Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 1 (1948)

Heft: 1

Artikel: Quelques observations et expériences nouvelles : et leurs conséquences pour les théories de la physique

Autor: Prunier, F.

Kapitel: 2: Relations nouvelles : premier essai d'interprétation : interprétation hydrodynamique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739256

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QUELQUES OBSERVATIONS ET EXPÉRIENCES NOUVELLES

et leurs conséquences pour les théories de la physique

PAR

F. PRUNIER

(Avec 2 fig.)

DEUXIÈME PARTIE[1]

RELATIONS NOUVELLES
PREMIER ESSAI D'INTERPRÉTATION
INTERPRÉTATION HYDRODYNAMIQUE

Introduction

Des expériences, des observations et des remarques nouvelles peuvent remettre en question, sinon à proprement parler les récentes théories physiques, du moins quelques-unes de leurs bases essentielles.

Le présent travail a pour but d'en présenter d'abord un exposé d'ensemble, et d'en déduire ensuite les conséquences.

La première partie a déjà été publiée ici même [2]. Elle était consacrée à l'exposé de faits nouveaux; elle conduit directement

[1] La première partie a paru dans les *Archives des sciences physiques et naturelles*, fascicules IV et V, 1946.

[2] *Archives*, 5[e] période, vol. 28, fasc. 4 et 5.

à une discussion, basée sur l'expérience, de l'utilité d'un retour à l'hypothèse de l'éther, sans qu'il puisse s'agir encore d'en préciser les propriétés éventuelles. A cette première discussion, s'en ajoute une autre, théorique celle-là, dans la présente deuxième partie. A partir de la théorie des ondes et des équations de la relativité, qui, en tout état de cause, doivent être, *dans l'ensemble*, conservées, surtout en électromagnétisme, on montre l'existence de relations nouvelles en électromagnétisme, et la possibilité de construire une hydrodynamique qui semble ne pas pouvoir être autre que celle de l'hypothétique éther. Cette seconde discussion est indépendante de la première, et ses conclusions renforcent encore celles qu'il a paru nécessaire de tirer de la première partie.

Il y aura alors à formuler, dans une troisième partie, une interprétation nouvelle de la dynamique de la relativité et de la mécanique ondulatoire, en conservant le plus possible de l'appareil mathématique de ces théories, trop bien vérifié quantitativement pour qu'on puisse penser à l'abandonner dans *son ensemble.* Chemin faisant, nous suggérerons des idées d'expériences capables de renseigner de façon plus certaine sur le bien-fondé des théories et des interprétations proposées. On retrouvera dans la troisième partie des idées qui se rapprochent beaucoup de celles que M. Varcollier [1] a données sous forme d'une théorie générale de l'aberration des ondes, des vitesses et des forces, ainsi que des idées et remarques si profondes de M. G. Tiercy [2], directeur de l'Observatoire de Genève. On y utilisera aussi au chapitre X certaine idée mise en avant par M. Sivadjian [3]; les remarques de M. Croze [4] sur la valeur probante des observations et expériences concernant la dynamique de la relativité nous ont été également très utiles.

[1] *Propagation ellipsoidale*, *Relativité*, *Quanta*, Presses Universitaires, Paris, 1942.

[2] G. Tiercy, « La théorie de la relativité dite générale et les observations astronomiques », *Arch. des Sciences physiques et naturelles*, Genève, 1939.

[3] J. Sivadjian, *Revue gén. des Sciences*, *57*, 1946, 1.

[4] F. Croze, « Les preuves expérimentales des théories de la relativité », *Revue gén. des Sciences*, *37*, 1926, 394.

L'ouvrage se termine par une étude des conditions que doivent remplir une expérience ou une observation pour qu'on puisse les considérer comme mettant en cause les principes mêmes d'une mécanique quelle qu'elle soit [1].

Chapitre IV.

Etablissement de relations nouvelles en électromagnétisme

I. — Etude du champ d'une charge électrique à l'aide des formules de transformation de la relativité. Cas du mouvement rectiligne, accéléré ou non, d'une seule charge ou du mouvement de plusieurs charges suivant des trajectoires rectilignes parallèles.

Considérons un système d'axes $O\,x\,y\,z$ dans lequel ne règne aucun champ de force d'inertie. Supposons qu'on observe dans ce système le champ électromagnétique d'une charge électrique en mouvement quelconque uniforme ou accéléré, rectiligne ou non, par rapport à ce système. Les équations de l'électromagnétisme sont, par rapport à ce système d'axes:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ M &= \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ N &= \frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{aligned} \qquad (1)$$

[1] Dans notre étude du passage d'un rayon lumineux à travers la surface de séparation d'un volume d'éther supposé entraîné par la Terre et du reste de l'éther non entraîné (*Archives*, 5e période, vol. 28, fascicules 4 et 5, 1946, même titre que la présente étude, nous avions pour objet de concilier la théorie de l'entraînement de Stokes avec plusieurs autres théories, à l'aide des phénomènes pouvant se passer dans la couche de séparation. Il est donc à peine besoin de faire remarquer que l'obtention de la formule de M. Varcollier, que nous retrouvons ainsi, suppose que le rayon lumineux franchisse la couche de séparation. Nous ne retrouverions pas cette formule si le rayon était parallèle aux génératrices de la couche supposée cylindrique. D'un autre côté, après franchissement de cette couche, la vitesse du rayon pourrait redevenir c, la valeur c' n'étant nécessaire que pendant ce franchissement.

$$
\begin{aligned}
X &= -\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x} \\
Y &= -\frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial y} \\
Z &= -\frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

en désignant par L, M, N les composantes du vecteur magnétique, par X, Y, Z les composantes du produit par c du vecteur électrique, par G_1, G_2, G_3 les composantes du potentiel vecteur, par H le produit par c du potentiel scalaire. On peut choisir comme système cohérent d'unités, celui où G_1, G_2, G_3 serait de la dimension d'une vitesse, H, du carré d'une vitesse, L, M, N, d'un tourbillon, X, Y, Z, d'une accélération.

Nous nous proposons d'abord de montrer qu'il existe dans le champ envisagé d'autres relations, en outre, bien entendu, de l'équation dite complémentaire. Voici comment nous y parviendrons.

Etudions d'abord le cas du mouvement accéléré ou non, mais rectiligne, d'une seule charge. Supposons d'abord que l'axe $O\,x$ coïncide avec la vitesse de la charge. Dans le système où la charge part du repos à cet instant, système lui-même dénué de champ de force d'inertie, existe seulement à cet instant, et pour un temps infiniment court, un pur champ électrique.

Les formules de transformation de la relativité montrent que dans le système $O\,x\,y\,z$ existe un champ électromagnétique complet dont le potentiel vecteur G_1 est dirigé suivant $O\,x$ et dont le vecteur magnétique est situé dans le plan $z\,O\,y$.

Si, au lieu de la disposition spéciale qu'on vient d'envisager des axes du système $O\,x\,y\,z$, nous revenons à une disposition quelconque, mais invariablement liée à cette disposition spéciale, la perpendicularité du vecteur magnétique et du potentiel vecteur demeure évidemment exacte, et elle s'exprime par la formule:

$$
LG_1 + MG_2 + NG_3 = 0 \ .
$$

Supposons maintenant un second système $O'\,x'\,y'\,z'$ animé par rapport au système $O\,x\,y\,z$ d'une vitesse uniforme v, les axes $O\,x$ et $O'\,x'$ coïncidant. L'observateur O' voit aussi le mouvement de la charge comme un mouvement accéléré ou uniforme, mais rectiligne.

On montrerait d'une manière tout à fait analogue à celle qui vient d'être employée que, dans son système, existe la relation:

$$L'G'_1 + M'G'_2 + N'G'_3 = 0$$

entre le vecteur magnétique et le potentiel vecteur.

Cette loi se conserve donc lors du passage du système $O\,x\,y\,z$ au système $O'\,x'\,y'\,z'$ en translation uniforme de vitesse v par rapport à lui conformément d'ailleurs au principe de la relativité.

Effectuons maintenant le passage direct du premier système au second, à l'aide des formules de transformation de la relativité pour le vecteur magnétique et pour le potentiel vecteur.

Dans le second système la relation s'écrit, α désignant le facteur de Lorentz

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$\frac{1}{\alpha} L'\left(G'_1 - \frac{v}{c}\frac{H'}{c}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(M' + \frac{v}{c}\frac{Z'}{c}\right) G'_2 + \frac{1}{\alpha}\left(N' - \frac{v}{c}\frac{Y'}{c}\right) G'_3 = 0,$$

ou

$$L'G'_1 + M'G'_2 + N'G'_3 - \frac{v}{c^2}\left(L'H' - Z'G'_2 + Y'G'_3\right) = 0.$$

La relation envisagée ne peut conserver sa forme que si l'on a:

$$L'H' - Z'G'_2 + Y'G'_3 = 0.$$

Et inversement, en repassant au premier système, le maintien de la relation nécessitera:

$$LH = ZG_2 - YG_2. \tag{3}$$

Il y aura, bien entendu, deux autres relations analogues qu'on mettra en évidence de la même façon:

$$\left.\begin{aligned} MH &= XG_3 - ZG_1 \\ NH &= YG_1 - XG_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ces relations se maintiennent évidemment si l'on introduit à la place de H, X, Y, Z, le potentiel scalaire lui-même et les composantes du vecteur électrique.

Ceci montre d'abord qu'il existe dans le champ électromagnétique de la charge en mouvement rectiligne, accéléré ou non, des relations très générales en outre de celles qu'on donne ordinairement, et ce point nous paraît, à lui seul, très important. C'est une réponse à une question que se posait Bjerkness qui se demandait s'il n'existait pas dans le champ électromagnétique une relation vectorielle nouvelle: cette relation lui manquait pour identifier les grandeurs électro-magnétiques avec des grandeurs hydro-dynamiques.

La transformation opérée, pour passer du système O, x, y, z au système O$'$, x', y', z' n'a eu pour but que de permettre la mise en évidence de relations existant dans chacun de ces systèmes sans inertie, mais l'un et l'autre quelconques par rapport au mouvement considéré de la charge.

D'ailleurs cette opération est basée seulement sur l'existence dans chacun de ces systèmes de la relation de perpendicularité du potentiel vecteur et du vecteur magnétique. Les relations supplémentaires trouvées ont donc lieu pour les systèmes sans champ de force d'inertie, non seulement dans le cas du champ produit par un mouvement rectiligne accéléré d'une charge électrique, mais aussi dans le cas de tout champ admettant la relation de perpendicularité en question, notamment dans le cas de plusieurs charges décrivant des trajectoires rectilignes parallèles.

Dans un système où règnerait un champ de force d'inertie ou de gravitation, il existerait évidemment d'autres relations dont les relations (3) qui viennent d'être indiquées sont une forme dégénérée.

Si l'on décompose en chaque point le vecteur X Y Z en deux parties dont l'une X_1 Y_1 Z_1 sera parallèle au potentiel vecteur, c'est-à-dire dirigée suivant le mouvement de la charge, et dont l'autre $X - X_1$, $Y - Y_1$, $Z - Z_1$ sera perpendiculaire à ce potentiel vecteur on trouvera les trois autres relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{V^2}(X - X_1)H &= MG_3 - NG_2\\ \frac{1}{V^2}(Y - Y_1)H &= NG_1 - LG_3\\ \frac{1}{V^2}(Z - Z_1)H &= LG_2 - MG_1\end{aligned}\right. \qquad (3\ bis)$$

avec $V = \dfrac{c^2}{v_0}$, v_0 désignant la vitesse de la charge dans le système d'observation.

Si l'on emploie le potentiel scalaire et le vecteur électrique et non plus leur produit par c, le facteur $\dfrac{1}{V^2}$ est remplacé par $\dfrac{c^2}{V^2}$.

On vérifie en effet facilement tout d'abord que, si l'on prend comme axe des x la direction du mouvement, on a les deux relations:

$$\frac{v_0^2}{c^4}(Y - Y_1)H = NG_1,$$

$$\frac{v_0^2}{c^4}(Z - Z_1)H = MG_1.$$

(Y_1 et Z_1 sont d'ailleurs ici nuls.)

Car il suffit de repasser au système dans lequel la charge est au repos pour trouver des identités. Dès lors, avec une disposition quelconque des axes on a bien les formules (3 *bis*). Mais en général, comme elles font intervenir v_0, elles ne s'appliqueront qu'au mouvement d'une seule charge.

II. Obtention d'équations nouvelles.

Nous nous proposons maintenant d'écrire sous une nouvelle forme les équations (3), dans le cas du mouvement rectiligne accéléré d'une seule charge. A cet effet, nous allons d'abord chercher à déterminer deux fonctions U (x, y, z, t) et φ (x, y, z, t) telles que l'on ait:

$$\left.\begin{aligned}LU &= G_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} - G_3\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ MU &= G_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - G_1\frac{\partial\varphi}{\partial z},\\ NU &= G_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} - G_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Ces équations ne sont pas indépendantes, car on vérifie l'identité

$$L\,G_1 + M\,G_2 + N\,G_2 = 0 \ .$$

Choisissons à nouveau, pour simplifier le calcul, un système d'axes rectangulaires dans lequel l'axe des x coïncidera avec la vitesse de la charge en mouvement. La première équation (3) sera vérifiée identiquement , les deux membres étant nuls. On aura en effet:

$$L = G^2 = G_3 = 0 \ .$$

Les deux autres équations s'écriront:

$$\begin{aligned} M\,H &= -Z\,G_1 \ , \\ N\,H &= Y\,G_1 \ . \end{aligned}$$

Les deux fonctions U (x, y, z, t) et φ (x, y, z, t) seront telles que l'on ait:

$$\left.\begin{aligned} M\,U &= -\,G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ N\,U &= \quad G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (3'')$$

On peut substituer au système (3″) le système constitué par l'une des équations (3″) et par l'équation suivante qui se déduit également de (3″):

$$M \frac{\partial \varphi}{\partial y} + M \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ .$$

Cette équation donne une fonction φ (x, y, z, t) dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, cette fonction arbitraire pouvant contenir aussi la variable x, qui joue ici le rôle d'une constante, et aussi le temps. L'une ou l'autre des équations (3″) donne alors une valeur de U dépendant aussi d'une fonction arbitraire d'une variable, cette fonction pouvant contenir x et t.

