}{h^2} \left(1 - \frac{B}{c^2}\right) u + \frac{2 KM}{c^2} (1 + 2A) u^3 . \quad (3) \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes, nous allons continuer à serrer du plus près qu'il sera possible les méthodes de la relativité générale. L'équation einsteinienne remplaçant l'équation (3) serait :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{B}{h^2} + \frac{2 KM}{h^2} u + \frac{2 KM}{c^2} u^3 . \quad (3')$$

moments conjugués des variables q_i de Lagrange. On a ici: $T + U = \Sigma p_i q'_i - L$ d'où $L = \Sigma p_i q'_i - T - U$. On n'a pas forcément $\delta \int (T - U) dt = 0$. Mais ici l'erreur est insignifiante car nous montrons que, dans le mouvement des planètes, U est très près de se confondre avec une fonction de point. Une extension du principe de Hamilton a d'ailleurs été envisagée par Weber et Neumann au cas de « potentiels » dépendant des vitesses (voir chap. XI).

L'équation newtonienne remplaçant (3) et (3') serait :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{B}{h^2} + \frac{2 KM}{h^2} u, \quad \text{avec} \quad B = -\frac{KM}{a}. \quad (3'')$$

Dans (3') il n'y a à déterminer, en dehors de h , que la constante B . En relativité, on prend pour B dans (3') la même valeur $-\frac{KM}{a}$ que dans (3''), a désignant le demi-grand axe.

Dans (3), nous avons deux constantes A et B à déterminer. Selon la même méthode, nous les choisirons de manière à rendre (3) aussi semblable que possible à (3''). Ceci nous conduit d'abord à prendre $B = -\frac{KM}{a}$. Nous aurions d'ailleurs trouvé la même valeur si nous avions considéré directement les passages du mobile au périhélie et à l'aphélie. On a alors $\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$. Les équations (2) et (3), qui se confondent, s'écrivent alors :

$$(1 + 2A) \frac{h^2}{r_1^2} = B + \frac{2 KM}{r_1}, \quad (4)$$

r_1 désignant le rayon vecteur du périhélie, et :

$$(1 + 2A) \frac{h^2}{r_2^2} = B + \frac{2 KM}{r_2},$$

r_2 désignant le rayon vecteur de l'aphélie.

On en déduit, par soustraction, après multiplication par r_1^2 et r_2^2 respectivement :

$$B = -\frac{2 KM}{r_1 + r_2} = -\frac{KM}{a},$$

a désignant une quantité qui serait le demi-grand axe de la trajectoire, si cette trajectoire était elliptique.

Pour déterminer A , nous chercherons toujours à rendre l'équation (3) aussi semblable que possible à l'équation (3''). Dans le terme en u , figure B qui a déjà été déterminé. A figure lui aussi dans deux termes, dans celui en u^2 et dans celui en u^3 . Comme l'influence du terme en u^2 est prépondérante sur celle du terme en u^3 , c'est le terme en u^2 qu'il faut tâcher de rendre

identique à celui de l'équation (3''), ce qui conduit à prendre pour A la valeur $-\frac{2 K^2 M^2}{c^2 h^2}$.

Elle est exprimée en fonction de la constante des aires et, par conséquent, à une valeur générale.

La valeur approchée du potentiel U s'écrit alors :

$$U = \frac{KM}{d^2 r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{2 K^2 M^2}{c^2 h^2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{KM}{r}$$

la valeur exacte étant :

$$U = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2 KM}{c^2 r} \right)^{-1} - 1 \right] \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{2 K^2 M^2}{c^2 h^2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{KM}{r}$$

Dans le cas d'une trajectoire rectiligne passant par le centre, la formule approchée prend une forme rappelant celle d'une formule que Weber avait donnée en électromagnétisme et que nous aurons l'occasion de retrouver dans un prochain chapitre. Elle satisfait bien aux conditions de se réduire à la formule newtonienne pour de faibles vitesses du mobile dans le champ du centre, de s'annuler à l'infini, de se réduire également en tout lieu à la formule newtonienne si l'on considère la propagation comme instantanée.

Elle ne donne pas une force proportionnelle à M, masse du corps attirant, et cela n'est pas étonnant du moment qu'elle n'est pas fonction de point. C'est qu'en effet le principe de l'action égale à la réaction, vrai dans le cas de points au repos l'un par rapport à l'autre et vraisemblablement aussi dans le cas de trajectoires circulaires, où l'action étant constante d'un moment à l'autre doit bien être égale à la réaction, c'est que ce principe n'a aucune raison d'être tenu pour valable dans le cas de trajectoires quelconques dans un champ de forces où la propagation n'est pas instantanée et où, par suite, l'application de la force dépend de la vitesse du point mobile. Le principe de l'action et de la réaction ne serait donc plus vrai en général, du moins par rapport à la matière seule, et l'existence de l'éther serait nécessaire pour sauvegarder le principe. Il n'y aurait aucun changement à apporter à la dynamique du point, mais il faudrait peut-être en apporter à celle des systèmes, la résultante

des actions intérieures des points du système n'étant plus nécessairement nulle.

IV. — *Examen des hypothèses faites.* — Récapitulons les hypothèses faites et voyons leur portée. Il a d'abord été supposé que le coefficient A du terme transversal de l'expression de U était une constante. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, cela revient à supposer que ce coefficient ne dépend pas de φ et, pour raisons de symétrie, cela ne constitue pas une hypothèse. Le coefficient étant ainsi constant pour une trajectoire circulaire de rayon b , et le terme transversal pouvant être ainsi écrit $\frac{Ah^2}{b^2}$, il est tellement naturel d'admettre que si un mobile soumis uniquement à l'action du centre passe dans sa trajectoire en un point $r = a$, avec une composante transversale égale à la vitesse du mouvement circulaire, le terme transversal sera de la forme $\frac{Ah^2}{r^2}$ ou $Ar^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ que c'est à peine une hypothèse.

Enfin si la vitesse $r\frac{d\varphi}{dt}$ est due en chaque point au champ de gravitation, et à une autre cause, ce n'est pas une hypothèse que d'admettre que le terme transversal sera encore le même.

V. — *Déplacement du périhélie des planètes.* — L'équation de la trajectoire (3) est finalement:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2KM}{h^2}\left(1 + \frac{KM}{c^2a}\right)u + \frac{2KM}{c^2}\left(1 - \frac{4K^2M^2}{c^2h^2}\right)u^3. \quad (5)$$

Pour étudier sur cette équation le phénomène du déplacement du périhélie, nous emploierons la méthode qui est décrite dans les traités de relativité. L'équation ci-dessus est, aux coefficients constants de second membre près, exactement, de la forme de celle qui est obtenue par la théorie de la relativité généralisée:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2KM}{h^2}u + \frac{2KM}{c^2}u^3,$$

et les coefficients correspondants sont d'ailleurs extrêmement voisins.

Procédons par approximations successives:

Par dérivation de (3) et il vient:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{KM}{h^2} \left(1 + \frac{KM}{c^2 a}\right) + \frac{3 KM}{c^2} \left(1 - \frac{4 K^2 M^2}{c^2 h^2}\right) u^2. \quad (6)$$

Négligeons le terme en u^2 , en première approximation. Nous obtenons une solution voisine de la solution de la mécanique céleste newtonienne:

$$u = \frac{KM}{h^2} \left(1 + \frac{KM}{c^2 a}\right) [1 + e \cos(\varphi - \varpi)] \quad (7)$$

e étant l'excentricité de l'orbite et ϖ la longitude du périhélie.

Une seconde approximation s'obtient en substituant la valeur (7) de u dans le terme en u^2 . Parmi les termes additionnels ainsi obtenus, le seul qui donne un effet appréciable est celui en $\cos(\varphi - \varpi)$ parce qu'il constitue une solution de l'équation sans second membre (effet de résonance).

On sait qu'une intégrale particulière de l'équation:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = A \cos \varphi$$

est: $u = \frac{1}{2} A \varphi \sin \varphi$.

Il en résulte pour u un terme:

$$u_1 = \frac{3 K^3 M^3}{c^2 h^4} \left(1 + \frac{KM}{c^2 a}\right)^2 \left(1 - \frac{4 K^2 M^2}{c^2 h^2}\right) e \varphi \sin(\varphi - \varpi)$$

qui vient s'ajouter au terme (7); de sorte que l'on obtient une seconde approximation que nous nous dispensons d'écrire autrement que sous la forme:

$$u = \frac{KM}{h^2} \left(1 + \frac{KM}{c^2 a}\right) [1 - e \cos(\varphi - \varpi - \delta \varpi)]$$

en posant:

$$\delta \varpi = \frac{3 K^2 M^2}{c^2 h^2} \left(1 - \frac{4 K^2 M^2}{c^2 h^2}\right) \left(1 + \frac{2 KM}{c^2 a}\right) \varphi$$

en négligeant $(\delta \varpi)^2$.

La planète décrit une courbe non fermée, mais voisine d'une ellipse dont le périhélie tourne proportionnellement à φ .

h^2 étant égal à $KMa(1 - e^2)$, la rotation du périhélie exprimée en fraction de tour par période est :

$$\frac{\delta \bar{\omega}}{\varphi} = \frac{3 KM}{c^2 a (1 - e^2)} \left(1 - \frac{4 K^2 M^2}{c^2 h^2} \right) \left(1 + \frac{2 KM}{c^2 a} \right).$$

Vu la petitesse des termes supplémentaires $\frac{4 K^2 M^2}{c^2 h^2}$ et $\frac{2 KM}{c^2}$, le périhélie tourne au bout d'une révolution complète de :

$$\frac{6 \pi KM}{c^2 a (1 - e^2)}$$

absolument comme dans la théorie de la relativité.

Le mouvement du périhélie des planètes, de Mercure en particulier, est ainsi expliqué par la dynamique newtonienne que nous avons construite du champ de force naturel de la gravitation.

VI. — *Propagation de la lumière dans un champ de gravitation.* — Du moment qu'on admet l'éther comme milieu par l'intermédiaire duquel agit la gravitation, il est hors de doute que l'action de la gravitation modifie, au voisinage du centre, les équilibres et, par conséquent, la structure de cet éther. Celui-ci désormais, ne doit plus propager la lumière absolument comme s'il était libre de toute contrainte. Nous l'avons expliqué au chapitre VI.

Traisons le problème posé par l'application de la condition de propagation constituée par le principe du temps minimum de Fermat, que nous écrivons :

$$\delta \int dt = 0, \quad \text{ou encore} \quad \delta \int \sqrt{2T + 2U + c^2} dt = 0$$

puisque le radical est constant et, d'ailleurs sensiblement égal à $c\sqrt{2}$. On remarque qu'on passe de la valeur du ds^2 d'Einstein-Schwarzschild à celle de $d\sigma^2 = (2T + 2U + c^2) dt^2$ en changeant ds^2 en $-d\sigma^2$, dt^2 en $-dt^2$ et φ en $\sqrt{1 + 2A} \varphi$. De sorte que le résultat du calcul proposé sous le signe $\delta \int$

s'obtiendra en faisant dans le calcul du $\delta f'$ de la relativité le même changement ¹.

Ceci conduit en particulier, en tenant compte de ce fait qu'à l'infini la vitesse de la lumière doit être c pour déterminer la valeur de la constante, et en négligeant le terme en $\frac{1}{r^3}$, à l'équation:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{4 \text{ KM}}{c^2 r^2}\right) = c_1^2.$$

La vitesse dépend de la distance r au centre de l'astre qui crée le champ: tout se passe comme si la propagation était libre et l'espace rempli d'une matière ayant un indice de réfraction:

$$n = \frac{c}{c_1} = 1 + \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}$$

d'où l'on déduit:

$$n^2 = 1 + \frac{4 \text{ KM}}{c^2 r}.$$

Cette équation est l'intégrale de l'énergie dans le mouvement d'une particule de vitesse c attirée par une masse $2M$ suivant la loi de Newton.

¹ On obtient d'abord:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -k^2 + \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = k^2 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}$$

et comme $d\sigma^2 = 2c^2 dt^2$:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2k^2 c^2 - \frac{4 \text{ KM}}{r}$$

ce qui conduit à l'équation du texte avec $k^2 = \frac{1}{2}$.

A est ici beaucoup plus petit que dans le cas des planètes. On a: $A = -\frac{2 \text{ K}^2 \text{ M}^2}{c^2 h^2}$; mais $h = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = dc$, d désignant la distance du centre du Soleil au point le plus proche de la trajectoire de la lumière, où la vitesse est c sensiblement. Donc $A = -\frac{2 \text{ K}^2 \text{ M}^2}{c \cdot d^2}$. En fait φ demeure donc inchangé.

L'orbite est une hyperbole dont l'angle des asymptotes est sensiblement $\frac{4 \text{ KM}}{c^2 r}$, soit au voisinage du soleil $1'' 74$.

L'éther en état de vibration lumineuse acquiert, par l'effet des contractions, une individualité particulière qui le rend sensible à l'action de la gravitation comme une particule de matière. Lorsque la contraction se propage, tout se passe comme si la même particule contractée se déplaçait avec la vitesse de la propagation.

VII. — *Emission du rayonnement par des atomes terrestres et solaires.* — Le troisième effet — effet Einstein sur le déplacement vers le rouge des raies solaires — pouvait paraître plus difficile à expliquer. La relativité le déduit du fait qu'entre les périodes dt et δT d'une source solaire et d'une source terrestre identiques par ailleurs existe la relation :

$$dt = \frac{\delta T}{\sqrt{1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}}}$$

R étant le rayon du soleil.

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$\frac{dt}{\delta T} = \frac{mc^2}{mc^2 \left(1 - \frac{\text{KM}}{c^2 R}\right)}$$

ce qui montre, m désignant la masse d'un électron en vibration dans chacun des atomes identiques solaire et terrestre, que la période de vibration de cet électron est inversement proportionnelle à l'énergie potentielle intérieure à l'atome de cet électron; en d'autres termes, que la fréquence de vibration des électrons d'un atome peut servir de mesure à son énergie interne potentielle.

Or, c'est là une hypothèse qui se justifie bien par des considérations empruntées à l'électronique, et qui d'ailleurs n'est pas

différente du principe fondamental de la mécanique ondulatoire ¹.

D'autre part, c'est indépendamment du principe de la relativité que l'on établit que l'énergie potentielle d'un électron est mc^2 (énergie électrostatique, plus celle due aux pressions de Poincaré). Si l'on imagine un électron dans un atome amené de l'infini, ou son énergie potentielle est mc^2 , sur le soleil, où son énergie potentielle est $mc^2 - \frac{KMm}{R}$, on voit qu'entre les périodes de vibrations, terrestre et solaire, on a bien la relation prévue par la relativité et vérifiée par l'expérience: relation indépendante du principe de relativité comme en étaient indépendants les deux effets précédents. Le phénomène ne permet d'ailleurs pas de déduire quoi que ce soit qui soit contraire à l'universalité du temps; pour conclure à l'action d'un champ de gravitation sur le cours du temps, il faudrait d'abord établir que le résultat serait le même quel que soit le moyen de mesure employé; et la particularité de l'hypothèse faite ne rend pas la chose vraisemblable.

VIII. — *Mouvement d'un point dans un champ électromagnétique.* — Non seulement nous venons de donner des raisons de croire que les trois phénomènes où l'on voit des vérifi-

¹ M. L. de Broglie admet en effet (*Ondes et Mouvements*, chap. II) que l'on a

$$(\nu = \text{fréquence}) \quad h\nu = \frac{mc\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{2 KM}{c^2 r}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

dans le champ de gravitation et:

$$h\nu = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

en dehors de ce champ. Les valeurs de β étant respectivement:

$$c \sqrt{1 - \frac{2 KM}{c^2 r}} \quad \text{et} \quad \frac{v}{c},$$

v désignant la vitesse; on voit qu'à un terme du 4^e ordre en $\frac{v}{c}$ près, on a la relation voulue entre les fréquences ν .

cations de la théorie de la relativité généralisée sont indépendants du principe lui-même, mais encore notre étude constitue pour une part comme une sorte de transcription dans le langage newtonien de la théorie einsteinienne de la gravitation.

Les expériences dites de variabilité de la masse avec la vitesse peuvent aussi bien être considérées comme mettant en lumière la variabilité avec la vitesse de la force réellement appliquée.

Dans ces expériences, en effet, on se donne la loi de la force et on mesure l'accélération ou, du moins, ce qu'on fait revient à celà; on constate que le rapport force: accélération dépend de la vitesse; au lieu d'en conclure à la variabilité de la masse, on peut aussi bien en conclure que l'on n'avait pas le droit d'étendre au cas du point en mouvement dans le champ avec de grandes vitesses la loi de la force, étudiée dans le cas particulier du point en repos dans le champ.

Quand un corps chargé électriquement est mobile dans un champ électromagnétique avec une vitesse v par rapport à l'éther dans lequel agit le champ, s'il se meut en ligne droite sous l'action du champ, les résultats expérimentaux montrent qu'entre la force f' qui agit réellement sur lui et la force f qui agirait sur ce même corps supposé placé au repos au même point du champ existe la relation: $f' = f\alpha^3$, correspondant à la relation $m' = \frac{1}{\alpha^3}m$, censée exprimer la variation de la masse; α est le facteur de Lorentz:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

En réalité, ce que les expériences démontrent directement, c'est simplement qu'entre les accélérations que prennent en un même point du champ d'une part un corps partant du repos dans ce champ, d'autre part ce même corps venant à y passer avec un mouvement rectiligne de vitesse v dont la trajectoire sert d'ailleurs d'axe des x , existe la relation:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Le mouvement réel du corps dans le champ diffère donc du mouvement fictif, auquel nous attribuerons des lettres non

accentuées, qui prendrait naissance si la force du champ s'appliquait au point en mouvement comme au point au repos. La loi de ce dernier mouvement étant supposée connue, soit par exemple: $x = f_1(t)$, on peut se proposer de chercher, en tenant compte de la non-application intégrale du champ, la loi du mouvement réel: $x = f_2(t')$, c'est-à-dire, *par exemple*, le point devant passer à la coordonnée x au temps t dans son mouvement fictif, de chercher l'instant $t' = \varphi_1(x, t)$ où il passera au point $x' = \varphi_2(x, t)$, dans son mouvement réel. Dans le cas du champ électromagnétique, il vient à l'esprit que les formules de Lorentz pourraient bien avoir quelque rapport avec la question.

Soit donc, au repos dans un tel champ un trièdre trirectangle $O' x' y' z'$, dont l'axe Ox' est décrit sous l'influence du champ par un corps qui vient à passer au point x' avec la vitesse v et, par suite, avec une accélération réelle $\frac{d^2 x'}{dt'^2}$ qui a, avec l'accélération que prendrait le même corps partant du repos au même point, la relation:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Envisageons un autre trièdre $O_1 X Y Z$ parallèle au premier dont l'origine à l'instant considéré t' coïncide avec le mobile et qui continue ensuite son mouvement avec la vitesse constante v . Entre les accélérations réelle et fictive existe toujours la relation:

$$\frac{d^2 X}{dt'^2} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Le mobile se sépare du second système; si, dans son mouvement fictif il passe au point dx de ce second système au temps dt , dans son mouvement réel il va passer au point $dX = \alpha dx$ *par exemple* au temps $dt' = \frac{1}{\alpha} dt$.

Repassant au double système de trièdre $O_1 X Y Z$ et $O' x' y' z'$, comme $X = x' - vt'$, t' désignant le temps écoulé depuis qu'ils étaient en coïncidence, on voit que la première relation s'écrit:

$$dx = \frac{1}{\alpha} (dx' - v dt') .$$

La relation entre les accélérations conduit alors à la seconde relation :

$$dt = \frac{1}{\alpha} \left(dt' - \frac{v dx}{c^2} \right).$$

Ce sont là les équations de Lorentz. Elles ont, non plus un sens purement cinématique, comme dans la relativité, mais un sens dynamique et constituent des relations entre le mouvement réel et le mouvement fictif dans le champ électromagnétique

Elles ne sont d'ailleurs valables que dans une région où le mouvement du mobile puisse être considéré comme sensiblement uniforme.

L'interprétation des formules est que le mobile qui aurait dû passer au point x du second système au temps t , passe en réalité au point x' du premier au temps t' .

La relativité conduit de son côté à dire que le mobile qui passe au point x d'un second système à l'instant t passe au point x' du premier à l'instant t' . Entre les deux langages la seule différence est donc qu'un conditionnel y remplace un indicatif. C'est d'ailleurs là une différence considérable par ses conséquences; mais elle montre la facilité de la traduction de la relativité restreinte dans le langage de la physique ordinaire.

En refaisant le même raisonnement que ci-dessus, il semble qu'on devrait trouver que d'autres formules sont équivalentes à celles du groupe de Lorentz, par exemple: $dx = \frac{1}{\alpha^3} (dx' - v dt')$, $dt = dt'$. Cependant on ne les trouve pas complètement équivalentes. Cela s'explique ainsi. Pour trouver des formules aussi approchées que possible, il faut que les distances dx et dx' et les durées dt et dt' soient peu différentes les unes des autres. Or, dx étant plus grand que dX , dt sera plus petit que dt' .

Il existe une condition optima, qui peut être: $dx \cdot dt = dX \cdot dt'$. C'est à elle que correspondent les formules de Lorentz, qui apparaissent ainsi comme plus approchées que celles qu'on déduirait d'une autre condition telle que $dx \cdot dt = \frac{1}{\alpha^3} dX \cdot dt'$ qui correspond aux formules pseudo-lorentziennes ci-dessus.

Si au lieu d'une trajectoire rectiligne, le mobile décrit une trajectoire courbe dont les axes des x soient la tangente, les

deux formules précédentes demeurent valables. D'autre part, dans une région assez limitée auprès de la tangente, les deux mouvements projetés sur les axes des y et z diffèrent peu, de sorte que l'on doit avoir $y' = y$, $z' = z$. On en déduit pour les accélérations :

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \alpha^2 \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Or, l'expérience indique simplement les relations :

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \alpha \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \alpha \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

A cet effet de non-application intégrale de la force par le fait du mouvement s'en superpose donc un autre, qui est une modification de la force elle-même. Entre les composantes Y et Z de la force électrique par exemple qui règne dans une zone d'éther au repos dans le champ, et les composantes Y' et Z' de cette même force, dans l'éther entraîné par le corps avec la vitesse v , existe les relations : $Y' = \frac{1}{\alpha} Y$, $Z' = \frac{1}{\alpha} Z$.

Il y a là possibilité de reconstruire la partie électromagnétique de la relativité, qui est obtenue avec un sens différent de celui qu'elle a dans cette théorie, et dépouillée de son caractère purement cinématique.

La vitesse limite prend également un sens dynamique; pour $v = c$ les accélérations réelles sont nulles; la vitesse c est la vitesse maxima que puisse donner le champ en l'absence d'autres forces.

Les autres vérifications dynamiques de la relativité restreinte : raies de l'hydrogène, spectre des rayons X, font l'objet dans le langage employé d'une théorie identique à celle qu'en donne la relativité, la démarche et les calculs étant les mêmes.

XI. — *Comparaison des méthodes suivies aux paragraphes précédents.* — Entre la manière dont a été traitée la question de la gravitation et celle dont a été traitée la question du corps électrisé mobile dans un champ électromagnétique existent des différences très nettes. D'une part, il s'agissait nécessairement.

d'une théorie, théorie que nous avons basée sur la conservation de l'énergie; de l'autre part, nous nous sommes fondés sur le résultat expérimental de la non-application intégrale de la force, parce que, lorsque cela est possible, il est toujours préférable de partir d'une base expérimentale. En outre, le problème résolu dans ce dernier cas comporte la comparaison d'un mouvement réel et d'un mouvement fictif, chose qui n'a pas eu lieu dans le cas de la gravitation, mais que, précisément, nous nous proposons de faire.

L'équation (5) du paragraphe V, équation de la trajectoire d'une planète, est:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2KM}{h^2} \left(1 + \frac{KM}{c^2 a}\right) u + \frac{2KM}{c^2} \left(1 - \frac{4K^2 M^2}{c^2 h^2}\right) u^3$$

ou, sensiblement, en négligeant deux termes très petits, en confondant, dans le terme en u^3 , u avec $\frac{1}{a}$, a étant le demi-grand axe, en prenant $h^2 = Kma$, et en posant:

$$B = -\frac{KM}{a} - \frac{4K^2 M^2}{c^2 a^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{B}{h^2} + \frac{2KM}{h^2} \left(1 + \frac{B}{c^2}\right) u + \frac{6K^2 M^2}{c^2 h^2} u^2 .$$

En la combinant avec la loi des aires, on obtient:

$$Vm^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = B + \frac{2KM}{r} \left(1 + \frac{B}{c^2}\right) + \frac{6K^2 M^2}{c^2 r^2}$$

Vm désignant la vitesse de la planète dans son mouvement réel au point de rayon vecteur r de la trajectoire.

On voit que le potentiel qui, dans la théorie de Newton, eut été $-\frac{KM}{r}$, est ici remplacé par $-\frac{KN}{r} \left(1 + \frac{B}{c^2} + \frac{3KM}{c^2 r}\right)$.

Il faut remarquer que ce potentiel n'est pas aussi général que celui trouvé au paragraphe III qui, faisant intervenir les composantes de la vitesse du mobile, est général. Il ne s'agit ici que d'une expression de la valeur du potentiel en un point de la trajectoire d'une planète soumise seulement à l'action d'un centre, à l'exclusion de toute autre action.

Et c'est, sans doute, ce qui explique que la force qui dérive de ce potentiel, fonction de point cependant, ne soit pas proportionnelle à la masse du centre attirant même dans le cas d'une trajectoire circulaire.

Introduisons, maintenant, des quantités afférentes au mouvement fictif, qui aurait lieu si la force s'appliquait intégralement, à savoir la vitesse v et l'accélération correspondant à la loi de Newton et qui sont au point de rayon vecteur r de l'orbite de la planète:

$$v^2 = -\frac{KM}{a} + \frac{2 KM}{r}$$

$$j = -\frac{KM}{r^2}.$$

Nous pouvons écrire sensiblement la valeur de V_m^2 :

$$V_m^2 = v^2 + \frac{2 KM (v^2 - rj)}{c^2 r}$$

d'où

$$\frac{V_m^2}{2} - \frac{v^2}{2} = -\frac{KM r}{c^2} \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt}$$

car la dérivée géométrique:

$$\frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt} = \frac{rj - v^2}{r^2}.$$

Le problème posé est ainsi résolu. Par suite de la constance et de l'égalité de l'énergie totale dans les deux cas du mouvement réel et du mouvement fictif, on peut écrire entre les potentiels U_m et U :

$$U - U_m = -\frac{KM r}{c^2} \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt}.$$

Posons: $rc^2 \int \frac{U}{r} dt = J$.

$$rc^2 \int \frac{U_m}{r} dt = J_m ;$$

l'équation ci-dessus devient: $J_m - J = KMv$.

Le second membre représente (à un facteur près dépendant de la distance r), la différence entre le flux, à travers le corps mobile de masse unité supposé d'abord influencé comme s'il était immobile par rapport au corps influençant (KM c) et le flux à travers ce même corps, supposé ensuite influencé en tenant compte de ce que la vitesse relative de propagation de la gravitation est $c - v$, soit KM($c - v$).

Plus exactement, il faudrait faire intervenir la vitesse du corps influençant dans l'éther, soit V , la vitesse du corps influencé dans ce même éther V' , et leur différence géométrique v .

Mais le résultat auquel nous parvenons par déduction nous montre qu'en réalité seule la vitesse relative des deux corps intervient en première approximation, c'est-à-dire que le mouvement du corps influençant dans l'éther a pour effet d'apporter une modification inverse de celle du mouvement du corps influencé.

Ce dernier résultat a été donné, en 1925, par M. G. Fournier, d'une façon entièrement différente. C'est une formule de l'aberration de M. Varcollier, dont le premier gros ouvrage sur ces questions date aussi de cette époque ¹.

La non-application intégrale de la force paraît ainsi bien liée à la non-instantanéité de la propagation.

Au point où nous en sommes arrivés, récapitulons que tous les phénomènes d'ordre dynamique dont fait état la théorie de la relativité ne nécessitent nullement pour s'expliquer l'énoncé du principe lui-même. Le but poursuivi était de montrer comment le développement systématique de l'idée de la non-application intégrale de la force pouvait conduire à l'explication de tous ces phénomènes. Ce développement s'est fait en plusieurs occasions par des moyens semblables à ceux qu'emploie la théorie de la relativité, au point qu'une sorte de traduction du langage einsteinien dans le langage newtonien que nous parlons pourrait être envisagée comme possible, la dynamique einsteinienne se présentant en quelque sorte comme un chapitre de la mécanique rationnelle: la mécanique des champs de forces

¹ *La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques.*

naturels, compte tenu de ce que M. Varcollier, notamment, appelle du nom général d'aberration.

XII. — *Signification de la variable t . Champs de forces de la physique.* — Toutes nos équations, dans ce chapitre, comme dans tout notre travail, ont été écrites avec le temps mécanique ou newtonien. Ce temps n'est pas exactement le temps sidéral basé sur l'observation des étoiles et la rigoureuse uniformité supposée de la rotation de la Terre¹. Les astronomes publient des tables permettant de passer du temps sidéral au temps newtonien. Mais il s'agit là d'une correspondance entre moyens de mesure différents d'une même grandeur, sans aucune ambiguïté théorique.

Ce qu'il nous faut surtout remarquer, c'est que, par l'emploi du temps mécanique, nous échappons aux critiques si perspicaces de M. G. Tiercy concernant les formules de la relativité généralisée d'Einstein. M. G. Tiercy² montre qu'une question se pose: le temps astronomique universel doit-il, dans les vérifications expérimentales, ou d'observation, être identifié au temps dit cosmique, ou bien au temps propre terrestre? Dans ce dernier cas, on n'explique que 26'' sur les 43'' de l'avance séculaire du périhélie de Mercure, ce qui n'est pas meilleur, dit M. Tiercy, que le résultat qu'on obtiendrait avec la loi de Newton en interprétant les instructions de celle-ci comme se rapportant au temps propre de chaque planète. Les résultats sont encore moins bons, relativement, pour Mars.

M. Tiercy discute ensuite s'il ne faut pas tenir compte, non seulement de la dilatation du temps due au champ de gravitation à laquelle on s'est borné jusqu'ici, mais aussi de celle due à la vitesse v du mouvement d'entraînement de la planète dans le champ. Il y a alors amélioration pour Mercure, mais au contraire aggravation pour les autres planètes, si l'on a d'abord identifié le temps astronomique universel au temps propre terrestre. Mais si l'on a identifié le temps astronomique avec le

¹ Voir, par exemple, P. TARDI, *Cours d'Astronomie de l'École polytechnique*, p. 230.

² *La théorie de la relativité dite générale et les observations astronomiques* (Genève et Gauthier-Villars, Paris).

temps dit cosmique, on a une aggravation générale importante inacceptable. Aussi, conclut M. Tiercy, le problème des avances des périhélies reste entier. La signification de notre variable t ne rend pas la présente étude justiciable des mêmes critiques très fortes et sans doute irréfutables.

En ce qui concerne les deux effets physiques de la déviation des rayons lumineux et du déplacement des raies spectrales, outre qu'ils peuvent être complexes, l'explication que nous en donnons n'est pas sujette non plus aux remarques de M. Tiercy.