Quelle est la variable autre que x entrant ainsi dans la fonction arbitraire ? Par raison de symétrie, on peut prendre pour cette variable dans le cas de la charge unique considérée, comme d'ailleurs en tout cas où existerait cette symétrie, la distance:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

d'un point à l'axe des x coïncidant avec le vecteur vitesse de la charge.

Pour la même raison de symétrie, le potentiel scalaire dépendra de x et r et sera H (x, r, t); le potentiel vecteur sera G_1 (x, r, t).

La fonction U étant, d'après ce qui vient d'être dit, frappée d'une certaine indétermination, on pourra pour la déterminer chercher à lui imposer, en outre, de satisfaire à la relation supplémentaire:

$$H(x, r, t) = [G_1(x, r, t)]^2 - U . \qquad (4')$$

D'après cela U ne devrait dépendre, en plus de x et de t, que de r. On peut voir sur les équations (3″) que ceci est possible,

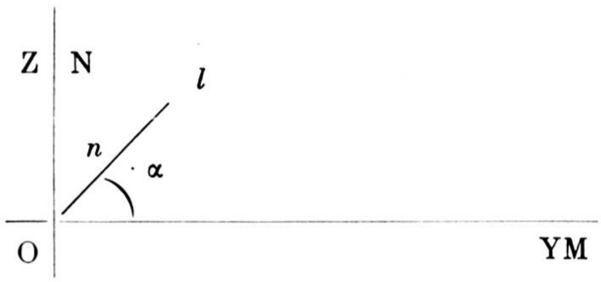

Fig. 1.
Force magnétique au point de coordonnées (r, a).

et que φ peut lui-même ne dépendre que de r (en plus de x et de t).

Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi, et considérons l'équation:

$$M \frac{\partial \varphi}{\partial y} + N \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 .$$

Si l est le vecteur magnétique au point de coordonnées (r, α) (fig. 1), on a:

$$M = l \sin \alpha$$
$$N = -l \cos \alpha .$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\cos \alpha$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\sin \alpha$$

d'où résulte que l'équation en question est identiquement vérifiée quelle que soit la fonction $\varphi\ (r, x)$.

Alors l'une ou l'autre des deux équations (3″) donne une valeur de dépendant de la fonction U (x, r, t) qui peut être complètement arbitraire en x, r et t.

Il est donc possible d'imposer à la fonction U la condition supplémentaire (4′).

Revenons à notre système d'axes quelconques invariablement lié au système qui vient de servir au calcul. Bien entendu, nous retrouverons les équations (3′) et l'équation (4′) s'écrira:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\ (x, y, z, t) = \mathrm{G}_1^2\ (x, y, z, t) + \mathrm{G}_2^2\ (x, y, z, t) + \mathrm{G}_3^2\ (x, y, z, t) \\ - \mathrm{U}\ (x, y, z, t)\ , \end{aligned} \tag{4}$$

ou, avec une nouvelle fonction V_1:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{G}_1^2 + \mathrm{G}^2_{.} + \mathrm{G}_3^3\right) + \mathrm{V}_1\,.$$

Tenons compte de cette équation (4) et ajoutons membre à membre chacune des équations (3′) à l'équation correspondante (3). Nous trouvons:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\ \left(\mathrm{G}_1^2 + \mathrm{G}_2^2 + \mathrm{G}_3^2\right) &= \mathrm{G}_2\left(\mathrm{Z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \mathrm{G}_3\left(\mathrm{Y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\
\mathrm{M}\ \left(\mathrm{G}_1^2 + \mathrm{G}_2^2 + \mathrm{G}_3^2\right) &= \mathrm{G}_3\left(\mathrm{X} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \mathrm{G}_1\left(\mathrm{Z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \\
\mathrm{N}\ \left(\mathrm{G}_1^2 + \mathrm{G}_2^2 + \mathrm{G}_3^2\right) &= \mathrm{G}_1\left(\mathrm{Y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \mathrm{G}_2\left(\mathrm{X} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Si nous résolvons ces trois équations en X, Y, Z, en tenant compte de la condition de perpendicularité du potentiel vecteur et du vecteur magnétique, ce qui permet, par exemple, à la fois $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2 = \mathrm{N} = 0$, nous trouvons:

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \mathrm{M}\,\mathrm{G}_3 - \mathrm{N}\,\mathrm{G}_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\
\mathrm{Y} &= \mathrm{N}\,\mathrm{G}_1 - \mathrm{L}\,\mathrm{G}_3 - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\
\mathrm{Z} &= \mathrm{L}\,\mathrm{G}_2 - \mathrm{M}\mathrm{G}_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}
\end{aligned} \tag{5}$$

III. — Autre méthode plus directe d'obtenir les équations (5), valable aussi dans le cas de plusieurs charges décrivant des trajectoires rectilignes parallèles. — Passage à des équations de type hydrodynamique. — On peut noter à titre de vérification, que si on applique ces équations au cas d'un mouvement rectiligne, accéléré ou non, de la charge, l'axe des x étant dirigé suivant la vitesse, on peut retrouver à partir d'elles l'une des équations de Maxwell. On a en effet:

$$Y = N G_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad Z = - M G_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

d'où

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = N \frac{\partial G_1}{\partial z} + M \frac{\partial G_1}{\partial y} + G_1 \frac{\partial M}{\partial y} + G_1 \frac{\partial N}{\partial z}$$
$$= N M - N M = 0 ,$$

puisque

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

(divergence nulle du vecteur magnétique).

Inversement, si nous posons $Y = N G_1 - \frac{\partial \varphi}{y \partial}$ et $Z = - MG_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z}$, φ et ψ étant déterminés par ces égalités mêmes, l'équation de Maxwell montre que l'on a: $\varphi = \psi$ à une constante près [1].

[1] Voici le détail du calcul. On doit avoir $\frac{\partial^2 (\varphi - \psi)}{\partial y \partial z} = 0$, c'est-à-dire: $\varphi = \varphi + f_1 (y) + f_2 (z)$. Mais si l'on fait une rotation des axes oy et oz dans leur plan, on trouvera de nouvelles fonctions φ' et φ' telles que:

$$\varphi' = \psi' + g_1 (y') + g_2 (z') .$$

L'expression $f_1 (y) + f_2 (z)$ deviendra dans cette transformation linéaire $g_1 (y') + g_2 (z')$. Cela n'est possible que si $f_1 (y) + f_2 (z)$ est de la forme: $ay + bz + c$, a, b, c étant des constantes.

Dès lors:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + a , \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} + b .$$

Les équations initiales sont alors par exemple: $Y = - NG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $z = MG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + b$. Par raison de symétrie, il faut $b = 0$. De même $a = 0$. On pourra également opérer ainsi dans l'onde sinusoïdale simple.

L'équation vectorielle dont les deux composantes sont les deux équations donnant Y et Z donne, avec une disposition quelconque des axes, les équations (5).

Si nous combinons maintenant ces équations (5) et les équations (2), nous obtenons, en posant $H_1 = H - \varphi$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G_1}{\partial t} + M G_3 - N G_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x} = 0 , \\
&\frac{\partial G_2}{t} + N G_1 - L G_3 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial G_3}{\partial t} + L G_2 - M G_1 + \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0 .
\end{aligned} \tag{6}$$

Ces équations (6) sont exactement, avec les équations (1), les équations de l'hydrodynamique d'un fluide dont la vitesse en chaque point serait G_1, G_2, G_3, le double du tourbillon L, M, N, la charge hydraulique H_1, quand il y a potentiel des forces appliquées. La vitesse de ce fluide serait, en tous ses points, parallèle à une même direction, celle du mouvement rectiligne des charges.

Les équations (3 *bis*) nous auraient conduit d'ailleurs immédiatement à 3 équations de la forme:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} + M G_3 - N G_2 + \frac{H X_1}{V^2} + \frac{\partial H}{\partial x} + \left(1 - \frac{H}{V^2}\right) X = 0 .$$

Ce seraient là des équations hydrodynamiques aussi, mais l'existence d'un potentiel des forces appliquées n'y est plus mise en évidence.

Les résultats exprimés par les formules 3, 3 *bis*, 5, 6, s'appliquent à des cas déjà assez généraux. Nous allons maintenant montrer comment on peut, en utilisant l'équation des ondes, leur donner une très grande généralité.

IV. — Obtention des équations (3) et (3 *bis*) au moyen de la théorie des ondes. Résultats généraux.

Il est possible, grâce à l'équation des ondes, d'établir directement les équations (3) et (3 *bis*) sans autre hypothèse. Soit:

$$\Phi(x, y, z, t) = 0 ,$$

l'équation du front de l'onde, de vitesse c, par exemple, supposée écrite de manière que les dérivées partielles:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

soient, au point considéré, des cosinus directeurs α, β, γ de la normale à cette surface; la vitesse de propagation c de l'onde pourra alors être représentée par $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

C'est un résultat classique de la théorie des ondes que les quantités X, Y, Z, L, M, N, G_1, G_2, G_3, H, satisfaisant à l'équation des ondes, ont pour partie principale, à un instant infiniment peu postérieur au passage de l'onde, respectivement:

$$\frac{1}{2} X_0 \Phi^2, \quad \frac{1}{2} Y_0 \Phi^2, \text{ etc. };$$

X_0, Y_0, etc., étant des vecteurs déterminés, et Φ représentant la valeur prise, au point et à l'instant considérés, par la fonction figurant au premier membre de l'équation du front de l'onde. Les parties principales des dérivées sont de la forme suivante:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \alpha \Phi X_0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \gamma \Phi Y_0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y} = \beta \Phi G_0, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -c \Phi M_0, \text{etc.}$$

Si l'on porte les valeurs ci-dessus de la force magnétique et du potentiel vecteur dans les équations (1) de définition de cette force en fonction de ce potentiel, on trouve:

$$\frac{1}{2} L_0 \Phi = \beta G_{03} - G_{02}, \quad \frac{1}{2} M_0 \Phi = \gamma G_{01} - \alpha G_{02},$$

$$\frac{1}{2} N_0 \Phi = \alpha G_{02} - \beta G_{01}.$$

On en déduit facilement que le vecteur magnétique est tangent au front de l'onde; mais on en déduit aussi la perpendicularité du vecteur magnétique et du potentiel vecteur. Dès lors on peut, comme plus haut, retrouver les équations (3). D'ailleurs, Φ étant très petit, le vecteur g_0 (G_{01}, G_{02}, G_{03}) est très près d'être normal au front de l'onde.

Nous allons voir qu'on peut aussi, d'une autre manière, retrouver les équations (3) et (3 *bis*) par l'intermédiaire des équations de Maxwell[1]. En effet, si l'on porte dans celles-ci, supposées écrites pour l'espace vide, par exemple, les valeurs trouvées plus haut des dérivées des vecteurs électrique et magnétique, on obtient, après division par Φ, les deux groupes d'équations suivants:

$$\begin{aligned} c\,L_0 &= \beta Z_0 - \gamma Y_0 & \frac{1}{c} X_0 &= \gamma M_0 - \beta N_0 \\ c\,M_0 &= \gamma X_0 - \alpha Z_0 & \frac{1}{c} Y_0 &= \alpha N_0 - \gamma L_0 \\ c\,N_0 &= \alpha Y_0 - \beta X_0 & \frac{1}{c} Z_0 &= \beta L_0 - \alpha M_0 . \end{aligned}$$

Et d'autre part, en opérant de la même manière sur les équations (2) de définition de la force électrique en fonction du potentiel vecteur et du potentiel scalaire, nous trouvons:

$$\frac{1}{2} X_0 \Phi = c\,C_{01} - \alpha H_0$$

et deux équations analogues.

Nous en tirons, Φ étant extrêmement petit:

$$c = \frac{\alpha H_0}{G_{01}} = \frac{\beta H_0}{G_{02}} = \frac{\gamma H_0}{G_{03}} = \frac{H_0}{g_0} .$$

L'équation complémentaire:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t}$$

donnerait aussi le même résultat:

$$\frac{H_0}{c} = \alpha G_{01} + \beta G_{02} + \gamma G_{02}$$

[1] F. Prunier, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 avril, 1933.

Et cette valeur de c étant reportée dans les équations ci-dessus, nous trouvons les deux groupes suivants:

$$L_0 H_0 = G_{02} Z_0 - G_{03} Y_0$$
$$\frac{1}{c^2} X_0 H_0 = M_0 G_{03} - N_0 G_{02}, \text{ etc.}$$

Si maintenant on remarque que, dans les conditions envisagées, ces équations demeurent valables, même écrites avec des lettres sans l'indice $_0$, comme on le voit en multipliant toutes les quantités qui y figurent par $\frac{1}{2}\Phi^2$ on trouve d'une part les équations (3) et, d'autre part un groupe d'équations qu'on peut écrire:

$$X = MG_3 - NG_2 + \left(1 - \frac{H}{c^2}\right) X = O,$$

identifiable avec celui des équations (3 *bis*) pour $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$, mais plus général et, qui par report de X Y Z dans les équations (2), conduit à des équations de la forme:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} + MG_3 - NG_2 + \frac{\partial H}{\partial x} + \left(1 - \frac{H}{c^2}\right) X = 0, \qquad (7)$$

équation de l'hydrodynamique, mais où il n'y a pas en général potentiel des forces appliquées.