L'aberration de la force du champ agissant sur un mobile en mouvement dans ce champ, que nous admettons suivant les idées générales de M. Varcollier, est, dans l'étude que nous venons de faire, limitée par les conditions de conservation que nous avons imposées: ce sont les conditions d'Einstein, énoncées en un autre langage. Si notre interprétation est la bonne, nous devons retrouver, comme cas particuliers des résultats généraux de la gravifique de la relativité, quand la force est supposée seulement fonction de point et qu'on maintient les conditions de conservation, un caractère tensoriel des forces et du travail. C'est bien ce qui a lieu: quand la force est fonction de point et qu'il y a potentiel ou fonction de forces au sens de la mécanique ordinaire, il y a potentiel dans tous les systèmes de coordonnées d'espace, ou plus généralement à la suite de n'importe quel changement de variables.

Si $X dx + Y dy + Z dz$ est un travail élémentaire et si $(X, Y, Z) = \text{grad. } \varphi$, le travail s'écrira dans un autre système $X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1$ et il y aura une fonction φ_1 telle que $(X_1, Y_1, Z_1) = \text{grad. } \varphi_1$. Une autre vérification consiste à faire l'hypothèse que la force ne dépende plus de la vitesse et à constater qu'alors on retrouve les résultats ordinaires de la mécanique des champs fonctions de point seulement. C'est ce qu'on vérifie, aussi bien pour le paragraphe VIII ci-dessus que pour le paragraphe III, c'est-à-dire pour la relativité restreinte aussi bien que pour la théorie de la gravitation.

C'est intentionnellement que nous disons « de la mécanique des champs fonction de point seulement » et non pas « de la mécanique newtonienne », car s'il est vrai qu'en *pratique* la

mécanique newtonienne n'a étudié que des champs fonctions de point, ce n'est là qu'une question *de fait* et non *pas de principe*; au surplus elle n'a pas étudié que des champs. Page 206 de son remarquable traité *Le principe de relativité*, M. Jean Becquerel écrit, à propos de l'hydrodynamique et des « forces », la phrase suivante: « La mécanique newtonienne néglige les autres « forces », qui dépendent des quantités de mouvement. » L'auteur met parfaitement en lumière la différence essentielle qu'il y a selon nous entre les théories hydrodynamiques ordinaire et einsteinienne. Il est à notre avis tout près, à ce moment-là, de M. Varcollier; il ne manque que le mot d'aberration. Mais la mécanique newtonienne n'est pour rien dans l'affaire, du moins ses principes, voulons-nous dire: elle n'exclut aucunement l'étude de phénomènes où les forces dépendent des vitesses. En physique d'ailleurs les forces agissant sur un mobile en mouvement dans un champ sont généralement quelque chose d'inaccessible à la mesure directe; les seules choses que nous puissions connaître, toutes erreurs de principe ou de mesure mises à part bien entendu, ce sont les mouvements; les équations de la mécanique — *de n'importe quelle mécanique* — permettent de remonter aux forces, aux potentiels, aux forces fonctions des vitesses, etc..., et pour prouver qu'une mécanique est fautive, *dans ses principes*, il faudrait pouvoir confronter des *mesures directes* des forces et des potentiels avec les valeurs qu'en donneraient les équations de cette mécanique à partir des réalités observables du mouvement. Je ne crois pas que cela ait *jamais* eu lieu dans la physique des champs. Tout notre dernier chapitre sera consacré à la discussion de ces idées.

Chapitre VIII.

QUELQUES AUTRES RÉFLEXIONS AU SUJET DE LA RELATIVITÉ.

I. — *Phénomènes électromagnétiques dans les systèmes de corps en mouvement.* — Dans le vide un champ électromagnétique est défini par les composantes X Y Z de la force électrique et L M N de la force magnétique en chaque point.

Supposons que l'on anime d'une vitesse rectiligne et uniforme v les corps donnant naissance au champ primitivement au repos par rapport au lieu où se passe l'expérience.

La vitesse v étant dirigée suivant l'axe ox , les résultats expérimentaux indiquent que les composantes X et L ne sont pas altérées, les quatre autres étant modifiées par le fait du mouvement.

Désignons par des lettres accentuées les composantes nouvelles et proposons-nous de les comparer aux composantes X Y Z L M N qui eussent existé au même point $x y z$ si le mouvement n'avait eu aucun effet.

X' Y' Z' L' M' N' apparaissent ainsi comme les composantes des forces électrique et magnétique réelles mises en jeu, X Y Z L M N comme les composantes des forces électrique et magnétique fictives, égales aux forces qui existeraient si le mouvement n'altérait pas ces forces.

Etudiant au chapitre VII le phénomène de la variation de la force appliquée avec la vitesse, nous avons été amenés à constater que le mouvement avec la vitesse v dirigée suivant ox avait, entre autres effets, celui de transformer la force électrique X Y Z d'un pur champ électrique en la force:

$$X' = X$$

$$Y' = \frac{1}{\alpha} Y$$

$$Z' = \frac{1}{\alpha} Z .$$

L'expérience indique aussi que le mouvement avec la vitesse v des corps créant le champ, ou le mouvement avec la vitesse $-v$ d'une portion d'éther par rapport à ces corps, donne naissance à une force magnétique perpendiculaire à la force électrique et à la vitesse v et dont la composante M' ne dépend que de Z, la composante N' que de Y, et dont la composante L' est nulle. La force magnétique produite est d'ailleurs proportionnelle à la force électrique, d'après la loi de l'induction, et à la vitesse v . Comme le dit M. Varcollier, le champ magnétique naît de l'aberration ci-dessus du champ électrique.

Par conséquent :

$$L' = 0$$

$$M' = \frac{v}{c} Z' = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} Z$$

$$N' = \frac{v}{c} Y' = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} Y .$$

Leurs valeurs montrent, dans ce cas, le plus simple, que la quantité :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (L^2 + M^2 + N^2)$$

est égale à la quantité :

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - (L'^2 + M'^2 + N'^2) ,$$

c'est-à-dire que la première est invariante.

Faisons l'hypothèse qu'il en est ainsi, non seulement dans le cas du pur champ électrique initial, mais aussi dans celui du champ électromagnétique complet. Et étudions les propriétés que comporte l'invariance de l'expression :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (L^2 + M^2 + N^2) .$$

Quels que soient Y, Z, M, N , les grandeurs X' et L' doivent en être indépendantes, d'après les résultats de l'expérience. En outre, il nous faut imposer aux formules de transformation la condition que si l'on décompose le champ initial, dont Y, Z, M, N sont des composantes, en deux champs dont les composantes seront Y_1 et $Y - Y_1$, etc..., il puisse y correspondre par les formules de transformation, un champ final dont les composantes Y', Z', M', N' pourront être décomposées en composantes Y'_1 et $Y' - Y'_1$, etc., de manière à satisfaire aux mêmes formules écrites avec lettres à indices.

Par exemple, nous devons avoir :

$$Y' = f(Y, Z, M, N)$$

$$Y'_1 = f(Y_1, Z_1, M_1, N_1)$$

$$Y' - Y'_1 = f(Y - Y_1, Z - Z_1, M - M_1, N - N_1)$$

et par suite :

$$f(Y, Z, M, N) = f(Y_1, Z_1, M_1, N_1) + f(Y - Y_1, \dots)$$

équation fonctionnelle qui montre que f est une fonction linéaire et homogène de ses arguments.

De plus, la condition de comporter les cas particuliers donnés d'abord implique que ni Y' , ni N' ne doivent dépendre de Z , de même que ni Z' , ni M' ne doivent dépendre de Y .

Par raison de symétrie, Y' et N' ne doivent pas non plus dépendre de M ; ni Z' , ni M' de N .

De sorte que l'on est conduit à envisager des relations de la forme:

$$\begin{aligned} X' &= X \\ L' &= L \\ Y' &= a_1 Y + b_1 N \\ Z' &= a_2 Z + b_2 M \\ M' &= a_3 M + b_3 Z \\ N' &= a_4 N + b_4 Y, \end{aligned}$$

les coefficients a et b ne pouvant être fonction que de la vitesse v .

Par raison de symétrie encore, on peut préciser que $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$; $b_1 = -b_2$, $b_3 = -b_4$; et, si l'on exprime Y , Z , M , N en fonction de Y' , Z' , M' , N' à l'aide des équations ci-dessus, en imposant aux coefficients de Y' Z' M' N' d'être égaux entre eux comme le sont les a et b , toujours pour symétrie, on voit que:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 ; \quad b_1 = -b_2 = -b_3 = b_4 .$$

La condition d'invariance donne alors: $a^2 - b^2 = 1$.

Posons:

$$a^2 = \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)^{-1}$$

on déduit:

$$b^2 = \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)^{-1} \frac{v^2}{k^2}$$

La constante k a les dimensions d'une vitesse. Pour que a et b aient un sens, il faut que v n'atteigne pas cette valeur k . Or, v est la vitesse que nous donnons aux corps qui constituent le champ, par rapport à l'éther du lieu de l'expérience, vitesse dont

nous disposons par conséquent à notre gré et qui, quel que soit k , peut atteindre et dépasser k . Quand donc v atteint k , le phénomène qui consiste à transformer les forces électrique et magnétique non accentuées ne se produit plus. C'est-à-dire qu'aucune propagation n'a plus lieu du champ vers le point $x y z$. La vitesse k est donc la vitesse de propagation du champ électromagnétique dans l'éther, c'est-à-dire la vitesse c de la lumière.

Les formules de transformation cherchées sont donc identiques à celles que donne la relativité restreinte pour le passage d'un système d'axes à un autre animé par rapport au premier d'une vitesse v . Mais leur sens diffère de celui qui est attribué aux formules de la relativité de la même manière que le sens attribué au chapitre précédent aux formules de Lorentz diffère de celui que leur attribue la relativité. Il ne s'agit plus de deux systèmes simultanés, mais d'un système réel et d'un système virtuel. Ce ne sont plus deux indicatifs que l'on parle dans notre langage, mais un indicatif et un conditionnel.

II. — *Formules de Weber.* — Quand v est petit, l'une quelconque des quatre formules où entrent $Y Z M N$, par exemple la première, peut s'écrire si N est nul:

$$Y' = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)^{-1} Y$$

Et si l'on considère les potentiels U' et U dont ces quantités dérivent, on a:

$$U = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) U' .$$

Le potentiel U est le potentiel de Weber auquel il a été fait allusion au chapitre VII. Divers auteurs, et Tisserand en particulier, avaient essayé d'appliquer la formule de Weber au cas de la gravitation pour rendre compte du déplacement du périhélie des planètes. Mais elle ne donne pas le résultat escompté. Comme nous l'a fait remarquer M. Varcollier, elle n'aurait pu le donner qu'à condition, tout au moins, d'avoir été complétée pour tenir compte de la force électrodynamique.

III. — *Lois de l'électrodynamique.* — Absolument comme on le fait en relativité restreinte, à la seule différence du langage près, on peut déduire des formules trouvées, en plus de la loi de l'induction, la loi de Biot et Savart, et la formule de Laplace sur le champ d'un élément de courant.

IV. — *Traduction du langage de la relativité dans le langage de la mécanique ordinaire.* — Nous allons indiquer un moyen de traduire le langage de la relativité dans le langage classique que nous continuons à employer, les calculs et la démarche restant les mêmes. Nous y avons fait plusieurs fois allusion.

a) Ce moyen consiste dans l'usage d'une sorte de dictionnaire grâce auquel les mots :

« Système S en translation par rapport au système S' avec la vitesse rectiligne uniforme v , et servant comme le système S' à observer un événement $x y z t, x' y' z' t'$ », sont remplacés par ceux-ci :

« Système S en translation par rapport au système S' avec la vitesse v et servant à observer le mouvement fictif $x y z t$ d'un mobile soumis à un champ électromagnétique, et animé initialement de la vitesse v dans ce champ, tel qu'il se produirait si le champ agissait sur le mobile en mouvement comme sur le mobile en repos, alors que le système S' en repos dans le champ sert à observer le mouvement réel $x' y' z' t'$. »

b) L'observateur S' de la relativité évalue les composantes v'_x, v'_y, v'_z , de la vitesse du mobile qui est animé de la vitesse $v_x v_y v_z$ dans le système S par les formules :

$$v'_{x'} = \frac{v_x + v}{1 + \frac{v v_x}{c^2}}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y}{1 + \frac{v v_x}{c^2}}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{1 + \frac{v v_x}{c^2}}.$$

Au lieu de cette manière de parler, nous dirons que la vitesse qui serait $v_x v_y v_z$ dans le système S si le champ s'appliquait intégralement, c'est-à-dire dans le mouvement fictif, est en réalité v'_x, v'_y, v'_z , dans le système S'. Un conditionnel remplace

un indicatif du langage de la relativité. Ce serait pour une raison analogue que les rapports $\frac{c^2 G_1}{H}$, etc..., vérifient la formule de composition relativiste des vitesses comme on l'a vu au chapitre V.

c) Dans le langage de la relativité, un mobile par accroissements successifs de vitesse à partir de sa vitesse primitivement acquise ne peut dépasser la vitesse c de la lumière, qui apparaît ainsi comme une vitesse limite.

Dans le langage que nous parlons, nous traduisons que la vitesse v'_x , dans le mouvement réel par rapport au système du champ ne peut dépasser la vitesse c , et qu'elle n'atteint cette vitesse que si v est égal à c , auquel cas, d'après les formules de la cinématique ordinaire, v_x est nul nécessairement. La vitesse limite c prend ainsi un sens dynamique. M. Varcollier avait distingué, comme nous, la relativité cinématique de la relativité dynamique.

Si la vitesse c est infinie, ou peut être considérée comme telle, on voit que les formules se réduisent à des formules cinématiques. Cela signifie que la considération de mouvements réels et de mouvements fictifs ne correspond plus à rien, et que le champ agit sur un point en mouvement comme sur un point au repos.

V. — *La conservation de la forme des lois de l'éther.* — A partir des expériences dites de variabilité de la masse, interprétées comme montrant la variabilité de la force réellement appliquée avec la vitesse, nous avons pu déduire les équations de Lorentz. Nous avons obtenu aussi des formules de transformation des forces électriques et magnétiques identiques à celles de la relativité.

L'ensemble permet la conservation de la forme des équations de Maxwell. La question se pose dès lors de trouver le sens de cette transformation et de cette conservation.

Une charge électrique ou une masse magnétique étant supposée mobile dans un champ électromagnétique avec une vitesse très faible, de manière que le champ s'applique intégralement, l'étude du travail du champ sur cette charge ou cette

masse permet d'écrire les équations de Maxwell pour l'espace vide, par exemple. Si la charge ou la masse sont animées, dans le champ, d'une vitesse v assez grande, il y a lieu de distinguer le mouvement réel et le mouvement fictif qui aurait lieu si tout se passait comme si le champ s'appliquait intégralement.

Aux éléments dx, dy, dz de la trajectoire supposée décrite à faible vitesse et par suite avec application intégrale, vont correspondre les éléments dx', dy', dz' de la trajectoire réelle, qui leur sont liés, avons-nous vu, par les formules de Lorentz¹. Par le fait que des équations de Maxwell sont vérifiées avec les x, y, z , d'autres équations sont vérifiées avec les x', y', z' . Ces nouvelles équations se trouvent aussi être de la forme de Maxwell.

En d'autres termes, lors du passage du mouvement fictif, ou du mouvement à faible vitesse, au mouvement réel à vitesse importante dans le champ, chacun des éléments qui intervient dans la loi varie de telle sorte que la loi soit toujours la même et toujours vérifiée.

Il n'en est point ainsi de toutes les lois de la nature, tout au contraire, ainsi que le comporte le principe de Le Chatelier. On peut dire que d'après ce principe, la variation d'un des éléments a pour effet non seulement de faire prendre aux autres les valeurs convenables pour continuer à vérifier la formule mathématique qui exprime normalement la loi, mais aussi de créer, en plus de ces variations, des variations en quelque sorte parasites, dont l'effet, si elles étaient seules, serait d'imposer, d'après la formule, à l'élément atteint, une variation en sens contraire de celle qu'on lui a fait subir.