Nous prenons dans ce qui précède le mot onde [1] au sens de front de l'onde d'Hugoniot et les équations obtenues sont valables sur le front de l'onde. Mais on sait que c'est aussi un résultat classique que les ondes, au sens optique du mot, par exemple des ondes sinusoidales, donnent des phénomènes équivalents dès que la fréquence est assez grande. Tout se passe comme si l'on avait affaire à une suite très dense d'ondes au premier sens du mot. Et les relations ci-dessus, ainsi que les équations (7), apparaissent ainsi comme valables non seulement au voisinage du front de l'onde, mais dans tout l'espace avec une erreur insignifiante quand la fréquence est élevée. C'est là

[1] Comme nous l'avons trouvé au § I, il faudrait s'il s'agissait non d'une onde électromagnétique de vitesse c, mais d'une onde de vitesse $V = \frac{c^2}{v}$, remplacer c par V.

le résultat général que nous avions en vue. On retrouverait ces relations directement en substituant dans les équations de Maxwell, sous quelques conditions, des expressions de la forme:

$$X' = X_0 \sin \nu \Phi \ , \quad \text{etc.} \ , \qquad G_1 = G_0 \cos \nu \Phi \ , \quad \text{etc.}$$

ν désignant une fréquence supposée très grande [1].

C'est ce que nous allons vérifier plus loin (paragraphe VIII pour le cas de l'onde sinusoïdale simple).

[1] Si l'on élimine X, Y, Z entre les deux groupes donnant L H, X H, etc., on trouve trois équations de la forme:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{c^2}{H}(M\,G_3 - N\,G^2) + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \ .$$

Supposons que, dans une certaine région, H puisse être considérée comme indépendante du temps. Le groupe de trois équations dont nous venons d'écrire l'une prendrait l'aspect suivant:

$$\frac{\partial c \dfrac{G_1}{H}}{\partial t} + \frac{cM}{H}\frac{cG_3}{H} - \frac{cN}{H}\frac{cG_2}{H} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

et deux équations analogues.

Les équations de définition du vecteur magnétique en fonction du potentiel vecteur s'écriraient:

$$\frac{c}{H}(L, M, N) = \operatorname{rot} \frac{c}{H}(G_1, G_2, G_3) \qquad (2)$$

Enfin l'équation complémentaire s'écrirait:

$$\operatorname{div} \frac{c}{H}(G_1, G_2, G_3) = 0 \ . \qquad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) sont exactement de la forme des équations de l'hydrodynamique d'un fluide de vitesse:

$$\frac{c\,G_{1,2,3}}{H} \ .$$

On pourrait même compléter les équations (1) par l'adjonction d'un terme grad. θ, tenant compte du fait que X Y Z ne représente pas la force électrique totale, mais seulement celle qui est située dans le front d'onde. On sait que la partie normale au front de l'onde de la

Des résultats en tous points analogues peuvent être obtenus dans le cas d'un milieu homogène et isotrope dont les propriétés électriques et magnétiques sont définies par les deux coefficients Kμ, constante diélectrique et perméabilité magnétique. Les calculs sont seulement un peu plus compliqués que ceux qui viennent d'être exposés par suite de la présence de Kμ et de la vitesse:

$$v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$$

remplaçant la vitesse c.

Mais il est encore possible d'arriver à mettre les équations de l'électro-magnétisme sous la forme (1) et (6), le potentiel vecteur représentant toujours une vitesse et le tourbillon étant représenté non plus par la force magnétique elle-même, mais par son produit par un coefficient constant.

Nous verrons plus loin une autre raison conduisant à généraliser ce résultat au cas de mouvements quelconques d'un nombre quelconque de charges.

V. — *Electro-magnétisme et hydrodynamique.* Ces équations ne seraient pas valables telles quelles dans des systèmes où règneraient des champs de force d'inertie. Elles prendraient dans ces systèmes des formes dont les cas ci-dessous sont des formes dégénérées.

Mais les équations d'hydrodynamique prendraient aussi des formes dont celle que nous avons écrite est une forme dégénérée et il est vraisemblable que la même identité se continuerait. En tout cas, nous n'avons, dans la pratique de l'électromagnétisme, affaire qu'à des systèmes qu'on peut considérer

force électrique ne se propage pas et, dans le vide, est de la forme grad. θ.

Dans ce cas, le groupe prendrait l'aspect de trois équations de la forme:

$$X = \frac{c^2}{H}(M\,G_3 - N\,G_2) + \frac{\partial(\theta + H)}{\partial x}$$

rappelant la formule de la force de Lorentz pour une charge dont la vitesse serait:

$$\frac{c\,G_{1,2,3}}{H}.$$

comme sans inertie. Nous pouvons alors, d'après ce qui vient d'être dit, énoncer pour le moment que, sinon peut-être dans le cas le plus général, tout au moins dans des cas déjà extrêmement généraux, les équations de l'électro magnétisme peuvent se présenter sous la même forme que celles de l'hydrodynamique.

De plus, l'équation complémentaire de l'électro magnétisme rappelle par sa forme l'équation complémentaire de l'hydrodynamique dite équation de continuité.

On peut se demander s'il n'y aurait pas là le moyen de réaliser, d'une manière évidemment inattendue, la fusion de l'électro magnétisme et de la gravitation (ou de la dynamique) en une même doctrine, fusion que chercherait la relativité. On pourrait peut-être dire que ce sont justement les équations (5) qui ont manqué à la relativité pour réaliser simplement cette fusion.

De nombreuses tentatives avaient été faites par Lord Kelvin et ses successeurs, en vue d'une identification hydrodynamique de l'électro magnétisme. Elles n'avaient pas conduit au but, et nous voyons maintenant pourquoi. C'est que l'identification de la vitesse avait été recherchée sur les équations de Maxwell mêmes. On obtenait alors l'identification de l'un ou l'autre des deux groupes de Maxwell à volonté, mais non pas celle de tous les deux à la fois. Et, comme le constatait Bjerkness, il manquait une relation.

VI. — *Nouvelle expression du théorème de Poynting* [1]. Considérons un phénomène électro magnétique se propageant par ondes. Nous venons de montrer qu'il existe, soit au voisinage du front de l'onde d'une manière rigoureuse, soit dans tout l'espace d'une manière très approchée, s'il s'agit d'ondes sinusoïdales de grande fréquence, deux groupes de trois relations de la forme:

$$X = \frac{1}{H}(M\,G_3 - N\,G_2)$$

$$L = \frac{1}{H}(Z\,G_2 - Y\,G_3)$$

[1] F. PRUNIER, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 10 juillet, 1933.

en changeant la notation jusqu'ici employée, et en désignant par H, X, Y, Z le potentiel scalaire et le vecteur électrique, et non plus leur produit par c. Si nous multiplions les deux premières équations du premier groupe respectivement par M et L, et que nous les retranchions membre à membre, nous trouvons facilement :

$$MX - LY = (L^2 + M^2 + N^2)\frac{G_3}{H}.$$

Nous aurions de même deux autres équations analogues.

En opérant de même sur les équations du second groupe, nous trouverions trois équations de la forme :

$$MX - LY = (X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{G_3}{H}.$$

Ces deux groupes d'équations sont évidemment compatibles d'après ce qu'on sait des vecteurs électriques et magnétiques, situés ici dans le plan de l'onde.

On peut en déduire le groupe suivant de trois équations de la forme :

$$c(MX - LY) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2)\frac{cG_3}{H}.$$

Les premiers membres représentent les composantes du vecteur de Poynting, dont on obtient ainsi une expression qui paraît intéressante. Dans les seconds membres, le premier facteur $\frac{1}{2}(X^2 + ... + N^2)$ représente la densité de l'énergie; le second facteur $\frac{cG_{1, 2, 3}}{H}$ se transforme d'un système à un autre de la relativité restreinte suivant des formules en tous points identiques aux formules de composition des vitesses. Si l'on pouvait le considérer comme représentant une vitesse (nous reviendrons sur ce point, chap. V, paragr. V), on serait bien d'accord avec la signification du vecteur radiant mesurant la quantité de mouvement produite par l'écoulement de l'énergie dans le champ électro magnétique. Un calcul analogue aurait pu être fait en employant les formules (3 *bis*) dans le cas où la force électrique n'aurait pas été perpendiculaire au potentiel vecteur. On aurait obtenu, en se bornant au cas où $V = c$, trois équations de la forme :

$$c(MX - LY) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2 - \\ - X_1^2 - Y_2^2 - Z_1^2)\frac{cG_3}{H}.$$

L'énergie provenant de la partie de la force électrique dirigée suivant le potentiel vecteur ne se propagerait pas ; le reste de l'énergie se propagerait avec la vitesse $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$.

VII. — *Résumé des principaux résultats.* Dans le cas du champ électro-magnétique créé par le mouvement d'une ou plusieurs charges électriques suivant une trajectoire rectiligne, ou suivant plusieurs trajectoires rectilignes parallèles, avec la vitesse v par rapport à un certain système d'axes rectangulaires, nous avons montré qu'il existe, entre les vecteurs électrique X, Y, Z, magnétique L, M, N, le potentiel scalaire H et le potentiel vecteur G_1, G_2, G_3, les relations [1] :

$$\begin{aligned} LH &= ZG_2 - YG_3 \\ MH &= XG_3 - ZG_1 \\ NH &= YG_1 - XG_2 \\ LG_1 + MG_2 &+ NG_3 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

dont la dernière peut d'ailleurs se déduire des trois premières, ou, inversement, y conduire.

Les équations (3) sont valables, quelle que soit la vitesse de la charge. On en déduit, dans des cas déjà nombreux, les équations (5) et (6).

Si l'on suppose que la charge est animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse voisine de c, on peut leur adjoindre un autre groupe d'équations toutes analogues. Dans ce cas, en effet, le vecteur électrique est, comme il est bien connu et comme cela résulte en particulier très simplement des équations

[1] Nous appelons X, Y, Z et H le vecteur électrique et le potentiel scalaire, et non plus leur produit par c.

de la relativité, normal au potentiel vecteur, dirigé lui-même suivant la trajectoire rectiligne de la charge. Ce groupe d'équations est le suivant:

$$\begin{aligned} XH &= MG_3 - NG_2 \\ YH &= NH_1 - LG_3 \\ ZH &= LG_2 - MG_1 \\ XG_1 &= YG_2 + ZG_3 = 0\,. \end{aligned} \qquad (3\ \textit{ter})$$

Si la charge était animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v, différente de c, il faudrait substituer au groupe (3*ter*) un groupe plus compliqué où interviendraient, au lieu de X, Y, Z, les projections de la composante de ce vecteur normale au potentiel vecteur, et que nous écrirons seulement pour une disposition des axes dans laquelle l'axe des x serait dirigé suivant la trajectoire de la charge; alors G_2 et G_3 sont nuls, ainsi que L, et Y et Z sont les projections de la composante du vecteur électrique normale au potentiel vecteur. Il est facile de voir que l'on a:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2}\, YH &= \quad NG_1 \\ \frac{v^2}{c^2}\, ZH &= -MG_1 \end{aligned} \qquad (3\ \textit{bis})$$

Il suffit, en effet, de faire les transformations nécessaires pour passer au système dans lequel la charge est au repos pour trouver des identités.

Deux autres équations existeraient dans ce système, qui, avec le choix des axes ainsi convenu, se réduisent à des identités.

VIII. — *Calcul relatif à l'onde sinusoïdale simple.* Nous avons montré aussi que ces relations ont lieu sur un front d'onde, La démonstration donnée est générale, puisqu'elle ne fait appel qu'aux équations de Maxwell et aux équations de propagation de l'onde électro-magnétique.

Ces relations sont valables aussi pour une onde sinusoïdale et dans tout l'espace-temps. Cependant, elles ne sont alors qu'approchées, avec une erreur insignifiante pour une fréquence un peu élevée.

Nous n'avons fait au paragraphe IV qu'indiquer le calcul à faire en ce cas. Faisons-le de façon détaillée pour l'onde électromagnétique sinusoïdale simple de vitesse c. Si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la direction de propagation, les équations de cette onde sont:

$$X = X_0 \sin \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t \right)$$

$$Y = Y_0 \sin \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t \right)$$

. . . .

$$N = N_0 \sin \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t \right)$$

$$G_1 = G_{01} \cos \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t \right)$$

. . . .

$$H = H_0 \cos \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t \right)$$

les lettres à indices $_0$ étant des constantes et la fréquence étant $\frac{\nu}{2\pi}$. Disons, de plus, que cette fréquence sera supposée assez grande et que H_0 sera supposé différent de zéro.

Si nous substituons dans l'une des équations du premier groupe de Maxwell:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

par exemple nous trouvons:

$$L_0 = \beta Z_0 - \gamma Y_0 .$$

Subtituons maintenant dans l'équation:

$$X = -\frac{1}{c} \frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

nous trouvons:

$$-\frac{c X_0}{\nu} = G_{01} - \alpha H_0 ,$$

d'où nous tirons:

$$\alpha = \frac{G_{01}}{H_0} + \frac{c}{\nu} \frac{X_0}{H_0} .$$

On aurait de même:

$$\beta = \frac{G_{02}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{Y_0}{H_0}$$

$$\gamma = \frac{G_{03}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{Z_0}{H_0}.$$

En reportant ces valeurs de β et γ dans les équations, nous trouvons:

$$L_0 H_0 = Z_0 G_{02} - Y_0 G_{03} + \frac{c}{\nu}(Z_0 Y_0 - Z_0 Y_0)$$

et, par suite:

$$L H = Z G_2 - Y G_3 .$$

Le groupe des équations (1) se trouve donc ainsi établi d'une façon rigoureuse dans le cas de l'onde sinusoïdale simple, quelle que soit la fréquence. Cela suffit pour qu'on en déduise comme aux paragraphes II et III ci-dessus les équations (5) et les équations hydrodynamiques (6).