Il y a en quelque sorte d'après cela un moment fugitif, mais qui existe, où la formule n'exprime plus la loi véritable.

Rien de pareil n'existerait pour les lois de l'éther, en particulier pour celles constituées par les équations de Maxwell; l'éther ne serait pas doué de cette sorte d'inertie: les aberrations de M. Varcollier obéissent à la règle du maintien des lois de Maxwell.

¹ En même temps, aux forces électriques ou magnétiques X, Y, Z, L, M, N , en correspondent d'autres X', Y', Z', L', M', N' qui leur sont liées par les formules du paragraphe I.

On peut donc énoncer un principe tel que celui-ci: « Les lois des phénomènes physiques qui ont l'éther pour siège conservent leur forme lors des variations de l'un quelconque des facteurs qui interviennent dans l'expression de ces lois. »

Mettant en application ce principe, on peut évidemment déduire inversement que dans le cas du mouvement uniforme des corps électrisés ou aimantés, constituant un champ électromagnétique, les équations de Maxwell doivent se conserver; par suite que les coordonnées rapportées à deux systèmes, l'un lié au champ, l'autre restant au repos dans une position déterminée du champ, ont entre elles les relations constituées par les équations de Lorentz, et que les forces électriques et magnétiques réelles et fictives ont les relations retrouvées au paragraphe I.

Employant pour agir sur le champ les moyens les plus divers, tels que: introduction de morceaux de fer doux, effets d'inertie ou tous autres, nous pouvons faire usage, pour en étudier les effets, du principe général énoncé tout à l'heure.

Nous rétablissons ainsi, avec un sens différent, la forme tensorielle donnée en relativité aux équations de l'électromagnétisme.

La démarche et les calculs sont les mêmes que ceux de la relativité, et le langage employé par cette théorie se traduit facilement dans celui que nous parlons.

VI. — *Exemple. La relativité et les milieux réfringents.* — Les équations de Maxwell pour un milieu k, μ sont, dans un système au repos par rapport à ce milieu:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

et 5 équations analogues ($A = kX$, etc...; les A, B, C, P, Q, R étant les inductions).

Le principe de la relativité n'impose pas leur conservation dans un système en translation de vitesse v par rapport au premier. Ce n'est que dans le vide que le principe impose cette conservation.

Mais les formules de Lorentz n'en sont pas moins applicables. Elles donneraient des équations de même forme que celles qui sont écrites plus haut :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A'}{\partial t'} = \frac{\partial M'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial y'}, \quad \text{etc...} , \quad (1)$$

en posant :

$$A' = A, \quad M' = \frac{1}{\alpha} \left(M + \frac{v}{c} C \right), \quad \text{etc...} .$$

On en déduit les relations indiquées ci-dessous entre les majuscules accentuées d'un même système.

$$\left. \begin{aligned} A' &= k X' \\ B' &= \frac{k \alpha^2 Y' - \frac{v}{c} (1 - k \mu) N'}{1 - k \mu \frac{v^2}{c^2}} \\ C' &= \frac{k \alpha^2 Z' + \frac{v}{c} (1 - k \mu) M'}{1 - k \mu \frac{v^2}{c^2}} \\ P' &= \mu L' \\ Q' &= \frac{\mu \alpha^2 M' + \frac{v}{c} (1 - k \mu) Z'}{1 - k \mu \frac{v^2}{c^2}} \\ R' &= \frac{\mu \alpha^2 N' - \frac{v}{c} (1 - k \mu) Y'}{1 - k \mu \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ces relations ne sont pas les mêmes dans le système du milieu et le système en mouvement par rapport à lui : il le faut bien d'ailleurs, puisque le principe de relativité n'affirme point que l'on ne puisse pas mettre en évidence par expériences effectuées dans un même système un mouvement de ce système par rapport à un milieu matériel.

L'ensemble de (1) et (2) constitue les équations de l'électromagnétisme à l'intérieur du milieu en mouvement dans le champ. Elles avaient été obtenues par Minkowski, selon les

méthodes de la relativité. Le sens que leur donnait Minkowski différait de celui que nous leur donnerons de la même manière que nous avons eu l'occasion d'indiquer plusieurs fois dans des cas analogues: au lieu que dans la relativité, les deux systèmes accentué et non accentué sont envisagés simultanément comme réels, nous envisageons ici un des systèmes comme réel, l'autre comme fictif; au lieu que dans le langage de la relativité, on emploie l'indicatif pour chacun des deux systèmes, nous employons ici l'indicatif pour le système réel, le conditionnel pour le système virtuel. Or, si l'on cherche, comme on doit le faire, à interpréter le moins possible l'expérience, on doit admettre que les expériences qui constituent une vérification quantitative des équations (2), s'accordent qualitativement mieux avec le langage employé ici.

On a constaté l'existence d'une induction magnétique $Q' R'$ au sein d'un milieu animé par rapport à un champ purement électrique $X Y Z$ d'une vitesse v . C'est bien strictement ce que nous disons.

Il n'a pas été constaté qu'un champ purement électrique étant supposé exister dans un milieu maintenu au repos par rapport aux murs du laboratoire, le seul mouvement de l'observateur et de ses instruments d'observation par rapport à ce champ, à ce milieu, et à ces murs, lui fit apparaître l'existence dans ce milieu de l'induction $Q' R'$, dont rend compte la théorie de la relativité.

On peut noter également une autre différence intéressante dans la façon d'interpréter en relativité d'une part, et dans nos idées d'autre part une conséquence des équations ci-dessus.

Supposons que, dans le système du milieu k, μ règne un champ électromagnétique $X Y Z L M N$, et que dans un système en translation rectiligne de vitesse v par rapport au milieu, règne un pur champ électrique $X' Y' Z'$.

Une charge e part du repos dans le premier système avec une accélération dont une composante est:

$$\frac{d^2 y}{dt^2}$$

On calcule comme dans le cas du vide, à l'aide des formules de Lorentz, que :

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dt^2} .$$

La composante de la force mécanique dans le premier système est $F_y = eY$.

Admettons que, dans le second, elle soit $F'_{y'} = eY'$.

On calcule que :

$$Y = \frac{1}{\alpha} \left(Y' + \frac{v}{c} R' \right), \quad \text{avec} \quad R' = - \frac{v}{c} \frac{((1 - k\mu) Y')}{1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}},$$

d'où

$$Y = \frac{\alpha Y'}{1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}}$$

et

$$F'_{y'} = eY' = \frac{e}{\alpha} Y \left(1 - k\mu \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - k\mu \frac{v^2}{c^2} \right) F_y .$$

L'équation: $F_y = m_0 \frac{d^2 y}{dt^2}$ devient dans le second système :

$$F'_{y'} = \frac{m_0 \left(1 - k\mu \frac{v^2}{c^2} \right)}{\alpha^3} \frac{d^2 y'}{dt'^2}$$

ce qui n'est pas l'équation voulue. La masse dépendrait du milieu où le corps est plongé. Pour éviter cela, il faudrait que :

$$F'_{y'} = \frac{\alpha^2 e Y'}{1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}} .$$

Or, on dispose à volonté de Y' dans le système en mouvement. Il suffit de maintenir dans ce système les charges voulues. Par conséquent $F'_{y'}$ serait infini pour $v = \frac{c}{\sqrt{k\mu}}$ et changerait de sens quand v franchirait cette valeur. Cela ne paraît pas pouvoir être admis. Dans nos idées, cela signifie seulement que la vitesse maxima que le champ pourra communiquer à la charge sera $\frac{c}{\sqrt{k\mu}}$.

VII. — *Réflexions sur le principe de la relativité lui-même.* —

Il faut distinguer entre le développement de la théorie de la relativité et particulièrement l'appareil mathématique qu'elle met en œuvre d'une part, et, d'autre part, ce qu'il y a de spécifiquement relatif dans la théorie, c'est-à-dire le langage dans lequel elle est formulée, langage qui est, en quelque sorte, fixé dès qu'on admet le principe de conservation de la forme des lois pour les divers observateurs par qui l'on peut faire étudier un même phénomène.

Nous nous sommes efforcés d'établir, dans le langage de la dynamique rationnelle et de la physique classique, une théorie qui rendit compte de tous les phénomènes où l'on peut voir des fondements *a priori* ou des vérifications *a posteriori* du principe de relativité. La théorie ainsi établie, ressemble de très près à celle de l'aberration de Varcollier. Elle fait usage le plus souvent d'un appareil mathématique identique ou analogue à celui qu'emploie la théorie de la relativité. Elle s'exprime en un langage dans lequel peut se traduire une grande partie du langage de la relativité au moyen d'une sorte de lexique dont nous avons donné au paragraphe IV une esquisse. Du moment que nous admettons ainsi comme possible une traduction presque complète de la dynamique de la relativité dans le langage de la dynamique newtonienne, nous admettons aussi par le fait même que cette théorie est exempte de contradictions, du moins dans tout ce qu'elle a de traduisible, car nous ne doutons pas que la mécanique newtonienne ne soit exempte de contradictions.

Or, une critique valable d'une théorie ou d'un principe physique ne peut avoir pour base que la mise en évidence d'une contradiction interne — et encore faudrait-il que c'en fût une d'une importance capitale — ou bien que la mise en évidence d'un désaccord avec l'expérience: c'est ce qui s'est produit comme nous l'avons exposé dans notre première partie.

Mais si la dynamique de la relativité doit être considérée comme exempte de contradictions, il n'en est pas nécessairement de même de la partie non dynamique de la théorie. Et le seul genre de contradictions qui puissent être faites au prin-

cipe consiste à trouver une loi physique qui ne conserve pas sa forme en tous cas.

Cette loi doit évidemment, si elle existe, être une loi qui, compatible, bien entendu, avec les équations de Maxwell, n'en soit pas nécessairement une conséquence. Il se produira alors peut-être, lorsqu'on fera subir à cette loi, pour le passage d'un système d'observation à un autre, la transformation qui conserve la forme des équations de Maxwell, qu'elle ne se conservera pas. La loi dont il va être question est dans ce cas.

Soit un flux de particules électrisées orienté suivant les axes Ox et $O'x'$ de deux trièdres trirectangles en translation uniforme de vitesse v l'un par rapport à l'autre. Entre les intensités électrostatique I et électromagnétique i du courant à quoi ce flux est équivalent, existe la relation $\frac{I}{i} = c$, du moins dans le système $Oxyz$ où le conducteur équivalent serait au repos; en un point d'ordonnée y du plan des xy , où la force magnétique est N parallèle à Oz et la force électrique X parallèle à Ox , l'intensité électromagnétique a la valeur:

$$i = \frac{1}{2} Ny ;$$

quant à l'intensité électrostatique, les densités étant $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_n$ et les vitesses $u_1, u_2 \dots u_n$, elle est:

$$i = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots \rho_n u_n .$$

La loi envisagée, dans le système considéré, s'écrit donc:

$$\frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots + \rho_n u_n}{\frac{1}{2} Ny} = c .$$

La transformation par les formules de la relativité pour le système $O'x'y'z'$ montre que, dans ce système elle s'écrirait:

$$\frac{\rho'_1 (u'_1 - v) + \rho'_2 (u'_2 - v) + \dots \rho'_n (u'_n - v)}{\frac{1}{2} N' y' \alpha^2}$$

et que, par suite, elle ne se conserverait pas.

Chapitre IX

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

I. — *Ondes et forces.* — La mécanique ondulatoire est basée sur le principe suivant :

« Chaque fois que, dans un système de référence, un élément matériel au sens le plus général du mot, fragment de matière ou énergie électro-magnétique, possède une énergie W , il existe dans ce système un phénomène périodique de fréquence ν définie par la relation du quantum, $W = h\nu$, h étant la constante de Planck. »

Nous n'avons aucune raison de ne pas faire nôtre ce principe en tant qu'il s'applique aux phénomènes gravitationnels ou électromagnétiques.

Au chapitre VI en effet nous avons admis que le champ de gravitation qui entoure un centre matériel est produit par un phénomène périodique constitué lui-même par des ondes longitudinales d'une nature spéciale dont la demi-vibration vers le centre développe dans le champ une force plus grande que l'autre demi-vibration. Quant à la fréquence de ce phénomène, nous trouvons dans l'interprétation que nous avons donnée au chapitre VII de l'effet Einstein sur le déplacement des raies dans le spectre solaire, d'ordre lumineux, il est vrai, des raisons de croire qu'en effet la fréquence est proportionnelle à l'énergie de l'élément de matière. On pourrait en quelque sorte dire que l'effet Einstein est une vérification expérimentale du principe de L. de Broglie.

De la même façon, nous avons admis aux paragraphes précédents que le champ électrique était constitué par un phénomène périodique analogue.

L'équation réglant la propagation d'un phénomène périodique à demi-vibrations développant des forces égales serait

de la forme suivante pour un système d'axes rectangulaires au repos dans l'ensemble de l'éther :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 ,$$

v désignant la vitesse de la propagation, ou encore :

$$\Delta \psi + \frac{4 \pi^2 n^2 v^2}{c^2} \psi = 0$$

n étant un indice de réfraction.

Une solution de cette équation est l'onde monochromatique plane,

$$\psi = a \cos 2 \pi \varphi$$

avec la phase :

$$\varphi = vt - \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) ,$$

α, β, γ étant les trois cosinus directeurs d'une même direction.

Elle ne peut convenir aux vibrations que nous envisageons comme constituant le phénomène périodique gravitationnel ou électrique, puisque, dans l'aspect macroscopique des phénomènes elle ne ferait apparaître aucune force. L'équation de la propagation de ces vibrations doit être telle que, si on étudie les solutions par des procédés analogues à ceux de l'optique géométrique, elle fasse apparaître une force et conduise aux équations générales de la mécanique newtonienne.

Au chapitre VII nous avons rappelé que la dynamique de la relativité généralisée pouvait être considérée comme un chapitre de la mécanique newtonienne, à savoir comme la mécanique newtonienne du champ de force de la gravitation et que la dynamique de la relativité restreinte pouvait apparaître comme la dynamique newtonienne du champ électromagnétique, les formules et les calculs demeurant les mêmes et les langages employés pouvant se traduire en quelque sorte l'un dans l'autre.

D'une manière analogue, la mécanique ondulatoire peut être traduite et apparaître comme un chapitre de la mécanique newtonienne des champs agissant par ondes de force.

On peut faire correspondre aux éléments dynamiques du champ des éléments ondulatoires de l'onde qui le propage et l'entretient. En chaque point du champ au vecteur impulsion I correspondra un vecteur onde O au sens de L. de Broglie. Il y aura pourtant une différence, et capitale. Au lieu que l'onde soit associée à un mobile en mouvement dans le champ, c'est au champ lui-même qu'elle sera associée. Plus exactement, l'onde sera une onde double provenant à la fois du champ et du corpuscule qui lui est soumis, puisque ce dernier est lui même doué de propriétés gravifiques ou électriques.

On montre en mécanique ondulatoire que les composantes de la quantité de mouvement d'un mobile soumis à un champ sont:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

φ désignant la phase de l'onde associée, ou encore que les composantes de la force du champ ont pour valeur:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Dans ce qui va suivre, nous adopterons désormais la marche inverse. Nous supposerons que les composantes de la force du champ électrostatique ou du champ gravifique d'un centre, ou même d'un champ quelconque agissant par ondes de force, peuvent se mettre sous la forme:

$$f_x = \frac{m d^2 x}{dt^2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

et deux expressions analogues.