Considérons maintenant le second groupe de Maxwell, et substituons-y les valeurs de X, ... N.

En opérant, par exemple, sur l'équation:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},$$

nous trouvons:

$$X_0 = \gamma M_0 - \beta N_0 ,$$

et, en remplaçant γ et β:

$$X_0 H_0 = M_0 G_{03} - N_0 G_{02} + \frac{c}{\nu}(M_0 Z_0 - N_0 Y_0) .$$

Or, ν étant supposé assez grand, le terme ayant $\frac{c}{\nu}$ en facteur est négligeable, et l'on est bien conduit au groupe des équations (2).

Un raisonnement tout analogue convient au cas où il ne s'agit plus seulement d'ondes sinusoïdales simples, mais d'ondes sinusoïdales quelconques :

$$X = X_0 \sin \nu\Phi$$

. . . .

$$G_1 = G_{01} \cos \nu\Phi$$

. . . .

$$H = H_0 \cos \nu\Phi$$

X_0 ... H_0 désignant des fonctions quelconques, ainsi que Φ, sous la condition que X_0 ... H_0 ne soient pas très grandes non plus que leurs dérivées.

IX. — *Cas d'exception.* Les équations:

$$\alpha = \frac{G_{01}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{X_0}{H_0},$$

. . . .

montrent que pour ν très grand, le potentiel vecteur est très près d'être dirigé suivant la direction de propagation de l'onde. Il peut cependant y avoir un cas d'exception; c'est le cas où H_0

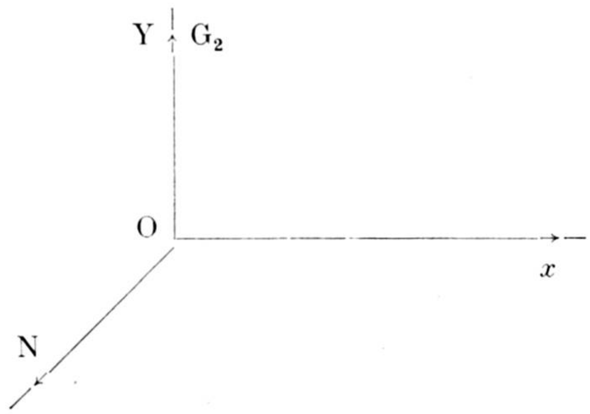

Fig. 2.
Propagation d'une onde sinusoïdale simple suivant la direction Ox, le vecteur électrique étant Y et le vecteur magnétique, N.

serait nul, parce que l'on n'aurait pas alors le droit d'effectuer la division par H_0. Ce cas se produit en effet, et quel que soit ν, quand le potentiel vecteur est parallèle au vecteur électrique.

Supposons une onde sinusoïdale simple se propageant dans la direction Ox (fig. 2), le vecteur électrique étant Y, le vecteur magnétique N, le potentiel vecteur:

$$G_2 = G_{02} \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right).$$

L'équation:

$$X = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

montre tout de suite que H ne dépend pas de x.

L'équation complémentaire:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

montre aussi, le premier membre étant nul, que H ne dépend pas de t.

Or, H étant de la forme:

$$H_0 \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right) ,$$

il faut, soit que le cosinus ne dépende ni de x, ni de t, et alors il n'y a pas d'onde, soit que H_0 soit nul.

Les équations:

$$Y = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_2}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad N = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

donnent alors:

$$-\frac{cY_0}{\nu} = G_{02} , \qquad -\frac{cN_0}{\nu} = G_{02} .$$

Même dans ce cas, on voit que les équations (3) sont encore vérifiées, les deuxième et troisième équations (3 *ter*) le sont aussi; les termes de la première et de la quatrième équation (3 *ter*) se réduisent respectivement à NG_2 et YG_2, c'est-à-dire à:

$$\frac{c}{\nu} N_0^3 . \sin \nu \left(\frac{x}{c} - t\right) \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right)$$

et

$$\frac{c}{\nu} Y_0^2 . \sin \nu \left(\frac{x}{c} - t\right) \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right) .$$

Pour ν très grand, ils sont très petits, et les équations en question sont encore vérifiées d'une façon très approchée [1].

[1] Il faut bien remarquer encore que les équations (5) et, par conséquent les équations (6) peuvent aussi dans l'onde sinusoïdale simple se déduire de la substitution dans l'équation de Maxwell

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 ,$$

écrite pour l'axe des x dirigé suivant la direction de propagation, des expressions:

$$Y = NG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad Z = -MG_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

(§ III).

X. — Convergence des résultats tirés du mouvement des charges et de ceux *tirés de la propagation des ondes.* — Nous venons donc de voir que, d'une part, l'étude du mouvement rectiligne d'une charge avec la vitesse c conduit aux équations (1) et (2); que, d'autre part, l'étude de l'onde conduit à ces mêmes équations rigoureusement sur le front de l'onde; rigoureusement encore, en ce qui concerne le groupe (3), d'une façon très approchée pour les fréquences élevées en ce qui concerne le groupe (3 *bis*) s'il s'agit d'ondes sinusoïdales simples; enfin de façon très approchée pour les grandes fréquences en ce qui concerne les deux groupes s'il s'agit d'ondes sinusoïdales quelconques. Cette concordance des deux méthodes est bien d'accord avec les idées nouvelles sur la liaison des ondes et du mouvement des corpuscules. Cependant, l'attention est attirée sur le fait que pour réaliser une concordance absolument complète, il faut que les fréquences des ondes soient très grandes, théoriquement même, infinies. C'est là une remarque qui mériterait réflexion.

Peut-être cette remarque a-t-elle quelque rapport avec le fait bien connu que si ν_0 est la fréquence propre d'un corpuscule animé par rapport à un système de la vitesse v, la fréquence dans ce système est:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\nu^2}}}$$

et que, par suite, si v s'approche de c, peut devenir tout de suite très grand. On sait d'ailleurs, par l'expérience, que les fréquences de toutes les radiations connues sont très grandes.

XI. — *Application de la transformation d'opérateurs de Schrödinger.* Quoi qu'il en soit, si nous considérons seulement le cas du mouvement rectiligne avec une vitesse voisine de c, d'une ou plusieurs charges, les relations (3) et (3 *ter*) sont vérifiées, qu'on les considère comme liées au mouvement des charges ou comme liées à l'onde associée à ce mouvement, puisque, dans cette onde, le potentiel vecteur est dirigé suivant la direction de propagation, normalement aux deux vecteurs électrique et magnétique.

L'équation:

$$XH = MG_3 - NG_2 ,$$

par exemple, peut s'écrire:

$$X = \frac{1}{c}\left(M\frac{c^{G_3}}{H} - N\frac{c^{G_2}}{H}\right) .$$

Avec les deux équations analogues donnant Y et Z, elle se présente sous la forme de relations de Lorentz donnant la force électro dynamique agissant sur une charge égale à l'unité et animée d'une vitesse $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$, c'est-à-dire, de la vitesse c, de composantes $c\alpha$, $c\beta$, $c\gamma$.

On remarque que, de plus, dans tous les cas, et même s'il s'agit du mouvement d'une charge avec une vitesse v différente de c, ou même encore plus généralement s'il s'agit d'un champ absolument quelconque, les composantes $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$ se transforment d'un système à un autre de la relativité restreinte par des formules en tous points identiques aux formules de composition des vitesses [1]. Ceci suggère de chercher à considérer ces grandeurs comme représentant effectivement les composantes d'une vitesse et également d'accord avec le fait que la quantité de mouvement d'un mobile dans un champ électromagnétique et son énergie sont proportionnelles respectivement à $G_{1,2,3}$ et H.

Remplaçons dans les groupes (3) et (3 *ter*) $\frac{G_{1,2,3}}{H}$ respectivement par $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{p_2}{p_0}$, $\frac{p_3}{p_0}$, les $p_{0,1,2,3}$, représentant les composantes d'un certain quadrivecteur impulsion. Les deux groupes s'écrivent:

$$\begin{aligned}
p_0 M &= p_3 X - p_1 Z , \\
p_0 N &= p_1 Y - p_2 X , \\
p_1 L + p_0 M + p_3 N &= 0 , \\
p_0 X &= p_3 M - p_2 N , \\
p_0 Y &= p_1 N - p_3 L , \\
p_0 Z &= p_2 L - p_1 M , \\
p_1 X + p_2 Y + p_3 Z &= 0 .
\end{aligned}$$

[1] Chap. V, § V.

Effectuons sur ces équations la transformation d'opérateurs de Schrödinger, qui consiste à remplacer, dans une équation mécanique:

$$p_0 \text{ par } -\frac{1}{c}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$p_{1,2,3} \text{ par } \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x \text{ ou } \partial y \text{ ou } \partial z}$$

pour obtenir une équation ondulatoire.

Nous trouvons, le facteur $\frac{h}{2\pi i}$ étant commun,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{et deux équations analogues:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{et deux équations analogues:}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Ce sont là les deux groupes d'équations de Maxwell. De plus, des relations (3) et (3 *ter*) ou des relations:

$$\alpha = \frac{G_1}{H}, \qquad \beta = \frac{G_2}{H}, \qquad \gamma = \frac{G_3}{H},$$

vérifiées dans le mouvement rectiligne uniforme d'une charge de vitesse voisine de c, on déduit:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = H^2.$$

En introduisant $p_{0,1,2,3}$, cette relation devient:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = 0,$$

d'où, par transformation:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0,$$

qui est l'équation de la propagation.

Si l'on avait remplacé une fois seulement H et $G_{1,2,3}$ par $p_{0,1,2,3}$, on aurait trouvé:

$$p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 = p_0 H$$

et la transformation aurait donné:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t},$$

ce qui est l'équation complémentaire de la théorie électromagnétique.

Des relations $\alpha = \frac{G_1}{H}$, etc., on tire:

$$a G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3 = H .$$

Or, s'il s'agit d'un mouvement de charges de densité P (unités électro statiques) donnant une densité de courant de composantes u_1, u_2, u_3 (unités électro magnétiques), on a:

$$\frac{u_1}{p} = \alpha , \quad \text{etc.} ,$$

d'où

$$G_1 u_1 + G_2 u_2 + G_3 u_3 - PH = 0 .$$

Le premier membre est, au coefficient $-\frac{1}{c}$ près, le terme d'action de substance de l'électricité. En tout cas où il est nul, et notamment dans le cas envisagé, la transformation donne:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t} = 0 ,$$

ce qui est l'équation de la conservation de l'électricité.

Si l'on passe maintenant au cas où la vitesse v des charges serait différente de c, on déduit des équations (3 *bis*):

$$G_1^2 = \frac{v^2}{c^2} H^2 ,$$

ou, avec une disposition quelconque des axes:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_2^3 = \frac{v^2}{c^2} H^2 .$$

Après multiplication par une fonction d'onde, la transformation donnerait:

$$\Delta \psi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

avec $V = \frac{c^2}{v}$, ce qui est l'équation d'une onde de phase. Il est difficile de ne voir dans ce qui vient d'être dit que des coïncidences. Peut-être, au contraire, pourra-t-on y trouver un moyen de déterminer le sens profond de la transformation d'opérateurs. Pour le moment, cela renforce encore l'idée que le vecteur $G_{1,2,3}$ peut représenter une vitesse.

Si l'on considère les expressions que nous avons données plus haut de composantes du vecteur de Poynting, on trouve, en faisant le même remplacement, par exemple:

$$p_0 (LY - MX) = \frac{1}{2} p_3 (X^2 + \ldots + N^2)$$

et ensuite:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (LY - MX) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (X^2 + \ldots + N^2) .$$

Ceci n'est pas autre chose que l'une des équations canoniques d'Hamilton en mécanique, $\frac{1}{c}(LY - MX)$ étant une composante de la quantité de mouvement, et $\frac{1}{2}(X^2 + \ldots + N^2)$ l'énergie.

On citerait encore d'autres cas où la même correspondance a lieu.

XII. — *Vue d'ensemble sur les résultats obtenus.* — Le résultat essentiel que nous avons obtenu dans ce chapitre est le suivant: Soit G_1 le potentiel vecteur d'un champ électro magnétique en un point O, origine du trièdre trirectangle de référence $O\,x\,y\,z$; G_1 est supposé dirigé suivant Ox; le vecteur magnétique a pour composantes M et N situées dans le plan $y\,o\,z$; le vecteur électrique a pour composantes X, Y, Z, n'étant pas, en général, perpendiculaire au potentiel vecteur.

Dans ces conditions, on peut toujours définir deux fonctions φ et ψ par les relations:

$$Y = \quad NG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$Z = - MG_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

A l'aide de l'équation de Maxwell:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 ,$$

on peut établir que $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Avec une disposition quelconque des axes, ces relations deviennent alors, si X_1, Y_1, Z_1 désignent les composantes de la projection du vecteur électrique sur la direction du potentiel vecteur:

$$X = X_1 + MG_3 - NG_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$Y = Y_1 + NG_1 - LG_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$Z = Z_1 + LG_2 - MG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

X_1, Y_1, Z_1 sont d'ailleurs nulles dans des cas assez généraux; elles ne se propagent pas dans l'onde électro magnétique.

D'autre part, on a toujours:

$$X = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_3}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial z} .$$

En éliminant X Y Z entre les deux derniers groupes d'équations, on trouve:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t} + MG_3 - NG_2 + \frac{\partial (H - \varphi)}{\partial x} + X_1 = 0$$

et deux équations analogues.