On en déduit:

$$m \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_1(x, y, z).$$

Et si S est la fonction de Jacobi du champ, dont les dérivées partielles en $x y z$ sont, au signe près, égales à la quantité de mouvement du point, on arrive à: $S = \varphi - \int k_1(x y z) dx + k_2(y z)$, les fonctions k_1 et k_2 pouvant, selon les champs et les conditions initiales, être nulles.

Comme les champs que nous considérons admettent un potentiel¹, il faut que l'expression de f_x soit la dérivée partielle en x d'une certaine fonction. Ceci a bien lieu avec la valeur trouvée pour $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et les valeurs analogues qu'on aurait pour $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, en particulier si l'on a :

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{mdx}{dt}, \text{ etc...}$$

Si T désigne la demi-force vive, on voit que la fonction potentielle a pour expression, à une constante près : $F = \frac{d\varphi}{dt} + T$, et si l'on développe cette équation, on trouve qu'elle se confond à la fois avec l'équation de Jacobi, pour le champ et l'équation de l'optique géométrique pour l'onde. La quantité $d\varphi$ est, au signe près, le terme d'action élémentaire du champ. Le potentiel est, à une constante près :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Si l'on pouvait admettre que l'on connût par avance le potentiel du champ d'une façon très précise, on aurait ainsi une équation en φ . Mais en réalité, on se rend compte intuitivement que le potentiel d'un champ agissant par ondes peut dépendre des dimensions relatives du mobile et de la longueur d'onde du champ. Le potentiel $\frac{KM}{r}$ de la gravitation par exemple peut n'être, même dans le cas d'un corps au repos dans un champ, qu'une apparence d'ensemble. Si le corpuscule soumis au champ est de dimensions infinitésimales, il est possible que le potentiel dépende de l'amplitude de l'onde. Ce sont là des idées que l'on pouvait parfaitement avoir déjà avant la découverte de la mécanique ondulatoire. Le terme dépendant de l'amplitude disparaîtrait quand on considérerait un mobile ayant d'assez grandes dimensions, par un effet de moyenne, qui, en somme, n'est autre que celui que constate la mécanique ondulatoire dans la démonstration du théorème d'Ehrenfest.

¹ Du moins si le point est en repos dans le champ.

Il y aurait, d'après cela, deux catégories de potentiels: des potentiels ondulatoires, et d'autres qui, dans l'aspect macroscopique du moins, peuvent être tenus pour ne pas être ondulatoires.

Par exemple, dans le choix des équations de propagation de la mécanique ondulatoire, on fait usage du critérium suivant: quand la constante h de Planck peut être considérée comme infiniment petite, il faut que les équations de propagation puissent conduire aux équations de la dynamique classique ou relativiste. Le même critérium serait valable pour déterminer les potentiels. Le potentiel microscopique d'un champ agissant par ondes devra, pour h infiniment petit, redonner le potentiel classique fonction de point seulement, ou bien un potentiel dépendent de la position et de la vitesse du mobile dans le champ. Le fait que la gravitation et l'électricité statique agissent par ces ondes spéciales est la raison profonde pour laquelle l'équation de Schrödinger, qui représente ces ondes, donne ce résultat que la phase de l'onde coïncide avec la fonction de Jacobi. Ou bien, si l'on préfère, c'est parce qu'il existe des ondes dont la phase peut coïncider avec la fonction de Jacobi, pour le champ de gravitation, par exemple, que la gravitation peut être considérée comme agissant par le moyen de ces ondes.

II. — *Les ondes de la mécanique ondulatoire considérées comme liées aux champs.* — Si dans l'équation des ondes de la mécanique ondulatoire associées à un corpuscule de masse m , en mouvement dans un champ $F(x, y, z, t)$ on substitue la forme:

$$\psi = a \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$$

il vient, en séparant le réel et l'imaginaire, et en négligeant le terme en Δa comme on peut le faire quand l'optique géométrique est valable, c'est-à-dire quand h peut être considéré comme très petit:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + F = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2m} a \Delta \varphi = \frac{\partial a}{\partial t},$$

le mobile se déplaçant et l'onde se propageant suivant Ox .

Considérons la seconde équation. Elle relie la longueur d'onde $\lambda = -h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{-1}$ à l'amplitude a . Mais la longueur d'onde λ est ainsi définie de façon un peu arbitraire.

Si l'on maintient la définition de la longueur d'onde ordinairement donnée, c'est-à-dire si on la considère comme la longueur dont il faut se déplacer à temps constant pour faire varier la phase de l'unité, on voit qu'il faut considérer en chaque point deux longueurs d'onde ¹, provenant de l'équation:

$$\frac{\varphi}{h}(x_0 + \lambda) - \frac{\varphi}{h}(x_0) = \pm 1$$

d'où deux valeurs λ_1 et λ_2 de signes contraires et de valeurs absolues différentes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0 + \theta_1)^{-1} \\ \lambda_2 &= h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0 - \theta_2)^{-1}. \end{aligned}$$

¹ On peut aussi présenter les choses sous une forme, moins bonne, sans doute, parce qu'elle peut paraître jusqu'à un certain point comme fictive et purement formelle, mais qui a l'avantage de se relier à des résultats plus généralement admis.

L'onde $\psi = a \sin 2\pi(\nu t - \varphi)$ de la mécanique ondulatoire peut être décomposée en deux ondes, l'une convergente, l'autre divergente:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_1 \sin 2\pi(\nu t - \varphi_1) \\ \psi_2 &= a_1 \sin 2\pi(\nu t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Il faut alors avoir:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2a_1 \sin 2\pi \left(\nu t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \cos 2\pi \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

La longueur d'onde est alors

$$-\left(\frac{d\varphi}{dl} \right)^{-1} = -\frac{2}{\frac{\partial \varphi_2}{\partial l} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial l}}.$$

Comme l'onde n'est pas stationnaire $\frac{\partial \varphi_2}{\partial l}$ n'est pas égal à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial l}$. Or, ces quantités sont, en valeur absolue, les inverses des longueurs d'onde λ_2 et λ_1 des ondes convergente et divergente. Ainsi s'introduisent, mais d'une façon mathématique et non plus réellement physique, les deux longueurs d'onde en chaque point.

On a sensiblement :

$$\lambda = -h \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{-1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} .$$

Décomposons la seconde équation en deux, l'une contenant λ_1 , l'autre λ_2 , et telle que leur demi-somme redonne cette équation. On aura ainsi deux équations contenant les grandeurs physiques véritables λ_1 et λ_2 .

On voit qu'il faudra introduire deux valeurs a_1 et a_2 de l'amplitude, l'une correspondant à la vibration de la grandeur oscillante d'un côté de sa position d'équilibre, l'autre à sa vibration de l'autre côté.

Or, on ne voit pas comment expliquer ces deux amplitudes si la vibration est transversale tandis qu'elles s'expliquent sans difficultés si la vibration est longitudinale.

Tout cela est d'accord avec la conception de l'onde de force longitudinale, à demi-vibrations développant des forces contraires et d'inégales intensités et donnant en moyenne une force résultante qui est la force du champ ¹. Cette onde est associée non au mobile, mais au champ (champ double du corpuscule et du champ principal).

Les champs gravifiques ou électrostatiques agissent par ondes de force dont la phase coïncide avec la fonction de Jacobi ². Les corps qui rayonnent sans créer de champ émettent des ondes dont on peut considérer aussi comme cas limite que la phase coïncide avec une fonction de Jacobi, le principe de Fermat coïncidant avec celui de Maupertuis.

¹ En fait d'ailleurs, ce que nous demandons à l'onde c'est précisément de donner une force résultante. Les demi-vibrations doivent donc développer des forces inégales. Un moyen consiste donc à supposer des amplitudes inégales. Mais on pourrait voir qu'on arrive aussi bien à tous les résultats essentiels indiqués ici en supposant une amplitude unique en chaque point, mais par contre des « demi-périodes » inégales; l'oscillation de 0 à a ou vice-versa dans un sens, étant décrite dans un temps τ_1 ; celle dans l'autre sens dans un temps τ_2 .

² La théorie des ondes de force n'est donc pas la théorie de l'onde pilote, puisque ces ondes sont liées aux champs. C'est pourquoi on n'y rencontre pas les difficultés qu'on trouvait dans la théorie de l'onde pilote.

Quand le terme en Δa n'est pas négligeable, le potentiel n'est pas F , mais diffère de F dans un champ de potentiel macroscopique F , par une quantité F_1 . On comprend que, selon que la longueur d'onde est faible ou non, la force moyenne soit — grad. F , ou — grad. $(F + F_1)$. Pour que la mécanique classique puisse absorber la mécanique ondulatoire il faut et il suffit que la quantité F_1 dont nous concevons ainsi l'existence ait la valeur:

$$-\frac{8\pi^2 m \Delta a}{h^2 a}.$$

Mais dans un cas comme dans l'autre, c'est là d'une force moyenne qu'il s'agit. On pourrait envisager de remonter plus loin et de chercher la force microscopique à chaque instant; cette force microscopique devrait donner en moyenne la force macroscopique — grad. F ou — grad. $(F + F_1)$, selon que la longueur d'onde est faible ou non par rapport aux dimensions du mobile. C'est en cette dernière remarque simplement que consisterait la traduction à donner du théorème d'Ehrenfest, dont la démonstration réside dans le fait que l'intégrale de $a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}$ prise dans un volume suffisamment vaste est voisine d'être nulle. Alors le terme grad. F_1 disparaît dans l'effet macroscopique sur l'ensemble de ce volume.

En somme dans un champ agissant par ondes de force, on aurait à considérer une force microscopique qui serait, comme l'onde, une fonction sinusoïdale du temps, et que ne considèrent actuellement ni les potentiels classiques ou relativistes, ni les potentiels de la mécanique ondulatoire; une force macroscopique très approchée dépendant du « potentiel quantique » et qui est celle du domaine propre de la mécanique ondulatoire, le potentiel quantique disparaissant quand on a affaire à un mobile d'assez grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde; une force macroscopique moins approchée, suffisante cependant quand la longueur d'onde peut, comme la constante h , être considérée comme très petite, et qui est celle qui dérive du potentiel classique, enfin une force dépendant de la vitesse du mobile dans le champ, ce qui tient compte des corrections de

relativité, lesquelles s'appliqueraient à l'une quelconque des trois forces ci-dessus.

On peut traiter cette question de la façon inverse de celle que nous venons de suivre. Si les ondes de la mécanique ondulatoire sont *a priori* considérées comme liées aux champs, comment expliquer que les équations de la mécanique ondulatoire, dont l'accord avec l'expérience est incontestable, soient différentes, dans le domaine atomique, des équations des anciennes mécaniques ?

Pourquoi, en d'autres termes, le potentiel microscopique ou atomique d'un champ de force naturel peut-il différer du potentiel macroscopique ou cosmique ?

Il suffit d'admettre — et rien ne s'y oppose — que le potentiel microscopique des champs naturels, champ électromagnétique ou champ de gravitation, est d'une nature ondulatoire.

La force agissant sur un corpuscule de dimensions extrêmement petites par rapport à la longueur d'onde du champ serait alors une fonction sinusoïdale du temps.

Aucune expérience ne permet pour le moment de se prononcer sur ce point. Mais si ce ne sont là pour le moment que des vues de l'esprit, ne sont-elles pas en tout cas d'accord avec la notion même du « potentiel » ou plus généralement même de la force, qui peut ne pas dériver d'un potentiel au sens précis de ce mot. Nous réfléchirons au dernier chapitre sur les conditions que doivent remplir une expérience ou une observation pour qu'on puisse les considérer comme mettant en cause les principes d'une mécanique, quelle qu'elle soit, et nous concluons qu'il n'existe pas en ce moment d'expériences satisfaisant à ces conditions.

Pour le moment, il suffit de noter que c'est l'expérience seule qui peut donner la loi de la force, ou du potentiel, s'il en existe un au sens précis du mot, et que rien par conséquent ne permet *a priori* de croire que cette loi doit être la même dans le domaine atomique et dans le domaine cosmique.

Si l'on vient à constater un désaccord entre la théorie et l'expérience, rien ne permet, le plus souvent, nous le verrons, de mettre en cause les principes; presque toujours il suffira de mettre en cause la loi de la force.

C'était en étudiant la possibilité de déduire d'une hydrodynamique de l'éther les équations de l'électromagnétisme que l'auteur était arrivé à la conception d'un éther susceptible de propager des ondes longitudinales. Inversement, l'interprétation ci-dessus, qui découle des formules de la mécanique ondulatoire, oblige, semble-t-il, à considérer les ondes de cette doctrine comme un véritable phénomène physique lié cependant au champ et non au mobile. On ne saurait y voir un simple symbole mathématique, car, dans cette manière de voir, on ne s'expliquerait guère qu'il soit possible de trouver un résultat, concernant le type longitudinal ou transversal de l'onde. Mais si ces ondes sont un phénomène physique véritable, il est difficile de ne pas admettre que l'éther les propage; cet éther capable de propager des ondes longitudinales est donc capable de compressions et de détentes, donc de mouvement d'ordre hydrodynamique. Il doit par suite, être tenu pour justiciable d'une hydrodynamique des fluides, parfaits ou non. Et l'on doit s'attendre à ce que, dans quelque canton de la physique de l'éther, on trouve des lois se formulant sous une apparence analogue à celles des équations de l'hydrodynamique. C'est bien ce qui a lieu; les équations de l'électromagnétisme et les équations de l'hydrodynamique peuvent se présenter sous la même forme.

Quant à l'amplitude de l'onde, il semble que l'on puisse établir que son carré $a^2 = \psi^* \cdot \psi$, c'est-à-dire l'intensité de l'onde, mesure en moyenne à chaque point, et à chaque instant, la densité moyenne de l'éther affecté à la fois par le champ et par le corpuscule.

On pourrait faire remarquer que l'équation de propagation des ondes qu'on déduit des équations de Maxwell-Lorentz n'est pas la même que celle de Schrödinger qui est donnée ici comme représentant les ondes de force électro-statiques ou gravifiques. On perdrait ainsi de vue que, dans ces relations, les potentiels scalaire et vecteur, les forces électriques et magnétiques, figurent sous leur aspect macroscopique, ainsi que dans les équations de propagation qu'on en déduit. Au contraire dans les équations des ondes électrostatiques ou gravifiques considérées la vibration figure sous son aspect microscopique.

Par exemple, il y a des raisons de croire que le potentiel vecteur peut être figuré comme la vitesse d'un courant d'éther par rapport à l'ensemble d'un volume d'éther immobile. Il y a d'autres raisons de croire que le champ électrostatique est produit par des ondes de la nature considérée plus haut; ces ondes donnent aux particules d'éther des vitesses qui, dans l'aspect microscopique, viennent modifier celle qui est considérée comme potentiel vecteur¹.

III. — *La diffraction des électrons. Probabilisme et déterminisme.* — Quant aux expériences montrant la diffraction des électrons par les cristaux, nous pouvons aussi parfaitement traduire dans le langage de nos conceptions la théorie qu'en donnent les auteurs de la mécanique ondulatoire.

Dans nos idées, un électron développe autour de lui une onde du type électrostatique. L'ensemble des électrons d'un nuage dirigé sur un cristal développe une onde résultante du même type accompagnant le flût.

L'intensité de l'onde, variable selon les points, passe par un maximum en chaque point où se trouve un électron; elle peut servir de mesure en chaque point, à l'éloignement des électrons du nuage; elle peut définir la probabilité de présence des électrons en chaque point.

C'est là le principe qu'en mécanique ondulatoire on appelle le principe des interférences. En possession de ce principe et de l'équation de Schrödinger, nous pouvons reproduire intégralement les théories qu'on donne en mécanique ondulatoire des expériences de diffraction.

¹ Cette différence d'échelle des phénomènes électromagnétiques, lumineux ou X d'une part et des phénomènes électrostatiques ou gravifiques d'autre part, serait sans doute ce qui pourrait expliquer qu'un même éther puisse présenter à la fois l'état de mouvement correspondant aux vibrations ou pulsations de l'une des catégories et aux ondes de force ou pulsations de force de l'autre. On pourrait penser, par exemple que, dans l'un des cas; c'est une tranche entière d'éther qui est affectée dans son ensemble, et que dans l'autre cas se sont les éléments constituants de cette tranche qui sont affectés à l'intérieur de la tranche. Si au contraire, dans chaque cas on admettait que c'est l'élément d'éther qui est affecté, on comprendrait mal qu'une vibration lumineuse conservât son individualité dans un champ d'ondes de forces.

Cependant ce n'est pas cette explication que j'admettrais. Selon les idées générales exposées ici, je pense que ce n'est pas l'onde ainsi liée aux électrons en mouvement (dont je pense aussi qu'elle existe, non pas en raison de leur mouvement, mais en raison de leur charge électrostatique) dont on constate ainsi la diffraction par des cristaux ou même par des réseaux, mais bien l'onde de force électrostatique du champ lui-même sous l'action duquel les électrons sont mis en mouvement. Le groupement des électrons dans les diverses régions de l'onde diffractée serait simplement dû à leur obéissance à la force du champ variable selon les régions d'interférence ou de renforcements. Plus exactement, ce serait l'onde double du champ et des électrons qui serait ainsi réfractée ¹.

La théorie du phénomène serait ainsi la suivante: Sous l'action de la différence de potentiel P, l'électron de masse m et de charge e prend une accélération ²:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e \frac{\partial P}{\partial x}$$

d'où, si v est la vitesse, et si l'on admet en première approximation que la force du champ s'applique sans être modifiée par la vitesse:

$$\lambda = - h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{h}{mv}$$

le calcul se conduit ensuite absolument comme celui de la mécanique ondulatoire sur le même sujet et l'on arrive à:

$$\lambda = h \sqrt{\frac{150}{meP}}$$

avec P en volts.

¹ L'expérience de Bothe prouvant que le rayonnement d'un atome peut être concentré en direction et non pas réparti sur la surface d'une onde sphérique me paraît aussi d'accord avec la conception de l'onde de force longitudinale. Rapprocher aussi des expériences d'Emden et de Parenty.

² Ainsi, la phase φ de l'onde, et par suite λ sont déterminées uniquement par P, puisque e/m et e sont les mêmes pour tous les électrons. Il semble qu'il y ait là une raison de plus de rapporter l'onde aux électrons et au champ, et non aux électrons seuls.

Pour distinguer si, dans l'expérience, l'onde diffractée est liée aux électrons comme le veut l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire, ou si elle n'est autre que l'onde de force électrostatique de la différence de potentiel P qui produit le champ, il faut recourir à l'expérience.

J'envisagerais une expérience de diffraction des électrons où ceux-ci seraient freinés d'une façon quelconque, par exemple en leur faisant traverser un milieu matériel, sans que toutefois ce milieu agisse sur l'onde électrostatique P, ou encore une expérience où ils seraient déviés hors du champ électrostatique avant d'atteindre le cristal diffractant; ou même encore une expérience dans laquelle des particules électrisées très fines, *en repos*, sur une plaque de verre seraient soumises à l'action d'un rayonnement électrostatique diffracté par un cristal. Si ces particules se concentrent suivant certaines lignes, il sera bien évident que cette concentration tient, non pas à leurs vitesses, mais à des ondes existant en dehors d'elles; en fait on ne pourra pas employer des particules de vitesse nulle, mais on emploiera des électrons lents émis par une source dans une direction perpendiculaire à celle du rayonnement électrostatique reçu et diffracté par le cristal.

L'onde étant liée au champ, il ne serait plus indispensable d'interpréter comme on a été obligé de le faire dans ces dernières années en mécanique ondulatoire le carré de son amplitude comme la probabilité de présence d'un corpuscule en chaque point. Le probabilisme ne s'imposerait plus de façon inéluctable. Le déterminisme recevrait peut être à nouveau une autorisation d'existence même pour les processus de l'échelle atomique.

Parmi les raisons qu'on peut avoir en plus de celles données dans notre I^{re} partie¹, et à défaut de l'expérience non encore réalisée, de croire que la longueur d'onde ne doit pas être physiquement liée à la vitesse d'une manière directe, par la formule:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

¹ *Archives*, vol. 28, fascicule 4 et 5, 1946.

peut-être doit-on considérer celle-ci. Supposons qu'une expérience fictive de diffraction ait eu lieu dans un milieu matériel réfringent d'indice n . Le calcul montrera que la longueur d'onde associée sera :

$$\lambda_n = \frac{h}{mv_n} = \frac{h}{\sqrt{2meP_n}}$$

alors que dans le vide, elle aurait été :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meP}}$$

Or, si k désigne la constante diélectrique du milieu, on a, toutes choses égales d'ailleurs :

$$P_n = \frac{P}{k}$$

D'où

$$\frac{\lambda_n}{\lambda} = \sqrt{k}$$

Le milieu présente donc pour l'onde un indice égal à $\frac{1}{\sqrt{k}}$, inverse, on peut le remarquer en passant, de celui de l'onde électromagnétique dans un diélectrique.

Supposons maintenant que la longueur d'onde doive être liée seulement à la vitesse du corpuscule, indépendamment de la cause qui a pu provoquer le mouvement. On ne voit pas comment l'onde en question peut dépendre des propriétés électromagnétiques du milieu, alors que cela n'a rien d'étonnant si l'onde est liée au champ qui détermine le mouvement.

Une autre raison qu'on peut donner est celle-ci. Considérons, l'extinction par un miroir d'un rayon lumineux polarisé. L'amplitude s'annulant, si elle représente la probabilité de présence des photons, ceux-ci sont-ils détruits ? C'est peu croyable. On doit retrouver quelque part l'énergie de l'onde incidente et par suite les photons. Il est vrai qu'il peut exister dans la substance du miroir des ondes nouvelles. En définitive, seules de nouvelles expériences pourront renseigner utilement.

IV. — *Stabilité des orbites quantifiés.* — La théorie de la stabilité des orbites quantifiés que donne la mécanique ondulatoire peut être maintenue ici, non pas dans son principe, mais dans son développement.

Pour que le mouvement d'un électron de l'atome soit stable, il faut que la vitesse de ce corpuscule produite par l'onde de force du noyau, varie de quantités infiniment petites quand on vient à faire subir au mobile un déplacement virtuel $\alpha \beta \gamma$ à partir d'un point $x y z$ fixé sur sa trajectoire. La vitesse ayant pour composantes $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, etc..., on peut voir que la condition pour qu'il en soit ainsi est que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, etc. soient infiniment petites dans le déplacement virtuel en question (non dirigé suivant la trajectoire).

Si $a(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$ représente l'amplitude de l'onde, on peut remplacer cette quantité par $b(\alpha, \beta, \gamma)$. L'onde satisfaisant à l'équation de propagation de Schrödinger, on peut voir que b devra satisfaire à l'équation suivante:

$$\Delta b + \frac{8\pi^2}{h^2} (W - F + \text{constante}) b = 0$$

en substituant dans l'équation de Schrödinger la fonction d'ondes qui sera alors:

$$\psi = b e^{\frac{2\pi i}{h} \left[Wt - \varphi(xyz) - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]}$$

L'équation en b est celle à laquelle aboutit la mécanique ondulatoire à partir de l'hypothèse que l'onde correspondant au mouvement stable est une onde stationnaire. Hypothèse inadmissible dans nos idées, puisque à une telle onde correspondrait une force nulle, macroscopiquement et microscopiquement. Mais à partir de cette équation tout le développement donné en mécanique ondulatoire se maintient.

J'ajouterai seulement que la théorie ondulatoire de la radioactivité par franchissement des seuils nucléaires par les électrons des atomes se maintient aussi.

V. — *Les relations d'incertitude d'Heisenberg.* — Parmi les idées générales qui font l'objet de ce livre, il en est une qui consiste à envisager la force ou le potentiel des champs gravifiques et électromagnétiques comme due à une onde de force ou, plus exactement, à un « groupe d'ondes » de force. La longueur d'onde, l'amplitude et la phase des ondes du groupe sont en rapport avec le potentiel du champ. Un train d'ondes, limité dans l'espace et dans le temps, exige pour sa représentation un ensemble d'ondes monochromatiques, dont les nombres d'ondes, inverses des longueurs d'ondes, remplissent des intervalles, liés à la longueur δl du train d'ondes par la relation :

$$\delta N \times \delta l \geq 1 .$$

A chaque nombre d'onde correspondrait une formule de potentiel. La superposition de ces potentiels primaires donnerait le potentiel résultant du champ. A chaque potentiel primaire correspondrait un mouvement d'un mobile dans le champ. Les variations δP du potentiel correspondant aux variations δN du nombre d'ondes représentent les différences qu'aurait le mouvement résultant dû au potentiel résultant avec chacun des mouvements primaires.

Nous avons exposé les raisons qu'on peut avoir de considérer l'onde de la mécanique ondulatoire comme liée aux champs envisagés dont elle serait le moyen d'action et non pas directement au mouvement du mobile dans le champ : c'est ce que nous exprimons en appelant cette onde du nom d'onde de force.

La principale de ces raisons est qu'ainsi disparaissent les difficultés d'interprétation de l'amplitude de l'onde et de la relation qui existe entre la phase et l'amplitude. On sait que, dans les interprétations probabilistes, auxquelles ont conduit ces difficultés et qui sont basées sur les idées d'Heisenberg, le carré de l'amplitude de l'onde associée au corpuscule mesure la probabilité de présence du corpuscule en chaque point. L'onde n'est plus alors un phénomène physique, mais seulement la représentation symbolique d'une probabilité.

Quand une onde lumineuse polarisée s'éteint par l'action d'un analyseur, l'amplitude devient nulle partout et par conséquent, d'après l'interprétation probabiliste, les photons s'éva-

nouriraient. Le sacrifice des idées déterministes au profit des idées probabilistes n'est donc pas suffisant pour interpréter les faits anciennement connus comme l'extinction du rayon lumineux polarisé.

Or, le développement de l'idée de l'onde de force donne un moyen d'interpréter les relations d'Heisenberg dans ce qu'elles peuvent avoir d'inéluctable.

La relation préliminaire $\delta l \times \delta N \geq 1$ entre l'intervalle δl et la variation du nombre d'ondes demeure valable. Le nombre d'ondes $N = \frac{1}{\lambda}$, inverse de la longueur d'onde, est, d'après cette idée, en rapport avec le potentiel du champ. Au lieu de la relation $\lambda = \frac{h}{mv}$ de la mécanique ondulatoire, on aurait ici la relation:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{m}{h} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{h} f ,$$

f désignant la force appliquée par le champ, d'où:

$$N = \frac{1}{h} \int f dt .$$

La relation deviendrait ainsi:

$$\delta l \times \delta \int f dt \geq h .$$

Ce serait la forme que prendrait dans nos idées la relation d'Heisenberg ¹.

¹ Dans son expérience fictive dite du microscope, où il se propose de déterminer la position et la vitesse d'un électron situé sur le porte-objet du microscope et éclairé dans ce but par une lumière de longueur d'onde λ , Heisenberg montre qu'il y a sur la position une incertitude

$$\delta l \geq \frac{\lambda}{2 \varepsilon}$$

ε désignant l'angle sous lequel l'objectif est vu du porte-objet (c'est la formule du pouvoir séparateur) et qu'il y a sur la quantité de mouvement une incertitude.

$$\delta p \geq \frac{2 \varepsilon h}{\lambda}$$

Pour l'interpréter, observons que la force est celle d'un champ que nous supposons agir par ondes de force. Si le corpuscule est de dimensions très faibles par rapport à la longueur d'onde, la force doit être considérée à chaque instant comme une fonction sinusoïdale du temps, comme l'onde elle-même; nous considérons cette onde comme une onde longitudinale à amplitudes inégales de part et d'autre de la position d'équilibre de la grandeur oscillante. On montre alors, avons-nous vu, que la valeur moyenne de la force est proportionnelle à la différence de ces deux amplitudes et proportionnelle aussi à la fréquence. Macroscopiquement, si le mobile a des dimensions assez grandes, le caractère ondulatoire de la force disparaît.

Considérons donc un corpuscule de dimensions extrêmement petites et soit δl sa longueur dans la direction de propagation de l'onde. Plus le corpuscule sera petit, plus la force devra être considérée comme ondulatoire et moins par conséquent, il sera possible de lui assigner, par une mesure macroscopique, une valeur déterminée. C'est bien conforme à la relation. Telle serait la signification de la relation d'Heisenberg écrite sous la forme que nous venons de donner.

Mais à condition d'employer des procédés de mesure adéquate au phénomène à observer, rien ne permet, pensons-nous, de dire

d'où se déduit l'inégalité

$$\delta l \times \delta p \geq h .$$

Il nous semble que ce raisonnement n'est pas absolument convaincant.

Imaginons en effet, que, dans une autre expérience fictive on observe à l'aide de deux microscopes, l'objectif de l'un étant vu du porte objet commun sous l'angle 2ε l'autre sous l'angle $2\varepsilon'$, toutes autres choses restant inchangées. On pourra avoir:

$$\delta l \geq \frac{\lambda}{2\varepsilon} , \quad \delta p \geq \frac{2\varepsilon' h}{\lambda} .$$

Et si ε' est nettement plus petit que ε , il n'est pas sûr que $\delta l \times \delta p$ ne puisse pas être inférieur à h . De la même manière, si on imagine que tout l'ensemble d'un microscope et d'un observateur est plongé dans un milieu d'indice n , on trouve d'autres inégalités.

Nous ne contestons d'ailleurs nullement qu'il y ait quelque chose de fondamental dans les idées de Heisenberg, et que mesurer un phénomène soit en quelque mesure, le troubler.

qu'il doive y avoir nécessairement l'incertitude assignée par cette relation. Il semble bien que nous ne possédions pas de tels procédés, suffisamment microscopiques, en ce moment, mais il serait téméraire d'affirmer que nous ne les posséderons jamais.

On peut même donner une interprétation de la relation dite de commutation d'après laquelle les grandeurs qui s'introduisent en mécanique quantique ne satisferaient pas à la loi de commutativité de la multiplication.

Nous avons dit que, de l'équation de propagation, la mécanique ondulatoire déduit entre l'amplitude a et la phase φ la relation:

$$\frac{\partial a}{\partial l} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = m \frac{\partial a}{\partial t} .$$

Dans nos idées il faut la décomposer en deux, valables chacune dans une demi-période. Si nous supposons pour simplifier que a_1 et a_2 ne dépendent pas explicitement du temps, ces deux relations sont, en tenant compte en outre de ce que:

$$-h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)^{-1} = \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 ,$$

les suivantes:

$$h \frac{\partial a_1}{\partial l} - \frac{1}{2} a_1 \lambda_1 \Delta \varphi = 0 .$$

$$h \frac{\partial a_2}{\partial l} - \frac{1}{2} a_2 \lambda_2 \Delta \varphi = 0 .$$

On voit que, en général, on a:

$$a_1 \lambda_1 - a_2 \lambda_2 \neq 0$$

et aussi:

$$a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1 \neq 0 .$$

Si l'on convient à nouveau de ne distinguer en chaque point qu'une longueur d'onde et qu'une amplitude et si l'on adopte les notations d'Heisenberg, on voit que l'on pourra écrire ces inégalités sous une forme telle que:

$$a \lambda - \lambda a \neq 0$$

a pourra être le tableau :

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

λ le tableau :

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

L'on comprend que la relation de commutation des tableaux d'éléments composés d'amplitudes et de fréquences qu'envisage Heisenberg, puisse avoir un rapport avec la relation ci-dessus de commutation, des tableaux respectivement composés d'amplitudes et de longueurs d'onde. La relation de commutation serait, si l'on peut dire, une relation d'ambiguïté.