Ces équations sont, avec celles qui définissent le vecteur magnétique comme rotationnel du potentiel vecteur, de la même forme que les équations d'Helmholtz en hydrodynamique. L'équation dite complémentaire:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

joue, de plus, le rôle de l'équation de continuité de l'hydrodynamique, qui est de la même forme. Cela amène à considérer le potentiel vecteur en un point comme la vitesse en ce point d'un certain fluide réel ou fictif. Nous donnons aussi d'autres raisons de penser qu'il puisse en être ainsi. En particulier, nous montrons que la force électrique peut s'écrire sous une forme analogue à celle de la force électro dynamique de Lorentz, le potentiel vecteur $\left(\text{ou plutôt son produit par } \frac{c}{H}\right)$ jouant le rôle de la vitesse de la charge dans la formule de Lorentz.

Nous montrons aussi l'existence de deux groupes de relations de la forme:

$$LH = ZG_2 - YG_3$$
$$\frac{XH}{V^2} = MG_3 - NG_2 \, .$$

d'où l'on déduit une expression du théorème de Poynting qui conduit aussi à donner à $G_{1,2,3}$ un certain caractère de vitesse. Enfin nous renforçons encore l'idée de considérer $G_{1,2,3}$ comme une vitesse en montrant que si l'on effectue sur lui une transformation d'opérateurs comme celle de Schrödinger, on obtient une correspondance entre deux groupes nombreux d'équations, parmi lesquelles se trouvent celles qui expriment le théorème de Poynting et celles d'Hamilton en mécanique.

Chapitre V

Brève esquisse d'une première interprétation

I. — *Essai d'interprétation des résultats obtenus.* — Les analogies constatées dans le chapitre précédent appellent presque inévitablement, pour prendre tout leur sens, l'idée d'un retour à l'hypothèse de l'éther, le potentiel vecteur devant être identifié avec la vitesse de l'éther.

Essayons néanmoins d'esquisser une autre interprétation, *pour ne recourir à l'éther qu'en tout dernier lieu.* On est conduit, en mécanique ondulatoire, à imaginer un fluide fictif dit fluide de probabilité, et à envisager un mouvement des éléments de ce fluide, dits éléments de probabilité. Les vitesses qu'on envisage en mécanique ondulatoire sont les dérivées partielles d'une même fonction S; il y a fonction des vitesses. Mais il n'est pas impossible d'envisager un fluide de probabilité avec tourbillons qui, lorsque le tourbillon serait nul, deviendrait identique au fluide de probabilité de la mécanique ondulatoire. Il jouerait par rapport aux mouvements hydrodynamiques, avec tourbillons, le même rôle que joue le fluide de probabilité ordinaire par rapport aux mouvements qui présentent une fonction des vitesses.

Ceci dit, revenons à l'électro magnétisme. Considérons toujours le potentiel vecteur comme une vitesse. Ecrivons à nouveau l'équation (4) du chapitre IV et écrivons l'équation complémentaire:

$$H = \frac{1}{2}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2) + V = H_1 + \varphi \,. \qquad (4)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} \,. \qquad (c_1)$$

Considérons pour commencer, le cas où il y a fonction — S des vitesses G. Ces équations s'écrivent, en tenant compte de ce que, comme on le verra tout à l'heure, on a:

$$H_1 = \frac{\partial S}{\partial t} \,,$$

à une fonction près ne dépendant que de t:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V - \varphi = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} \,.$$

Comparons ces équations aux équations que vérifieraient en mécanique ondulatoire la phase S et l'amplitude a d'une onde:

$$\psi = ae^{\frac{2\pi i}{h}\mathrm{S}} .$$

Ces équations sont:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}\right)^2\right] + \mathrm{F} + \mathrm{F}_1 = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z} + \frac{1}{2}a\left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial a}{\partial t} ,$$

F désignant le potentiel ordinaire et F_1 le potentiel quantique de la mécanique ondulatoire.

L'équation de l'amplitude est d'ailleurs, comme on sait, analogue à l'équation de continuité hydrodynamique du fluide de probabilité de densité ρ:

$$\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} + \rho \Delta \mathrm{S} = \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Nous serions arrivés à une identification complète de nos équations (4) et (C_1) dans le cas particulier envisagé avec les équations ondulatoires, et avec les équations hydrodynamiques du fluide de probabilité, si nous avions pu compléter préalablement le premier membre de l'équation (C_1) par l'adjonction de la somme de termes:

$$\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{G}_1 \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \mathrm{G}_2 \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + \mathrm{G}_3 \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right) .$$

Alors nous aurions trouvé:

$$\mathrm{H} = c^2 \log_e \rho = c^2 \log_e a^2 .$$

Pouvons nous faire cette adjonction ? Ceci revient à nous demander si nous sommes suffisamment autorisés par les coïncidences d'abord exposées à considérer les G comme composantes de la vitesse d'éléments fictifs ou supposés, cela, bien entendu à titre d'hypothèse et sous réserve que les résultats ultérieurs soient d'accord avec cette hypothèse.

Nous devrions pouvoir, en particulier, reprendre, en plusieurs cas, sans difficultés, la forme ordinaire de l'équation complémentaire. On sait que cette forme est équivalente à la condition de divergence nulle du vecteur électrique, dans le diélectrique parfait, moyennant l'équation de propagation des ondes. Cette condition de divergence nulle est dite souvent condition de transversalité.

Sous sa forme ordinaire, c'est-à-dire sous celle qui correspond à

$$G_1 \frac{\partial H}{\partial x} + G_2 \frac{\partial H}{\partial y} + G_3 \frac{\partial H}{\partial z} = 0 , \qquad (C_2)$$

l'équation complémentaire permet de satisfaire aux équations de Maxwell, moyennant les équations des ondes sous leur forme ordinaire. Or les ondes satisfaisant aux équations de Maxwell sont polarisées, c'est-à-dire, en somme, de nature spéciale. D'autre part, il semble bien que les ondes de la mécanique ondulatoire ne se polarisent pas et que même elles peuvent ne pas être transversales. A cause de cela, je proposerai de considérer la condition (C_2) comme une condition de transversalité dans le diélectrique parfait.

En optique, la condition:

$$v_1 \frac{\partial a}{\partial x} + v_2 \frac{\partial a}{\partial y} + v_3 \frac{\partial a}{\partial z} = 0 ,$$

a désignant l'amplitude et v_1, v_2, v_3, les composantes de la vitesse des photons, devrait aussi être considérée comme une condition de transversalité. Si l'on examine le cas d'une onde transversale associée à un mouvement rectiligne de photons, on sait que les surfaces de niveau de l'amplitude sont des cylindres droits ayant pour axe la trajectoire des photons. Or, le vecteur dont les cosinus directeurs sont proportionnels à:

$$\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial a}{\partial z},$$

est normal en chaque point à la surface de niveau qui passe par ce point. Il est donc normal à la vitesse des photons, d'où la condition précitée.

Mais cela entraînerait aussi que, quand la condition n'est pas vérifiée, on ne doit pas avoir affaire à une onde transversale, et c'est là un point délicat. Moyennant ces précautions, nous pourrons faire correspondre aux équations (4) et (C_1) une onde qui, dans le cas de la fonction des vitesses, sera:

$$\psi = e^{\frac{H}{2c^2}} \cdot e^{\frac{2\pi i S}{h}}$$

et dans le cas général:

$$\psi = e^{\frac{H}{2c^2}} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{h}\int (G_1\,dx + G_2\,dy + G_3\,dz - H\,dt)} \quad ;$$

cette onde n'est pas, évidemment, l'onde électro magnétique ordinaire. C'est une onde microscopique, qui existerait même dans un champ macroscopiquement statique; nous la rencontrerons à nouveau dans le chapitre VI. Sa vitesse de propagation serait:

$$\frac{H}{\sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}} \cdot$$

L'intégrale qui figure dans l'expression de l'onde est celle que l'on retrouve dans la théorie de Weyl.

Si l'on considère un corpuscule de masse m_0 et de charge électrique ρ en mouvement dans le champ électro magnétique avec la vitesse v, de composantes v_1, v_2, v_3, on sait que la quantité de mouvement de ce corpuscule aurait pour composantes:

$$\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho G_1 \,, \qquad \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho G^2 \,, \qquad \frac{m_0 v_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho G_3$$

et que l'énergie serait:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho H \,.$$

Si l'on imagine un corpuscule électrisé, de masse propre nulle, les composantes de la quantité de mouvement, et l'énergie sont alors respectivement proportionnelles à G_1, G_2, G_3 et H.

L'expression ci-dessus de l'onde ψ permet donc de maintenir la relation connue de la mécanique ondulatoire entre la phase de l'onde et les grandeurs mécaniques afférentes à un corpuscule électrisé associé, de masse propre nulle. Le fluide auxiliaire auquel on aurait affaire serait composé de tels corpuscules.

Si l'on tient compte de ce que G_1, G_2, G_3 désignent les composantes de la vitesse de ces corpuscules, on voit que l'intégrale peut s'écrire:

$$\int (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - H)\, dt\ .$$

Ce serait une autre expression de la phase de l'onde, ou de l'action des éléments du fluide. Si on applique alors le principe de la moindre action, on retrouve les équations de l'électromagnétisme complétées par les équations (5), en tenant compte de l'existence du rotationnel L, M, N.

C'est du symbole que nous venons d'exposer dont nous allons nous servir, en vue de donner d'autres justifications des équations (5) du chapitre IV, fondamentales pour l'interprétation ici exposée. Plusieurs résultats importants de l'électro magnétisme peuvent, en effet, se déduire de ces équations. Il s'agira seulement ici de la formule de la force électro dynamique de Lorentz.

Nous montrerons ensuite qu'on retrouve à partir des équations (4) et (6) l'idée de base de la mécanique ondulatoire.

II. — *Obtention de la formule de la force de Lorentz.* — Puisque X, Y, Z représentent les composantes du produit par c de la force électrique E, on voit que la force mécanique agissant sur la charge e supposée en repos dans le champ est, en notation vectorielle, d'après les équations (5), chapitre IV:

$$f = \mathrm{E}e = e\left(\frac{\vec{l}\ \vec{g}}{c} - \mathrm{grad}\ \varphi_1\right) \qquad (f)$$

l représentant la force magnétique, g, le potentiel vecteur et φ_1 étant égal à $\frac{\varphi}{c}$.

Si nous supposons maintenant la charge e animée d'une vitesse $\vec{v}$, cette vitesse doit se composer avec la vitesse g.

La force f_v agissant sur la charge en mouvement dans le champ est donc:

$$f_v = e\left(\vec{l}\,\frac{\overleftarrow{g} + \vec{v}}{c} - \operatorname{grad} \varphi_1\right) = e\left(\frac{\vec{l}\,\overleftarrow{v}}{c}\right) + \mathrm{E}\,.$$

C'est bien la formule de la force de Lorentz.

L'équation vectorielle (f) équivalente aux équations (5) est elle-même une formule de Lorentz, donnant la force mécanique f et la force électrique E agissant sur une charge en repos dans le champ, c'est-à-dire animée de la vitesse g par rapport aux éléments du fluide auxiliaire. Dans le champ d'un nombre quelconque de charges animées de mouvements quelconques, si l'on suppose encore que le potentiel vecteur résultant est une vitesse (la vitesse des éléments d'un certain fluide auxiliaire) et si l'on applique la formule de Lorentz, on retrouve la formule (f) et les équations (5). Comme les équations (1) et (2) sont, bien entendu, valables, on généralise ainsi de nouveau, pour un cas quelconque, la théorie exposée dans les premiers paragraphes du chapitre IV.

III. — La correspondance entre l'équation de Jacobi et l'équation des ondes, base de la mécanique ondulatoire, retrouvée à partir des équations (4) et (6). Nous avons associé aux équations de l'électro magnétisme les équations de l'hydrodynamique, qui, grâce aux équations (5) revêtent exactement la même forme. Il vient à l'idée que cette analogie doit permettre de retrouver les analogies qui sont à la base de la mécanique ondulatoire et qu'on peut considérer comme condensées dans l'analogie de forme de l'équation de Jacobi et de l'équation dite de l'optique géométrique.

C'est bien ce qui a lieu. De l'équation (4), considérée comme hydrodynamique:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{G}_1^2 + \mathrm{G}_2^2 + \mathrm{G}_3^2) + \mathrm{V} = \mathrm{T} + \mathrm{V} = \mathrm{H}_1 + \varphi\,.$$

ou encore:

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{T} + \mathrm{V} - \varphi\,,$$

on déduit, en effet, quand le tourbillon est nul, c'est-à-dire quand il existe une fonction des vitesses, l'équation de Jacobi. Si l'on a, en effet:

$$G_1 = -\frac{\partial S}{\partial x}, \qquad G_2 = -\frac{\partial S}{\varrho y}, \qquad G_3 = -\frac{\partial S}{\partial z}$$

les équations (6) prennent la forme:

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial x \, \partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x} = 0 , \quad \text{etc.}$$

On en déduit, à une fonction près ne dépendant que de t:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + H_1 = 0$$

où

$$H_1 = \frac{1}{2}(\text{grad } S)^2 + V - \varphi = \frac{\partial S}{\partial t} .$$

Mais d'un autre côté, des équations de l'électro magnétisme on aurait déduit l'équation de propagation d'une onde et ensuite l'équation de l'optique géométrique, transcription de l'équation de Jacobi.

Les équations de propagation du potentiel vecteur sont:

$$\Delta G_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} = 0 ;$$

et deux équations analogues.

Comme il y a fonction S du potentiel vecteur, on a, d'après l'équation $H = T + V$ considérée comme équation électromagnétique.

$$\frac{1}{2}(\text{grad } S)^2 + V = H .$$

D'autre part, l'équation complémentaire donnerait:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta S .$$

Par comparaison avec l'équation des ondes, que S vérifierait aussi, on voit que l'on aurait :

$$H = \frac{\partial S}{\partial t} + \varphi_1$$

φ_1 désignant une fonction arbitraire de x, y, z. Alors l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{1}{2} (\text{grad S})^2 + V - \varphi_1 = \frac{\partial S}{\partial t} .$$

Cette équation est la même que celle de Jacobi retrouvée dans la première partie du paragraphe comme équation hydrodynamique, au terme $\varphi - \varphi_1$ près.

Le point de vue de la mécanique ondulatoire, où à l'équation de Jacobi est associée l'équation de l'optique géométrique, apparaît ainsi comme un cas particulier d'un point de vue suivant lequel aux équations de l'hydrodynamique pourraient être associées les équations de l'électro magnétisme sous leur forme complétée (6).

IV. — *Rapprochement tiré de la théorie de l'onde plane de Dirac (Sur une interprétation probabiliste du champ électro magnétique).* Dans le présent paragraphe nous allons montrer le parallélisme de la théorie probabiliste de Dirac pour l'onde plane et de la théorie de l'onde électro magnétique classique en utilisant, dans une partie de l'étude, des relations établies précédemment et nous conclurons à la possibilité d'une interprétation probabiliste de l'électro magnétisme, les potentiels vecteur et scalaire ayant un sens de moment de pivotement et de probabilité, ou inversement à une théorie mécanique de l'électro magnétisme.

Considérons, avec les notations habituelles en théorie de Dirac, une onde plane de vitesse c se propageant suivant l'axe OZ. On sait qu'alors les fonctions d'onde ψ_2 et ψ_4 de Dirac sont égales, et que l'on a $\psi_1 = - \psi_3$.

Entre les composantes d'espace σ_1, σ_2, σ_3 du vecteur densité de moment de pivotement σ, sa composante de temps σ_4 et les composantes des vecteurs densités du moment magnétique $\dot{I}$

et du moment électrique J existent les relations que l'on vérifierait facilement à partir des valeurs de ces grandeurs exprimées à l'aide des ψ et de leurs conjuguées ψ^*:

$$\frac{e}{m_0 c}\sigma_1 + \dot{\mathrm{I}}_x = \frac{eh}{2\pi m_0 c}(\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) ,$$

$$\frac{e}{m_0 c}\sigma_2 + \dot{\mathrm{I}}_y = \frac{eh}{2\pi m_0 c} i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) ,$$

$$\frac{e}{m_0 c}\sigma_3 + \dot{\mathrm{I}}_z = \frac{eh}{2\pi m_0 c}(\psi_1^* \psi_1 - \psi_1^* \psi_2) .$$

e étant la charge et m_0 la masse du corpuscule auquel l'onde est associée.

Comme σ_4 est égal à $-\frac{h}{2\pi}(\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2)$, ces équations s'écrivent aussi, en notation vectorielle:

$$\frac{e}{m_0 c}\overline{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)} + \dot{\bar{\mathrm{I}}} = -\frac{e}{m_0 c}\overline{(p, q, r)}\,\sigma_4 , \tag{1}$$

en désignant par p, q, r les paramètres directeurs d'un vecteur de grandeur égale à σ_4:

$$p = \frac{\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1}{\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2} ,$$

$$q = \frac{i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1)}{\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2} ,$$

$$r = 1 .$$

On vérifie aussi les relations ci-après:

$$p\sigma_1 + q\sigma_2 + r\sigma_3 = -\sigma_4 . \tag{2}$$

et le produit vectoriel:

$$\frac{e}{m_0 c}\left[\overline{(p, q, r)}\ \overline{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}\right] = -\mathrm{J} . \tag{3}$$

On aurait un autre système de relations tout analogues en employant, au lieu des σ, les composantes de la densité de la probabilité de présence et du courant de probabilité, ρu_x, ρu_y, ρu_z, ρc:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{h}{4\pi}\frac{e}{m_0 c}\left(\overline{\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z}\right) + c\overline{\mathrm{J}} = \frac{h}{4\pi}\frac{e}{m_0 c}\left(\overline{p', q', r'}\right)\rho c \\ p'\rho u_x + q'\rho u_y + r'\rho u_z = \rho c , \end{array}\right\} \quad (4)$$

et le produit vectoriel:

$$\frac{h}{4\pi}\frac{e}{m_0 c}\left(\overline{p', q', r'}\right)\left(\overline{\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z}\right) = c\overline{\mathrm{I}} .$$

Dans le système où l'axe Oz est dirigé suivant la direction de propagation de l'onde, on a:

$$p' = i\,\frac{\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1}{\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2} ,$$

$$q' = -\frac{\psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1}{\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2} ;$$

$$r' = 1 .$$

Dans une onde plane électromagnétique classique se propageant dans la direction de cosinus directeurs α, β, γ, existent entre les amplitudes G_{01}, G_{02}, G_{03}, H_0 des potentiels vecteur et scalaire et celles E_0 et M_0 des vecteurs électrique et magnétique les relations, $\frac{\nu}{2\pi}$ désignant la fréquence:

$$\left(\overline{G_{01}, G_{02}, G_{03}}\right) + \frac{c}{\nu}\overline{E}_0 = \left(\overline{\alpha, \beta, \gamma}\right) H_0 ,$$

$$a G_{01} + \beta G_{02} + \gamma G_{03} = H_0 \qquad (5)$$

et le produit vectoriel:

$$\left[\left(\overline{\alpha, \beta, \gamma}\right)\left(\overline{G_{01}, G_{02}, G_{03}}\right)\right] = \frac{c}{\nu}\overline{M}_0 .$$

Or, les équations de Maxwell, dans le vide du moins, étant symétriques par rapport aux vecteurs électrique et magnétique, à une question de signes près, on peut suggérer de définir une autre série de potentiels vecteur et scalaire par les relations:

$$\overline{\mathrm{E}} = -\operatorname{rot}(\mathrm{G}_1', \mathrm{G}_2', \mathrm{G}_3') \ ,$$

$$\overline{\mathrm{M}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{G}_{1,2,3}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \mathrm{H}' \ .$$

On verra alors qu'il existe aussi les relations suivantes entre les amplitudes, dans l'onde sinusoïdale simple:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{(\mathrm{G}_{01}', \mathrm{G}_{02}', \mathrm{G}_{03}')} + \frac{c}{\nu}\overline{\mathrm{M}}_0 = \overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\,\mathrm{H}_0' \\ \alpha \mathrm{G}_{01}' + \beta \mathrm{G}_{02}' + \gamma \mathrm{G}_{03}' = \mathrm{H}_0' \\ \text{et le produit vectoriel:} \\ \overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\,\overline{(\mathrm{G}_{01}', \mathrm{G}_{02}', \mathrm{G}_{03}')} = -\frac{c}{\nu}\overline{\mathrm{E}}_0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

D'autre part, on sait qu'un corps de moment électrique $\mathcal{E}_{1,2,3}$ et de moment magnétique $\mathcal{M}_{1,2,3}$ possède dans un champ électro magnétique h_x, h_y, h_z, H_x, H_y, H_z, une énergie potentielle:

$$-\Sigma(\mathcal{E} h_x + \mathcal{M}\,\mathrm{H}_x) \ .$$

L'énergie du champ électro-magnétique ayant pour densité moyenne:

$$\frac{1}{8\pi}\left(\overline{\mathrm{E}}_0^2 + \mathrm{M}_0^2\right) \ ,$$

cela suggère de définir dans ce champ un moment électrique moyen et un moment magnétique moyen dont les valeurs seront, k étant une certaine constante:

$$\overline{\mathcal{E}}_0 = -k\overline{\mathrm{E}}_0 \ , \qquad \overline{\mathcal{M}} = -k\overline{\mathrm{M}}_0 \ .$$

Alors les équations (5) et (6) pourront s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{k\nu}{c}\,\overline{(G_{01}, G_{02}, G_{03})} + \overline{\mathcal{E}}_0 = -\frac{k\nu}{c}\,\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\, H_0 \,, \\ &-(\alpha G_{01} + \beta G_{02} + \gamma G_{03}) = -H_0 \,, \\ &-\frac{k\nu}{c}\left[\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\;\overline{(G_{01}, G_{02}, G_{03})}\right] = \overline{\mathfrak{M}}_0 \,. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{k\nu}{c}\,\overline{(G'_{01}, G'_{02}, G'_{03})} + \overline{\mathfrak{M}}_0 = -\frac{k\nu}{c}\,\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\, H'_0 \,, \\ &-\left(\alpha G'_{01} + \beta G'_{02} + \gamma G'_{03}\right) = -H'_0 \,, \\ &-\frac{k\nu}{c}\left[\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\;\overline{(G'_{01}, G'_{02}, G'_{03})}\right] = -\mathcal{E}_0 \,. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Le groupe (7) ressemble de très près au groupe (4) et la correspondance des signes est assurée; le groupe (8) ressemble de très près au groupe formé par les équations (1), (2), (3) et la correspondance des signes est également assurée.

Ceci suggère d'attribuer aux deux espèces de potentiels scalaires et vecteurs que nous avons considérés dans ce qui précède un sens de probabilité et de moment de pivotement respectivement, si l'on envisage l'analogie dans l'hypothèse probabiliste.

On vérifierait d'ailleurs qu'entre ces deux espèces de potentiels existe dans l'onde électro magnétique sinusoïdale la relation:

$$G_1 G'_1 + G_2 G'_2 + G_3 G'_3 - HH' = 0 \,,$$

entièrement analogue à celle qui, dans l'onde plane de Dirac, exprime l'orthogonalité du quadrivecteur moment de pivotement et du quadrivecteur probabilité.

Il y a cependant une différence. C'est que dans les équations de (1) à (4) figurent deux séries de paramètres directeurs p, q, r et p', q', r', alors que dans les groupes (7) et (8) figure une seule série de cosinus directeurs. Les deux groupes de paramètres se confondent et deviennent des cosinus quand, dans l'onde plane de vitesse c se propageant suivant Oz, on a soit $\psi_1 = -\psi_3 = 0$, soit $\psi_2 = \psi_4 = 0$.

Il ne reste plus qu'une seule fonction ψ.

Alors, tous les moments I et J de Dirac sont nuls, à moins que m_0 ne soit nul aussi. On n'est plus sûr aujourd'hui du fait que le m_0 du photon soit nul. Supposons I et J non pas nuls, mais aussi petits que l'on voudra. Si l'on fait la comparaison des équations (1) à (4) avec (7) et (8) après multiplication des premières par la fréquence ν, supposée très grande, les produits $\nu \dot{J}$ et $\nu \dot{I}$ pourront n'être pas très petits, bien que $\dot{I}$ et $\dot{J}$ doivent l'être.

L'assimilation est donc possible, pourvu que la fréquence de l'onde sinusoïdale électromagnétique soit assez grande.

Dans l'hypothèse déterministe, on est conduit de nouveau à assimiler le potentiel $G_{1,2,3}$ à une vitesse ou plus exactement au produit d'une vitesse par une densité de fluide.

Des équations concernant la théorie de l'onde plane de Dirac données ci-dessus, il est possible de déduire d'autres équations qui permettent de retrouver la même conclusion, en mettant en lumière certains points. On vérifierait d'ailleurs facilement ces équations, de manière directe, pour l'onde plane de vitesse c; ce sont les suivantes:

$$\overline{\dot{I}}\,\sigma_4 = [\overline{J}\,\overline{\sigma}] , \tag{9}$$

$$\overline{\dot{J}}\,\sigma_4 = -[\overline{I\sigma}] , \tag{18}$$

$$\overline{\dot{I}}\,c\rho = -[\overline{J\rho u}] , \tag{11}$$

$$\overline{\dot{J}}\,c\rho = [I\rho u] . \tag{12}$$

Certaines des composantes de ces relations seraient même valables dans l'onde plane de Dirac de vitesse non égale à c.

Or nous avons montré qu'existent en électro magnétisme les relations suivantes entre les amplitudes des vecteurs électrique et magnétique et celles des potentiels scalaire et vecteur habituels:

$$\overline{M}_0\,H_0 = -[\overline{E_0\,g_0}] , \tag{11'}$$

$$\overline{E}_0\,H_0 = [\overline{M}_0\,\overline{g}_0] . \tag{12'}$$

Et l'on verrait de même qu'existent aussi les relations:

$$\overline{M}_0\,H_0' = -[\overline{E}_0\,\overline{g}_0'] , \tag{9'}$$

$$\overline{E}_0\,H_0' = [\overline{M}_0\,\overline{g}_0'] . \tag{10'}$$

Les quatre groupes de relations (9′) à (12′) sont rigoureusement exacts sur un front d'onde; dans l'onde sinusoïdale simple électromagnétique, les groupes (10′) et (11′) sont encore rigoureusement exacts; les groupes (9′) et (12′) sont seulement approchés avec une erreur égale à $\frac{c}{\nu}\overline{E}_0\overline{M}_0$, insignifiante pour une fréquence assez élevée, ou pour des champs assez petits.

La comparaison des équations (9) à (12) avec les équations (9′) à (12′) montre, elle aussi, que l'on peut attribuer aux deux espèces de potentiels le sens de quadrivecteur moment de pivotement et de quadrivecteur probabilité, en doctrine probabiliste. En doctrine déterministe, la conclusion confirme que le potentiel vecteur peut apparaître comme une vitesse.

On peut remarquer que, des équations (11) et (12), on déduirait 3 équations de la forme suivante:

$$c\left(\dot{I}_x \dot{J}_y - \dot{I}_y \dot{J}_x\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\dot{I}^2 + \dot{J}^2\right) u_z$$

qui traduisent l'équivalent du théorème de Poynting.

Aux 16 densités de Dirac, nous voyons qu'on peut, dans l'onde électro magnétique, faire correspondre d'abord 14 grandeurs. Il en reste deux, les invariants Ω_1 et Ω_2. Le premier paraît lié à la masse propre des corpuscules du champ; quant au second, on peut être amené à penser qu'il doit être en liaison avec la force mécanique, seizième grandeur qui intervient dans la théorie de Maxwell-Lorentz. Effectivement nous l'avons vérifié, mais seulement dans des cas particuliers assez étroits.