On sait que Dirac avait proposé une mécanique quantique où s'introduisent des « nombres q » ne satisfaisant pas à la commutativité de la multiplication; elle donne les mêmes résultats que la mécanique des matrices et que la mécanique ondulatoire de M. Louis de Broglie. Dans nos idées, le fonds commun de ces trois théories sur ce point est l'existence dans le champ « d'ondes de force » d'amplitudes inégales pour chacune des demi-vibrations.

VI. — *Usage d'une transformation de Schrödinger généralisée.* — Au chapitre IV, nous avons montré que des équations $\frac{1}{c^2} XH = MG_3 - NG_2$, etc..., on déduisait par une transformation de Schrödinger :

$$H \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}, \quad G_1 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{etc...}$$

les équations de Maxwell.

Si $\frac{c^2 G_1}{H}$ est une vitesse, cela revient aussi à faire sur l'équation :

$$Xdt = Mdz - Ndy$$

la transformation :

$$dt \longrightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad dx \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} .$$

Considérons maintenant l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$, exprimant que la vitesse de la lumière est c et faisons la même transformation. Nous trouvons, après avoir multiplié les deux membres par ψ :

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 .$$

équation de propagation de l'onde lumineuse.

Considérons le ds^2 newtonien et supposons $ds = 0$ pour avoir la propagation lumineuse:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \left(1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}\right) dt^2 = 0 . \quad (1)$$

Faisons la transformation: $dx \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$,

$$dt \rightarrow - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}\right)} \frac{\partial}{\partial t} .$$

On trouve:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}\right)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 . \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent bien la même vitesse de l'onde, et l'équation (2) a une ressemblance avec l'équation de Schrödinger.

Considérons le ds^2 einsteinien, et écrivons-le sensiblement en l'annulant aussi pour avoir la propagation lumineuse:

$$\left(1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}\right)^{-1} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 \left(1 - \frac{2 \text{ KM}}{c^2 r}\right) dt^2 = 0 . \quad (3)$$

Faisons la transformation:

$$dx \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \quad dt \rightarrow - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{4 \text{ KM}}{c^2 r}\right)} \frac{\partial}{\partial t} = 0 .$$

On trouve:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{4 \text{ KM}}{c^2 r}\right)} \frac{d^2 \psi}{dt^2} = 0 , \quad (4)$$

(3) et (4) donnant encore la même vitesse pour l'onde.

Ainsi donc la transformation employée, inspirée de celle de Schrödinger réussit à chaque fois pourvu que, dans le remplacement de dt , on fasse intervenir la vitesse de l'onde telle qu'elle a lieu en chaque région du champ. Ceci permettrait peut-être de découvrir le sens de cette transformation et, par suite aussi peut-être de celle de Schrödinger même.

Opérons sur l'équation du son. La vitesse a pour composante, si $\Phi(x y z t)$ est le front de l'onde :

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\delta \Phi}{\delta t} / \frac{\delta \Phi}{\delta x}$$

et l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - a^2 dt^2 = 0$ s'écrit aussi :

$$\Sigma \left(\frac{\delta \Phi}{\delta x} \right)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta t} \right)^2 = 0 .$$

La transformation de Schrödinger réussit donc, semble-t-il, parce qu'elle est celle qui permet de passer de l'équation du front de l'onde à celle de la propagation, en d'autres termes parce qu'elle permet de passer de l'équation des caractéristiques de l'équation de l'onde à cette équation même.

Chapitre X.

INTERPRÉTATION DE LA THÉORIE DES GRAINS DE LUMIÈRE OU PHOTONS.

Si des phénomènes gravifiques ou électromagnétiques nous passons aux phénomènes lumineux ou, plus généralement, aux phénomènes dits de rayonnement, nous voyons bien encore la possibilité d'énoncer un principe disant qu'un élément qui émet de la lumière l'émet avec une fréquence telle que, son énergie étant W , on ait $W = h\nu$.

Mais cette lumière est-elle émise par grains, comme le veut la théorie des quanta de lumière ?

La théorie des quanta de lumière soulève plusieurs difficultés. En voici quelques-unes.

I. — *La mécanique ondulatoire en milieux réfringents.* — Examinons ce que donne la théorie nouvelle de la mécanique ondulatoire quand on applique ses idées de bases aux milieux réfringents. Nous avons déjà remarqué que si l'expérience de Michelson avait été faite dans un milieu d'indice n par exemple, jamais on n'aurait énoncé la loi de contraction de Lorentz puisque la contraction nécessaire pour expliquer le résultat négatif de l'expérience aurait fait passer l'unité de longueur de 1 à $\sqrt{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}$, et aurait ainsi dépendu de la longueur d'onde de la lumière employée, ce qui était inadmissible.

a) D'après les idées de bases de la mécanique ondulatoire, un corpuscule en repos dans le milieu d'indice n , entretient, dans ce milieu, et dans le vide ou dans le milieu qui l'entourent, des ondes stationnaires. Je n'ai pas vu que cela fût clairement énoncé, mais je pense que c'est tout à fait dans l'esprit de la doctrine. Ces ondes sont de la forme : $A \sin 2\pi\nu_0 t_0$. Un observateur en mouvement suivant l'axe des z avec la vitesse v par rapport au corpuscule et au milieu les voit, d'après les formules de Lorentz, comme ondes : $A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{v}\right)$ avec $Vv = c^2$: la vitesse V est ainsi la même dans le vide et dans tous les milieux. Que faut-il en conclure ? Doit-on admettre ce résultat ? Doit-on admettre qu'il faut remplacer dans les formules de Lorentz c par une autre vitesse c' ?

b) Si le corpuscule est un photon, et si le milieu est peu dispersif, l'onde du photon, qui dans son système propre, animé dans le milieu de la vitesse $\frac{c}{n}$, est : $A \sin 2\pi\nu_0 t_0$, apparaît dans le système du milieu, toujours d'après les formules de Lorentz comme une onde : $A \sin 2\pi \left(t - \frac{z}{nc}\right)$. La phase de l'onde aurait la vitesse nc contrairement à l'expérience. Que faut-il en conclure, si l'on admet les formules de Lorentz ? Que la vitesse $\frac{c}{n}$ du photon et de son onde est une apparence macroscopique ; qu'en réalité, la vitesse microscopique est c , mais, que par suite de chocs contre les particules matérielles du milieu, il y a des rétrogradations, d'où résulte la vitesse micro-

scopique $\frac{c}{n}$? En tout cas, s'il y a une onde macroscopique stationnaire dans le système moyen du flot de photon, on n'échappe pas à la conclusion que sa vitesse macroscopique de phase dans le milieu est cn et que ceci est contraire à l'expérience¹. Ne faut-il pas plutôt conclure que les photons n'ont pas d'existence propre ?

c) Les formules de base relatives à un corpuscule quelconque sont:

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h\nu}{c^2} v.$$

Pour le photon de vitesse c , il faut que $m_0 = 0$. Mais alors, si $v = \frac{c}{n}$, on trouverait que l'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule ne peuvent être que nulles et la fréquence aussi. Ou bien, si, dans l'aspect microscopique $v = c$, même dans le milieu, c'est qu'il y a réflexions et rétrogradations. Il y a donc des moments où v n'annule et reste inférieur à c quelques instants. La conclusion demeure alors la même.

d) Dans le milieu d'indice n , la relation préliminaire conduisant ensuite à celle d'Heisenberg: $\delta N \times \delta l \geq 1$, où N désigne le « nombre d'ondes » et l la longueur comptée dans le sens de la propagation, demeure vérifiée. Or

$$N = \frac{\nu}{V} = \frac{h\nu v}{c^2} : \frac{hVv}{c^2} = \frac{pc^2}{hVv},$$

¹ Mais cette onde macroscopique stationnaire n'existe peut-être pas, si les photons ont la vitesse c , en général, dans le milieu. Par contre, à un instant donné du temps du système du milieu, les photons peuvent être rangés en trois catégories, s'ils ont, en général, la vitesse c : les uns de vitesse c vers l'avant; d'autres de vitesse c vers l'arrière; d'autres enfin en train de subir une réflexion sur les particules du milieu. Aux deux premiers groupes sembleraient devoir correspondre deux ondes de vitesse c , l'une vers l'avant, l'autre vers l'arrière; au troisième une onde stationnaire. L'expérience ne paraît pas correspondre à ces prévisions. Nous avons, au paragraphe IX, chapitre II, de notre première partie, donné déjà des raisons qui nous paraissent contraires à l'idée de la vitesse c pour les photons dans le milieu.

p désignant la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c^2}v$. S'il s'agit d'un corpuscule autre qu'un photon, on a $Vv = c^2$. La relation devient $\delta p \times \delta l \geq h$. C'est bien la relation d'Heisenberg qui continuerait d'être vraie. S'il s'agit d'un photon : $V = v = \frac{c}{n}$, d'où $\delta p \times \delta l \geq \frac{h}{n^2}$. La précision dépendrait du milieu et de la lumière employée. C'est ce qu'on retrouve en reprenant, pour un milieu d'indice n le calcul du microscope.

e) Dans la critique qu'il fait des procédés de mesure dont nous disposons, Heisenberg est amené à considérer un électron se déplaçant sur le porte-objet d'un microscope, et dont il s'agit de déterminer la position et la vitesse. L'électron subissant l'effet Compton, à la suite des chocs des photons, sa vitesse se trouve altérée et l'on montre que la relation d'incertitude $\delta p \times \delta l \geq h$ est vérifiée.

Mais toute lumière doit-elle nécessairement produire un effet Compton ? On peut admettre — et même commencer à développer cette idée — que les chocs qui interviennent dans la théorie des quanta sont le fait, non de corpuscules provenant d'une certaine distance, mais bien des particules d'éther ébranlées par les vibrations. Dès lors, on peut penser que si la lumière employée est une lumière polarisée à vibrations perpendiculaires à la trajectoire de l'électron, ou une lumière circulaire, l'effet Compton sera réduit, peut être même inexistant et que l'incertitude sera moindre que celle qui correspond à la relation en question.

Cela n'empêche pas qu'il y a sans doute quelque chose de fondamental dans les idées d'Heisenberg sur l'incertitude dans les mesures et sur le trouble apporté par une mesure dans le phénomène soumis à cette mesure.

II. — *Théorie nouvelle.* — D'ailleurs la théorie des quanta lumineux peut revêtir une autre forme. Pour s'en rendre compte il suffit de considérer que tous les phénomènes où on en voit des preuves ne font intervenir que des chocs, au sens large du mot, contre des obstacles. *Si l'on constate un choc rien n'autorise à conclure de ce seul fait que le projectile vient d'une certaine*

distance. On peut aussi bien admettre qu'il provient du voisinage immédiat de l'obstacle. Or, nous avons admis l'existence de vibrations longitudinales pour la lumière naturelle; les particules d'éther qui vibrent au voisinage de l'obstacle peuvent par leurs chocs, jouer intégralement le rôle des quanta supposés émis par la source lumineuse. Tout phénomène qui s'explique par l'existence de ces quanta de lumière, s'expliquera aussi bien par l'existence des ondulations longitudinales de la lumière. D'ailleurs des ondulations purement transversales — de la lumière polarisée par conséquent — produiraient aussi les chocs, mais alors dans le sens de la vibration, c'est-à-dire perpendiculairement à la direction de propagation; les effets en seraient sans doute moins importants.

Une des difficultés les plus profondes de la théorie des photons est celle qui concerne l'obtention de franges d'interférences avec des sources lumineuses extrêmement faibles. Il faut expliquer qu'on obtienne, après de longues poses, des photographies de franges, alors qu'on peut admettre qu'il n'y a qu'un photon à la fois dans l'appareil interférentiel, constitué par exemple par un écran d'Young; le photon semble subir une action de ceux des trous de l'écran par lesquels il n'est pas passé; il faut en quelque sorte qu'il ne soit pas localisé. Mais, d'autre part, l'effet photoélectrique enregistré sur le film photographique, quelle que soit l'intensité de la lumière pourvu que la fréquence soit assez grande, oblige à admettre que le photon est localisable. Les choses se concilient par l'onde de probabilité.

Mais quelle différence y aurait-il, à l'arrivée, entre l'effet photoélectrique du photon, de masse 10^{-45} gr par exemple, et celui que produirait un grain d'éther de même masse, voisin du film, et ébranlé par une onde longitudinale réelle qui l'aurait atteint? Quelle différence y aurait-il, au départ de la source, entre l'émission discontinue de photons, et l'émission discontinue d'ébranlements tantôt dans une direction, tantôt dans une autre, comme pour les photons? Aucune différence discernable. Si l'on admet un instant ces hypothèses nouvelles, on voit qu'il y aura, dans le parcours, un train d'ondes réelles, étendu et non localisé, qui sera astreint à se propager dans une certaine

direction, avec un front restreint. Il pourra passer par un trou de l'écran; mais, quand il y passera, le train d'ondes précédent, lui-même étendu, pourra ne pas être encore détruit, et l'interférence pourra se faire. Il n'y a presque, entre cette façon simple de voir les choses, et la première façon, qu'une question de mots, non négligeable d'ailleurs. Il semble cependant qu'avec des sources encore des milliers ou des millions de fois plus faibles on pourrait cesser d'avoir des franges.

Il est bien certain aussi que, si cette conception est la bonne les ondes électro-statiques et gravifiques, les mouvements magnétiques de l'éther, doivent produire des phénomènes parents de ceux produits par les quanta lumineux.

Rappelons que dans notre première partie, chapitre III, paragraphes VI et suivants, nous avons décrit une expérience nouvelle dont la théorie relativiste et corpusculaire ne donne pas une explication satisfaisante. Rappelons aussi qu'il nous paraît désirable de reprendre l'expérience en question avec des flux d'électrons dès que ce sera techniquement possible.

Les résultats expérimentaux qui servent de soutien à la théorie des quanta sont d'abord ceux qui ont trait au rayonnement du corps noir, puis l'effet photoélectrique, l'effet Compton, l'effet Raman.

La première chose à faire est de rendre compte de l'existence de la pression de la lumière. Dans le parcours libre d'une onde lumineuse longitudinale chaque tranche d'éther étant alternativement comprimée et dilatée par deux demi-vibrations égales, l'énergie moyenne de cette tranche est indiscernable par les procédés actuellement employés. Mais elle devient discernable, théoriquement et d'ailleurs aussi expérimentalement, dans le cas de la réflexion contre un obstacle.

Considérons un faisceau parallèle de lumière naturelle de fréquence ν tombant sur un miroir plan réflecteur parfait, suivant l'incidence normale. Lors de chaque demi-vibration dirigée vers le miroir, n particules incidentes frappent le miroir par unité de surface produisant une impulsion sur lui; lors de chaque demi-vibration s'éloignant du miroir, n particules déjà réfléchies le frappent aussi, produisant une impulsion qui

s'ajoute à la précédente. Lors de chaque vibration ont donc lieu $2n$ chocs par unité de surface.

Si $\frac{h}{2}$ est l'énergie que produit en moyenne sur le miroir la réflexion d'une particule d'éther, l'énergie fournie au miroir est, par vibration et par unité de surface de nh ; et comme cela a lieu ν fois par seconde, l'énergie fournie en une seconde est $nh\nu$; d'où il suit que chaque particule peut être considérée comme douée par la vibration de l'énergie $h\nu$ à chaque seconde. Il revient au même de considérer, pendant un temps dt , le choc de Ndt photons, d'énergie $h\nu$, ou le choc par seconde de $N\nu$ particules d'éther en vibration, l'énergie moyenne de chacune d'elles étant h par vibration. Dans le premier cas, l'énergie mise en jeu est: $h\nu Ndt$. Dans le second cas, elle est: $N\nu hdt$, c'est-à-dire a même valeur.

L'énergie lumineuse peut être en conséquence, considérée comme formée de grains de valeur $h\nu$ sans qu'on croie réellement à l'existence de ces grains ¹.