Bien entendu, on déduirait, si les $G_{1,2,3}$ et H étaient connus, ainsi que les G′ et H′, les fonctions ψ qui satisferaient à des équations de Dirac. Dans le cas de l'électron les fonctions et équations de Dirac nous paraîtraient régler les mouvements d'un corpuscule non éther plongé dans les mouvements hydrodynamique de l'éther.

V. — *Le Potentiel vecteur et la formule de composition de vitesses.* Nous avons considéré le potentiel vecteur G_1, G_2, G_3 comme une vitesse. Or, les formules de transformation du potentiel vecteur d'un système dans un autre ne coïncident pas avec les formules de composition des vitesses de la relativité.

Par contre, les formules de transformation des quantités $\frac{c^2 G_1}{H}$, $\frac{c^2 G_2}{H}$, $\frac{c^2 G_3}{H}$, qui, avec notre système d'unités, sont de la dimension d'une vitesse, coïncident avec les formules de composition des vitesses.

Si ces quantités ont les valeurs qu'on vient d'écrire dans un certain système d'axes galiléens, et les valeurs $\frac{c^2 G_1'}{H'}$, etc., dans un second système animé par rapport au premier de la vitesse uniforme v suivant les axes Ox et $O'x'$ supposés en coïncidence, on a, α étant le facteur de contraction de Lorentz:

$$\frac{c^2 G_1'}{H'} = c^2 \frac{\frac{1}{\alpha}\left(G_1 - \frac{v}{c}\frac{H}{c}\right)}{\frac{1}{\alpha}(H - vG_1)} = \frac{c^2 G_1 - vH}{H - vG_1} = \frac{\frac{c^2 G_1}{H} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{c^2 G_1}{H}},$$

$$\frac{c^2 G_2'}{H'} = \frac{c^2 G_2}{\frac{1}{\alpha}(H - vG_1)} = \frac{\alpha \frac{c^2 G^2}{H}}{1 - \frac{vc^2 G_1}{c^2 H}} \cdots$$

Ce sont bien les formules de composition des vitesses. On verrait de même que H se transforme comme la densité électrique. Signalons aussi que, dans une nouvelle théorie de la lumière, M. L. de Broglie écrit l'un des groupes de Maxwell de la façon suivante, pour l'espace vide:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(XYZ)}{\partial t} = \text{rot}\,(LMN) - k \cdot \bar{g}$$

$$\text{div}\,(XYZ) = KH\ , \quad (K\ \text{const})\ .$$

Il y a deux termes supplémentaires contenant les potentiels vecteur et scalaire g et H et ces termes jouent le même rôle que ceux qui, dans les équations pour le courant de convection, contiennent la vitesse et la densité de charge.

On peut encore dire que le potentiel vecteur satisfait à la formule de composition des vitesses, pourvu qu'en changeant de système d'axes on change en même temps d'unités. L'unité de mesure du potentiel vecteur serait, en chaque point du premier système, proportionnelle à la valeur en ce point de $\frac{H}{c^2}$;

en chaque point du second, elle serait proportionnelle à la valeur en ce point de $\frac{H'}{c^2}$. Lors du passage d'un système à un autre, elle varierait dans la proportion de H à H'.

Je laisse à penser quel rapport cela peut avoir avec les idées de Weyl.

Le potentiel vecteur apparaît ainsi comme étant la vitesse de groupe des ondes ψ. On montre en mécanique ondulatoire que les vitesses de groupe satisfont aux équations de la mécanique. Et c'est peut être là qu'il faudrait voir, à défaut de la théorie de l'éther, la raison profonde pour laquelle ce potentiel vecteur satisfait aux équations de l'hydrodynamique.

Conclusion. — Cette interprétation n'est certainement pas complètement satisfaisante, notamment en ce qui concerne l'usage que nous avons fait de l'équation complémentaire, bien que nos hypothèses au sujet de celle-ci sont sans influence sur une partie du chapitre.

Nous voilà donc de nouveau rejetés vers l'hypothèse de l'éther, comme nous l'avions été par les expériences relatées dans la première partie et qui concernaient un tout autre ordre d'idées.

Chapitre VI.

Essai d'une théorie hydrodynamique de l'éther. Electro-magnétisme, lumière, gravitation.

I. — *Etablissement des équations de Maxwell comme équations les plus générales des mouvements de l'éther.*

Nous ne nous préoccuperons nullement de définir des propriétés de l'éther. Nous supposerons simplement qu'il se compose de parties pouvant être suivies dans le temps, et qu'on peut lui attribuer une densité et une pression.

Soient G_1, G_2, G_3 les composantes suivant trois axes de coordonnées rectangulaires $O\,x\,y\,z$ de la vitesse d'un élément de ce milieu, ou si l'on veut, de la quantité de mouvement d'une masse prise pour unité, ρ la densité du milieu et p la pression que l'élément considéré supporte de la part des autres éléments, et T la demi-force vive.

Nous allons montrer qu'à partir de l'hypothèse de l'éther on retrouve les équations nouvelles qu'au chapitre IV nous avons déduites des résultats classiques de l'électro magnétisme, et les équations donnant les vecteurs électrique et magnétique en fonction des potentiels vecteur et scalaire.

Appelons L M N le double des composantes de la ro tation instantanée:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ M &= \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ N &= \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Admettons l'existence d'une relation $f(p, \rho) = 0$ entre la densité et la pression; supposons qu'il existe un potentiel U de la force appliquée. Posons alors:

$$\left.\begin{aligned} H &= \int \frac{dp}{\rho} + T + U + \varphi \\ X &= MG_3 - NG_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y &= NG_1 - LG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z &= LG_2 - MG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les équations de l'hydrodynamique pour ce milieu peuvent être écrites alors sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \\ Y &= -\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial t} \\ Z &= -\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial t} \,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La fonction φ sera à déterminer. Ceci n'est valable que quand il existe un potentiel U des forces appliquées. Sinon, il faut poser:

$$X = MG_3 - NG_2 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

$$Y = NG_1 - LG_3 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

$$Z = LG_2 - MG_1 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} .$$

Les six relations (1) et (3) sont de la même forme que celles qui existent en électro magnétisme entre les forces magnétiques L, M, N, le produit par c des forces électriques X, Y, Z, le potentiel vecteur G_1, G_2, G_3 et le produit par c du potentiel scalaire H.

Dans son ouvrage « Hydrodynamique physique », Bjerkness dit que les analogies hydrodynamiques de l'électromagnétisme ne permettent pas l'identification des grandeurs parce qu'il manque une relation vectorielle entre elles. C'est bien ce que nous constatons et nous voyons quelle est la relation qui manquait à Bjerkness.

Ainsi, en établissant les équations les plus générales possibles des mouvements de l'éther nous trouvons des équations qui sont précisément de la forme des équations générales de l'électromagnétisme. Cela nous suggère de conclure à une interprétation hydrodynamique de l'électromagnétisme, et d'identifier les dix quantités qui figurent dans ces équations avec les dix qui figurent dans celles de l'électromagnétisme.

Les forces électriques ou magnétiques n'ont évidemment pas, dans nos résultats, les mêmes dimensions que dans les systèmes électrostatique ou électromagnétique, non plus que dans la théorie de Larmor. La force magnétique est de la nature d'une vitesse angulaire ou d'un tourbillon; le produit par c de la force électrique est de la nature d'une accélération. C'est l'accélération complémentaire de Coriolis produite par un mouvement d'entraînement dont la rotation est $\frac{L}{2}$, $\frac{M}{2}$, $\frac{N}{2}$ et un mouvement relatif G_1, G_2, G_3; le potentiel vecteur est une vitesse. Le produit par c du potentiel scalaire, le carré d'une vitesse.

Eliminons par dérivation et soustraction la fonction H dans le groupe (3). Nous trouvons des équations qui ne peuvent être autres que celles d'un groupe d'équations de Maxwell:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \text{etc.}$$

Les premiers membres des équations du second groupe s'obtiendront par dérivation à partir des équations (1).

C'est ainsi qu'on a, en opérant sur les deux premières équations de ce groupe:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 G_3}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial^2 z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\right).$$

Moyennant l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 G_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial y^2} + \frac{\lambda^2 G_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} = 0$$

et l'équation complémentaire, qui, avec nos notations, s'écrit:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 ,$$

le second membre prend la forme:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \, \partial t}\right)$$

ce qui, d'après les équations (3) est $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}$, c'est-à-dire, avec nos notations, le troisième terme de l'équation du second groupe de Maxwell.

Comme nous l'avons montré au chapitre IV, paragraphe III, les équations (2) ci-dessus conduisent directement aussi au premier groupe de Maxwell.

Enfin, l'équation complémentaire, que nous proposons de compléter comme suit:

$$\Sigma \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\Sigma G_1 \frac{\partial H}{\partial x} = 0 ,$$

les termes supplémentaires devant être nuls pour les ondes transversales, joue le rôle d'équation de continuité. D'après cette équation la divergence de la vitesse de l'éther ne serait pas forcément nulle, et par conséquent l'éther serait compressible.

C'est sur les équations (2) que repose, pour une part, la possibilité de la théorie que nous exposons. Les précédents chapitres les justifient déjà, d'une manière assez sérieuse. Nous allons néanmoins montrer de nouveau qu'elles sont en accord avec quelques résultats essentiels de l'électromagnétisme.

II. — *Accord avec l'expérience. Formule de la force de Lorentz.* Supposons qu'en une région de l'éther existe d'abord une force électrique h_1, de composantes $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $-\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, puis qu'on arrive à provoquer en cette région un mouvement de l'éther avec la vitesse g de composantes G_1, G_2, G_3, par rapport aux conducteurs qui créent le champ. Ce mouvement, dans nos idées, donnera naissance au champ magnétique l (L, M, N). La force mécanique f (eX, eY, eZ), agissant sur la charge e restant au repos dans la région, sera, d'après les relations (2), et en notation vectorielle:

$$f = e\,(\vec{h} + \vec{g}\,\vec{l}) \qquad (h = h_1)$$

ou, si l'on emploie les unités ordinairement choisies en électromagnétisme:

$$f = e\left(\vec{h} + \frac{\vec{g}\,\vec{l}}{c}\right).$$

Elle se confond donc en ce cas particulier avec l'expression, sous la forme donnée par Lorentz, de la force mécanique.

Serait-il sage de ne voir là qu'une simple coïncidence ?

Il est d'ailleurs possible de déduire des formules (2) les formules de la force électrodynamique telles que les a écrites Lorentz. Dans une portion d'éther, la force étant d'abord:

$$f = e\left(\vec{h} + \frac{\vec{g}\,\vec{l}}{c}\right),$$

d'après les formules (2), si l'on vient à mettre un corps électrisé, portant la charge e, en mouvement par rapport aux conducteurs qui créent le champ avec la vitesse v, ce corps entraîne l'éther avec la vitesse v, s'il est d'indice très grand.

Dans cet éther entraîné ont toujours lieu, au moins en première approximation les mouvements g.

La force devient:

$$f_v = e\left[\left(\vec{h} + \frac{\vec{g} + \vec{v}}{c}\right)\right] = f + e\frac{\vec{v}}{c}\vec{l}$$

C'est la formule de la force donnée par Lorentz. La formule donnant f en est bien, comme nous l'avons dit, un cas particulier où $\vec{h}$ et $\vec{g}$ ne sont pas connus séparément.

Notons aussi que les mêmes relations (2) résolues par rapport à la force magnétique rendraient compte d'une force mécanique agissant sur un pôle magnétique.

III. — *Champs électriques et Champs magnétiques.* — Poursuivons notre confrontation de la théorie hydrodynamique de l'éther représentée par les équations (1), (2), (3) avec les résultats expérimentaux.

Il nous faut d'abord rendre compte de la possibilité de l'existence d'un champ électro-statique ou d'un champ magnétique pur.

D'après les formules (2), il est possible d'avoir un champ électrostatique pur. En effet, pour $L = M = N = 0$, on a:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

La fonction φ représente alors le potentiel électrostatique.

Elle a, nous le verrons, pour expression $c^2 \log \rho$, si ρ désigne la densité de l'éther au point considéré.

Dans un champ magnétique pur, les équations (2) s'écrivent:

$$MG_3 - NG_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$NG_1 - LG_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$LG_2 - MG_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

On peut, en général, en tirer des valeurs de G_1, G_2, G_3 qui, transportées dans les formules (1), donneront trois équations aux dérivées partielles entre L, M, N et φ. Ces trois équations ne sont pas indépendantes car, d'après les équations (1) existe la relation:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

entre les quantités L, M, N.

Si la fonction φ est donnée, on en déduira une infinité de systèmes possibles de valeurs de L, M, N qui satisferont au problème, montrant ainsi qu'il est possible, d'une infinité de manières, d'avoir un champ magnétique en l'absence de tout champ électrostatique. *Inversement, un champ magnétique* quelconque étant donné, il faudra qu'on puisse trouver une valeur de φ qui permette d'annuler X, Y, Z pour qu'il n'y ait aucun champ électrostatique.

Prenons un exemple. Supposons le champ donné par $L = M = 0$, $N \neq 0$.

On tire des équations (2):

$$N = -\frac{1}{G_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{G_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

d'où G_1 et G_2 en fonction de N. La troisième équation (1) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Cette équation aux dérivées partielles donne une fonction φ dépendant de fonctions arbitraires, qui permet d'avoir le champ magnétique N sans champ électrostatique. Comme on a $\frac{\partial N}{\partial z} = 0$, la fonction peut ne pas dépendre de z; et c'est bien ce qu'il faut, puisque d'après la troisième équation (2) on doit avoir $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$.