Un rayonnement polarisé dont la vibration aurait une composante normale au miroir produirait aussi une pression de radiation sur le miroir; mais, très probablement, cette pression n'aurait pas la même valeur que celle du rayonnement à vibrations longitudinales.

Un rayonnement lumineux à vibrations rigoureusement transversales et parallèles au miroir ne devrait produire aucune pression de radiation sur ce miroir. Un rayonnement électromagnétique continuerait sans doute à en produire à cause des compressions développées par la force électrique.

La formule de Planck pour le rayonnement noir est ce qu'il convient de retrouver ensuite. Soit dans une enceinte parcourue par un rayonnement noir à température absolue T , un résonateur de Planck. Les particules d'éther qui le frappent et qui accélèrent ou retardent son mouvement sont douées d'une énergie $h\nu$ par unité de temps. Soit un nombre très grand N_i d'atomes dans un état d'énergie ϵ_i ; un autre nombre très grand N_j dans un état d'énergie ϵ_j .

¹ M. Sivadjian a, de son côté, émis les mêmes idées que ci-dessus.

Pendant chaque unité de temps un certain nombre d'atomes passe de l'énergie ε_i à l'énergie ε_j et inversement; on peut dire qu'il existe une certaine probabilité de passage de l'état i à l'état j pendant l'unité du temps. Et il s'agit d'évaluer cette probabilité.

Supposons $\varepsilon_i < \varepsilon_j$. Le passage de l'état i à l'état j ne peut se produire que par absorption de l'énergie radiante. Dans l'unité du temps, une particule d'éther peut céder l'énergie $h\nu$. Elle permet de faire passer de l'état i à l'état j un nombre n d'atomes égal à $\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{h\nu}$.

Le passage de j à i s'effectue spontanément. Pour obtenir la loi de Planck il suffit d'écrire que le nombre des passages, de i vers j est égal à celui des passages de j vers i , dans l'unité de temps. Nous sommes alors dans les conditions voulues pour pouvoir reproduire la démonstration qu'a donnée Einstein de la formule de Planck. Il est à noter que la vitesse c de la lumière dans le vide figure dans cette formule; si l'on étudiait le rayonnement du corps noir dans une enceinte remplie d'un corps d'indice n , on obtiendrait une formule où c devrait peut-être être remplacée par la vitesse c' de la radiation envisagée de fréquence ν dans ce milieu.

La formule photoélectrique d'Einstein, vérifiée dans les domaines des rayons lumineux, des rayons X et γ s'interprète immédiatement par le choc de grains d'éther d'énergie $h\nu$ par vibration, en vibration contre les électrons des atomes, au lieu de chocs de quanta de lumière, d'énergie $h\nu$ en mouvement vers ces électrons. S'il s'agit d'un rayonnement incident formé par la composition de deux rayonnements monochromatiques de fréquences ν_1 et ν_2 , on sait que les électrons émis ont une énergie correspondant sensiblement à ν_1 et ν_2 . Cela peut s'expliquer ainsi. La fréquence résultante étant variable, ainsi que l'amplitude, on comprend que ce soit au moment où l'amplitude est maxima ou au moment où la fréquence est maxima, qu'ait lieu l'émission.

Il y a donc par période deux moments particulièrement favorables à l'émission.

Dans le phénomène de Compton — diffusion avec changement de longueur d'onde — décrit aussi comme choc d'un

quanta de lumière et d'un électron de masse m_0 , on peut de la même manière, faire intervenir le grain d'éther en vibration lumineuse et l'électron. Soit ν_1 la fréquence de vibration de ce grain avant le choc; supposons l'électron en repos au moment du choc et appelons θ l'angle dont sera dévié le grain d'éther par le choc; le principe de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement nous donnera quatre équations d'où nous tirerons la fréquence finale ν_2 :

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{1 + \frac{h\nu_1}{m_0 c^2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

c'est la formule vérifiée par l'expérience. La même manière d'envisager les choses peut être aussi employée en ce qui concerne l'effet Raman.

Aussi aboutissons-nous à montrer que les ondes et vibrations lumineuses sont ce qui donne naissance aux quantablumineux qui n'auraient pas dès lors d'existence propre ¹.

Chapitre XI.

CONCLUSIONS D'ENSEMBLE

SUR LES THÉORIES OÙ PEUT ÊTRE MISE EN CAUSE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE.

I. — *Résumé de quelques résultats.* — Au chapitre VII il est montré que la mécanique de la relativité généralisée peut apparaître comme la dynamique newtonienne du champ de forces de la gravitation pourvu que l'on emploie un « potentiel » dépendant de la vitesse du mobile dans le champ.

¹ Ainsi, quand un rayon lumineux polarisé s'éteint, il n'y a pas à se préoccuper de ce que deviennent les photons associés, au lieu que dans le langage des quanta leur probabilité de présence devient nulle partout et qu'ils semblent ainsi détruits.

Plus exactement, il y est établi que l'emploi du principe de la moindre action sous la forme newtonienne d'Hamilton, et de la conservation de l'énergie, soit :

$$T + U = C^{\text{te}}$$

et

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$$

conduisent, en prenant pour U la valeur, obtenue d'ailleurs déductivement :

$$U = \frac{KM}{c^2 r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{K^2 M^2}{c^2 h^2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{KM}{r} \quad (1)$$

du potentiel de gravitation d'un centre de masse M sur un mobile animé au point r , φ d'une certaine vitesse, aux mêmes équations que l'emploi de la loi d'Einstein $\delta \int ds = 0$, avec la valeur du ds^2 de Schwarzschild ¹.

Dans le premier cas, l'équation de la trajectoire est, en effet, avec $u = \frac{1}{r}$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2KM}{h^2} \left(1 + \frac{KM}{c^2 a} \right) u + \frac{2KM}{c^2} \left(1 - \frac{4K^2 M^2}{c^2 h^2} \right) u^3$$

Dans le second cas, elle est :

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2KM}{h^2} u + \frac{2KM}{c^2} u^3 .$$

Les deux équations conduisent aux mêmes résultats.

On peut même noter que la valeur ainsi donnée de U permet d'expliquer pourquoi l'on trouve trois valeurs différentes de la

¹ Comparez avec CHAZY (*La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, t. 1) au sujet du ds^2 approché de de Sitter (p. 103), et au sujet du potentiel de variation de Weber-Newmann (p. 117 à 120). Ce potentiel est déduit d'une extension du principe de Hamilton au cas où U dépend des vitesses. C'est quelque chose de tout analogue que nous avons envisagé au chap. VII. Mais alors que Weber s'inspirait des lois électrodynamiques, nous avons, au chap. VII, serré du plus près qu'il a été possible la méthode d'Einstein en un langage différent.

masse de Jupiter selon qu'on la déduit des mouvements de ses satellites, des perturbations des grosses planètes et des perturbations des petites planètes. Car, en chaque cas, les valeurs des vitesses figurant dans U sont différentes.

Au chapitre IX, on a vu que l'auteur a été amené à soutenir qu'il ne faut pas voir dans la mécanique ondulatoire une doctrine plus exacte que la dynamique newtonienne. Celle-ci, dit-il, fournirait les mêmes résultats que l'autre, si on lui donnait, pour remplir le cadre vide de sa formule de la moindre action, les valeurs convenables des potentiels. Et si la mécanique ondulatoire donne, à l'échelle de l'électron, des résultats meilleurs que ceux que donnerait la mécanique newtonienne, c'est uniquement parce qu'appliquer la mécanique ondulatoire équivaut à tenir compte d'une nature ondulatoire du potentiel de la gravitation ou de l'électro-statique. Entre les deux doctrines, la différence est, au fond, non pas dans les principes, mais dans le choix des potentiels.

II. — *Détermination des potentiels.* — Ces résultats amènent à se poser la question générale suivante: à quelles conditions devront satisfaire une expérience ou une observation pour qu'elles puissent être considérées comme mettant en cause les principes mêmes d'une dynamique, par exemple de la dynamique newtonienne ?

Supposons que comme les expériences de la dynamique de la relativité restreinte, elles portent sur la variabilité de la masse avec la vitesse. Elles ne pourront alors établir quoi que ce soit de contraire à la dynamique newtonienne. Nous avons montré, en effet, qu'il suffisait d'admettre — et rien ne s'y oppose, au contraire — que, c'était non pas la masse, mais la force appliquée par le champ sur le mobile qui dépendait de la vitesse, pour sauvegarder l'une des bases, qui paraissait compromise, de la dynamique classique.

Supposons que, comme les observations de la relativité généralisée, elles portent sur le mouvement des astres et montrent un désaccord entre les prévisions de la mécanique newtonienne appuyées sur la valeur $\frac{KM}{r}$ du potentiel du centre

de gravitation, et la réalité; nous venons de voir qu'il suffit d'employer un autre potentiel, dépendant aussi de la vitesse de l'astre, et qui d'ailleurs en l'espèce n'avait pas été composé pour cela, mais trouvé au moyen d'autres considérations, pour que le résultat devienne conforme à l'observation.

Supposons que, comme les observations de la mécanique ondulatoire, elles paraissent nécessiter une correction aux équations fondamentales de la mécanique newtonienne. Il suffit d'admettre que le potentiel des champs sur lesquels portent les observations dépendent de certaines circonstances, et que la chose soit physiquement vraisemblable, pour rétablir la possibilité des équations générales en question, comme nous l'avons vu.

D'une manière générale, soit dans l'ordre gravifique, électrique, ou simplement dynamique, un résultat quelconque donné par l'expérience ou par l'observation et touchant le mouvement d'un astre, d'un électron ou d'un point matériel dans un champ. Ce résultat s'exprime par des équations du mouvement. Par ailleurs, le principe de la moindre action — celui de la mécanique newtonienne par exemple — donnera lui aussi des équations où figurera la fonction U des coordonnées du mobile et de leurs dérivées par rapport au temps.

En identifiant ces deux groupes d'équations, on pourra théoriquement du moins, trouver une valeur de la fonction U qui, naturellement permettra en retour au principe de donner un résultat en accord avec l'expérience ou l'observation. *N'est-ce pas ainsi, d'ailleurs, en somme, que Newton découvrit sa loi de l'attraction ? N'est-ce pas ainsi, au fond, qu'ont été découvertes toutes les lois physiques ?* Ainsi donc, dans la dynamique newtonienne — et dans les autres aussi — le principe de la moindre action apparaît comme quelque chose que l'expérience ne réussira pas facilement à atteindre. Pour l'atteindre, il faudrait que l'expérience pût porter directement sur la valeur même de la fonction U , ou au plus, de la force qui en dérive, et *cela pendant le mouvement même*. Or, à notre connaissance il n'a encore été réalisé aucune mesure directe de ce genre. A défaut d'une telle mesure, le principe fondamental de la dynamique newtonienne paraît plutôt *une condition* à

laquelle on impose aux potentiels de satisfaire pour donner des résultats conformes à ce que l'expérience nous apprend touchant les mouvements, seules choses que nous puissions atteindre *directement avec précision*.

En somme, la dynamique de la relativité demeure, et l'on peut en faire usage et même l'étendre, comme on l'a fait, à la cosmologie et à l'expansion de l'univers. Ce n'est qu'indirectement, et parce que la cinématique de la relativité a été reconnue inexacte dans notre 1^{re} partie ¹, que la dynamique se trouve atteinte dans ses principes, mais non pas forcément dans ses formules appliquées à la physique.

Ce n'est qu'au cas où un même potentiel ne pourrait rendre compte à la fois des divers résultats expérimentaux que le rejet des principes d'une mécanique et leur remplacement pourraient commencer à s'imposer. Nous ne croyons pas que ce fait se soit déjà produit; nous pensons, et nous avons cru établir, pour une bonne part, que tous les phénomènes d'ordre dynamique, dont peuvent faire état la dynamique de la relativité restreinte ou généralisée et la mécanique ondulatoire, s'expliquent moyennant un choix convenable, mais unique, des potentiels, avec les principes newtoniens.

Dans cet ordre d'idées, considérons, par exemple, le principe de la moindre action de la relativité restreinte. Il s'écrit, L étant fonction de Lagrange:

$$\delta \int L dt = 0 ,$$

avec

$$L = - m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - F$$

dans le cas d'un point de masse propre m , animé d'une vitesse v suivant Ox dans le champ et soumis au champ. F représente la fonction potentielle.

On déduit de ce principe les équations relativistes du mouvement:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{m d^2 x}{a^3 dt^2} \\ - \frac{\partial F}{\partial y} \quad (\text{ou } z) &= \frac{m}{a} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (\text{ou } z) \end{aligned}$$

¹ *Archives, loc. cit.*

et inversement, de ces équations on déduirait l'expression ci-dessus du principe.

Mais on peut aussi bien, gardant la même valeur de L , poser :

$$V = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{2} m v^2 + F$$

et considérer V comme la fonction « potentielle » du champ sur le point en mouvement dans le champ avec la vitesse v .

Alors le principe de la moindre action se présente sous la forme hamiltonienne, avec :

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - V .$$

La dynamique de la relativité restreinte nous apparaît ainsi une fois de plus comme la dynamique newtonienne du champ où le mouvement est défini par les équations ci-dessus vérifiées par l'expérience, c'est-à-dire comme la dynamique newtonienne du champ électro-magnétique.

Donnons encore un autre exemple. Dans la théorie des perturbations dans un champ principal, la mécanique ondulatoire introduit une sorte d'énergie, dite énergie d'échange, dont on dit qu'elle est d'une nature entièrement nouvelle, susceptible d'aucune interprétation classique. Ce fait tient, en mécanique ondulatoire, à l'indiscernabilité des corpuscules de même nature, et du caractère symétrique ou antisymétrique des fonctions d'onde, caractères qui pourront être conservés, à une différence de langage près, dans une théorie où les ondes joueraient un autre rôle physique, le formalisme restant le même.

Dans le cas de deux particules 1 et 2, le terme d'énergie d'échange a pour valeur :

$$A = \text{partie réelle de } \int \psi_i^*(1) \psi_k^*(2) \psi_i(2) \psi_k(1) V d\tau ,$$

$d\tau$ étant l'élément de volume et V le potentiel d'interaction supposé ne dépendre que de la distance des deux particules r_{12} . L'expérience indique la valeur de A , en accord avec la théorie que donne par exemple Heisenberg pour le spectre ortho-para

de l'Hélium. Conformément à notre méthode, le résultat expérimental sera pris pour point de départ. Il s'agira pour nous, tout au contraire, de déterminer V . Le résultat sera tenu pour acceptable si d'une part on peut trouver une valeur de V , si d'autre part cette valeur ne se heurte à aucune impossibilité ou invraisemblance physique. Or que peut-il y avoir d'étonnant, au sujet de ce potentiel, à ce qu'il dépende, non seulement de r_{12} , mais aussi de l'orientation des particules dans le champ principal, et même de la valeur des ondes ψ liées à chaque corpuscule dans le champ principal, ou, comme nous dirions, des ondes par lesquelles le champ principal agit sur chaque particule ? A notre avis, ce serait même le contraire qui serait étonnant, et il nous paraît que les ondes secondaires représentant ou occasionnant l'interaction des particules entre elles ne doivent pas agir ou se comporter comme si les ondes principales n'existaient pas. Les énergies correspondant à ce dérèglement nous paraissent donc pouvoir très bien être reconnues en théorie classique. Nous ne serions même pas surpris qu'en cherchant bien on trouvât, sans doute en théorie hydrodynamique ancienne, des cas ou de tels problèmes d'interactions d'ondes réelles ont été effectivement traités, et probablement avec des résultats assez analogues.

En somme, dans l'état actuel de l'expérience, il y a plusieurs dynamiques qui peuvent être tenues pour mathématiquement exactes. Une seule est physiquement vraie. L'expérience ne pourra établir laquelle qu'à condition d'atteindre directement les potentiels des champs naturels.