Dans tout champ magnétique où la force magnétique ne varie pas rapidement de direction au passage d'un point à un autre point voisin, on pourra décomposer l'espace en régions assez petites pour que, dans chacune d'elles, le calcul précédent soit applicable et substituer ainsi au champ réel un champ fictif permettant le calcul ci-dessus. Ainsi pourra-t-on déterminer en chaque point de l'espace la fonction φ et, par suite, les fonctions G_1, G_2, par les équations donnant N et tirées de (2); quant à la fonction G_3, elle sera donnée par l'une ou l'autre des deux premières équations (1) qui ne sont pas distinctes l'une de l'autre, en raison de la troisième et de la condition $\frac{\partial N}{\partial z} = 0$.

Notons qu'un calcul semblablement dirigé pourrait servir à trouver les fonctions φ, G_1, G_2, G_3 dans le cas où X, Y, Z ne seraient pas nulles.

Une autre condition à laquelle il nous faut satisfaire est la suivante: on sait qu'on établit en hydrodynamique un théorème (théorème d'Helmholtz-Lagrange), d'après lequel quand, dans un fluide, les tourbillons sont nuls en un point à un instant, ils sont nuls, à tout instant ultérieur, sous quelques conditions, et notamment sous la condition que la fonction H ne subisse aucune discontinuité.

Cela impose que, dans le passage d'un système de l'état électrostatique à l'état électrodynamique, la fonction H subisse une discontinuité.

Et cela aussi est d'accord avec l'expérience. En effet, soit un système de corps électrisés au repos dans une région de l'éther, par exemple au repos dans un laboratoire. Il existe une force électrique en chaque point de cette région. Si les corps viennent à être mis en mouvement avec une vitesse v dans cette région, la force électrique change de valeur. C'est ainsi que nous interpréterons plus loin les relations que la relativité établit entre les forces électriques de deux systèmes de coordonnées en mouvement l'un par rapport à l'autre, et qui sont dans le mouvement uniforme par exemple:

$$X = X'$$

$$Y = \frac{1}{\alpha} Y'$$

$$Z = \frac{1}{\alpha} Z'$$

avec $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Les conclusions de la théorie hydrodynamique sont donc conformes à celles de l'expérience: sans variation de la force électrique d'un système primitivement électrostatique, il n'y a pas apparition de magnétisme.

Mais, dira-t-on, si les corps sont mis en mouvement avec une vitesse assez faible et assez lentement croissante, pour que φ et par suite Y, Z et H puissent être considérées comme ne subissant pas de discontinuités, on ne devra, d'après la théorie hydrodynamique, constater aucune production de magnétisme. En effet, mais cela est encore bien d'accord avec l'expérience.

Pour que les tourbillons ou le magnétisme apparaissent, il faut que la fonction H varie assez rapidement pour pouvoir être considérée comme subissant une discontinuité.

Il faut aussi que nous attirions l'attention sur un point. En posant $\mathrm{H} = \int \frac{dp}{\rho} + \mathrm{T} + \mathrm{U} + \varphi$, nous admettons que la force totale dérive d'un potentiel, c'est-à-dire en somme que l'éther est un fluide parfait. En réalité, cette hypothèse ne serait pas indispensable. Et quand elle n'est pas vérifiée, on doit avoir au lieu de $\frac{\partial \varphi}{\partial x, y, z}$, des composantes $h_{1,2,3}$. Or, elle intervient dans l'établissement du théorème de Lagrange-Helmholtz. C'est une raison de plus de ne pas voir de difficultés dans les conséquences de ce théorème relativement au passage du champ électrostatique au champ électrodynamique. Récapitulons donc que les phénomènes généraux et les lois principales de l'électrodynamique et de l'électrostatique s'obtiennent par la théorie hydrodynamique de l'électricité que nous avons tentée. Il faut en conclure notamment que, du moment que les lois principales de l'électrodynamique et de l'électromagnétisme ont pu être obtenues par nous au moyen de la dynamique rationnelle des fluides, avec évidemment toutes leurs conséquences, quant à la propagation des ondes notamment, il ne paraît pas possible de soutenir l'affirmation, souvent rencontrée dans les traités sur la relativité, qu'il y a opposition entre la mécanique rationnelle et l'électromagnétisme.

IV. — *Courant de déplacement.* — A l'état de l'éther qui constituerait l'électricité (voir paragraphe XII) serait applicable aussi la notion de mouvement. Les idées exposées ici sont donc qualitativement d'accord avec le phénomène que Maxwell nomme courant de déplacement. Pour qu'elles soient acceptables, il faut aussi que nous puissions rendre compte quantitativement de la théorie que Maxwell en donne. Un volume ε d'éther étant constitué par une densité électrique σ, si la vitesse est g, son énergie cinétique est $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma g^2$.

Considérons à nouveau les équations (2). Posons $X_1 = X + \frac{d\varphi}{\partial x}$, etc... On vérifie facilement que l'on a:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \frac{X_1^2 + Y_2^2 + Z_3^2}{L^2 + M^2 + N^2}$$

ou, en désignant par g le potentiel vecteur, par E_1 le vecteur $X_1 Y_1 Z_1$, et par l la force magnétique: $E_1^2 = g^2 l^2$.

Désignons par σ la densité électrique correspondant à XYZ c'est-à-dire la divergence de $X\ Y\ Z$ et par σ_1 celle qui correspond aux mêmes lettres avec indice. Formons la divergence de $X_1 Y_1 Z_1$. On trouve, si l désigne la force magnétique:

$$l^2 - \Sigma \frac{1}{c^2} G_1 \frac{\partial X}{\partial t} = -4\pi\sigma_1 = -4\pi\sigma - \Delta\varphi$$

en tenant compte de la définition de la force magnétique d'après le potentiel vecteur, et du second groupe des équations de Maxwell. Dans tous les cas où la quantité figurant sous le signe Σ est nulle, il reste, si l'on tient compte aussi de la relation trouvée entre la force électrique E_1, la force magnétique l et la vitesse g:

$$\varepsilon E_1^2 = -4\pi\varepsilon\sigma_1 g^2 .$$

L'énergie $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma_1 g^2$ représente donc bien au signe près la valeur $\frac{1}{8\pi}\varepsilon E_1^2$ de l'énergie électrostatique du champ, sur quoi peut être fondée la théorie du courant de déplacement. On établirait dès lors que la somme des énergies élémentaires en question représenterait le travail de courants d'intensité $i = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, Φ désignant le flux de force électrique du champ.

Grâce au signe de cette intensité, le courant de déplacement irait en sens contraire de la force électrique du champ (du conducteur du potentiel le moins élevé à celui qui serait au potentiel le plus élevé s'il s'agit d'un courant de conduction ouvert entre deux conducteurs). Il fermerait bien ainsi le courant ouvert.

Il aurait évidemment mieux valu pouvoir obtenir la relation ci-dessus entre les lettres sans indices. Telle quelle, elle paraît intéressante.

V. — *Conclusions à tirer des coïncidences précédemment exposées.* — C'est sur l'analogie entre les équations de l'hydrodynamique et celles de l'électro-magnétisme que repose essentiellement la théorie hydrodynamique ci-dessus, de même par exemple que c'est sur l'analogie entre l'équation de l'optique géométrique et l'équation de Jacobi que repose la mécanique ondulatoire.

Il est certain qu'il faut être prudent vis-à-vis des analogies de forme. Cependant, l'analogie entre l'hydrodynamique et l'électrodynamique a lieu dans les six équations donnant X, Y, Z, L, M, N en fonction des potentiels vecteur et scalaire; elle a lieu, en outre, dans l'équation complémentaire, analogue à l'équation de continuité; elle a lieu entre l'expression de Lorentz de la force mécanique et nos équations (2).

Quand de telles analogies se maintiennent de la sorte, je pense qu'il faut y voir, *à moins d'autre explication positive* et en dépit *des causes purement géométriques d'analogie*, non pas une *coïncidence formelle*, mais l'indice *d'une cause physique profonde et cachée*. Le cas est le même que celui de l'analogie entre l'équation de Jacobi et l'équation de l'optique géométrique, analogie qui conduit à la mécanique de Schrödinger [1].

[1] Cette thèse est encore renforcée par le fait que l'identité de l'équation de Jacobi et de l'équation des ondes, sur quoi est fondée la mécanique ondulatoire, peut apparaître comme un cas limite de l'identité qui existerait d'après nous entre les équations hydrodynamiques et électromagnétiques.

Certes, il peut y avoir bien des manières, comme on sait, d'obtenir des explications mécaniques, mathématiquement valables, d'une théorie physique. Mais, ce qu'il y a de frappant ici, c'est que toutes les

VI. — *Figuration des phénomènes magnétiques.* — Dans un milieu où existent des forces magnétiques, l'éther serait donc animé de vitesses angulaires et, par suite, de vitesses linéaires. La connaissance de la nature des forces du magnétisme doit nous permettre d'en prévoir ou d'en expliquer les effets.

Au voisinage d'un aimant existent des courants d'éther dont les vitesses ont pour composantes G_1, G_2, G_3. Ces courants se continuent à l'intérieur de l'aimant; et si l'on vient à briser l'aimant, comme on ne brise point pour cela le courant, on s'explique que chacun des morceaux obtenus soit à son tour un aimant. Ceci nous conduit à considérer un aimant comme un corps qui présente, dans un sens déterminé, une grande perméabilité au passage de l'éther et qui est, dans ce sens, parcouru par des courants d'éther.

On s'explique que, si un corps présente au passage de l'éther une perméabilité plus grande que celle du milieu ambiant, le flux magnétique se concentre sur lui, on s'explique que des petits barreaux de fer placés dans le champ d'un aimant, ou d'un courant, ou qu'une boussole, s'orientent sous l'action de ce champ; ils tendent à se placer dans le sens du déplacement de l'éther qui les traverse; on s'explique l'aimantation induite.

L'éther qui entoure la terre et qui, au voisinage de la surface, est près de participer intégralement au mouvement de translation de la terre, mais pas beaucoup à sa rotation sur elle-même (expérience de Michelson et Galle de 1926), est soumis du fait de cette rotation, à un vent relatif et à des forces qui y font naître une tendance à prendre un mouvement tangentiellement au parallèle terrestre. Il ne le prend peut-être que partiellement par suite des obstacles susceptibles de l'entraîner plus ou moins dans le mouvement. Mais il n'en est pas moins placé dans un certain état de tension qui peut suffire pour diriger dans une direction sud-nord sensiblement, un barreau aimanté qui présenterait dans un sens transversal de plus grandes facilités au passage d'un courant d'éther. Ce serait là l'explication du magnétisme terrestre. La direction du courant d'éther autour

équations se présentent d'elle-mêmes sous la forme la plus favorable à leur identification, ainsi qu'à la généralisation des identités admises par la mécanique ondulatoire.

de la Terre aurait dû faire dès l'abord corriger la théorie de Larmor qui admettait que la direction de la force magnétique était la même que celle de ce courant. Celui-ci devant être dirigé suivant un parallèle, c'est bien plutôt au potentiel vecteur qu'il fallait penser à l'assimiler.

D'autre part, dans la translation de la Terre, la courbe de contact de la Terre avec un cylindre de génératrices parallèles à la vitesse de translation se déplace chaque jour sur la surface entière de la terre, pouvant entraîner des variations du champ magnétique s'il est dû au mouvement de la Terre dans l'éther.

Rappelons qu'au chapitre I, paragraphe XVIII, nous avons montré un rapprochement numérique entre la rotation de la Terre et son moment magnétique d'une part, et la gravitation d'autre part.

Ce gravomagnétisme, qui peut exister indépendamment d'un ferromagnétisme de surface, s'exprime quantitativement par la formule suivante: $g \cdot \frac{\mathfrak{M} c}{M} = \sqrt{K}$, M étant le moment magnétique de l'astre, M son moment de rotation propre, g un facteur numérique que nous avons suggéré de comparer avec le facteur de Landé. La question du gravomagnétisme a, sous des formes diverses, préoccupé beaucoup de savants; et M. Blackett donne à ce sujet, dans le numéro 159 de *Nature*, 17 mai 1947, de nombreuses références. Mais la formule ci-dessus elle-même, avec le sens que nous lui donnons, nous paraît bien avoir été donnée pour la première fois par nous-mêmes dans notre I^re^ partie [1]. M. Blackett la redonne avec le même sens, un peu moins de précision sur le facteur g, mais davantage de vérification expérimentales. Remarquons que, dans nos idées, de même qu'on peut avoir du magnétisme sans électricité préalable, par mouvements de l'éther dont la vitesse serait le potentiel vecteur, on pourra avoir aussi de l'électricité dynamique sans magnétisme préalable, chose qui ne nous paraît pas encore avoir été prévue et qui n'a pas été jusqu'ici vérifiée, ni même recherchée. Remarquons aussi qu'avec l'idée concernant l'interprétation du potentiel vecteur, ce n'est pas seulement la rotation propre qui produirait du magnétisme. Du fait du

[1] *Archives*, vol. 28, fascicule 4, juillet 1946.

mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil, et du fait de son mouvement que nous appellerions absolu dans l'éther, chaque point de la surface de la Terre se trouve passer [1] deux fois par jour dans certaines régions où existerait un mouvement relatif de l'éther et de l'astre autre que celui de la rotation propre. D'où peut-être les variations diurnes, annuelles, séculaires du magnétisme terrestre en grandeur et en direction. Si l'on parvenait à éliminer les causes dues à la rotation propre et à la révolution annuelle, le résidu de magnétisme, s'il existait, pourrait, théoriquement, servir à la recherche du mouvement dans l'éther; tout cela serait à comparer avec les conclusions de notre I^re^ partie.

Revenons un instant au système de l'atome; nous pouvons remarquer que le rapport de la charge électrique élémentaire, soit $4{,}765.10^{-10}$ *u . e . s* à une masse qui serait 1847.10^{-9} *c. g. s.* aurait pour valeur:

$$\rho = \frac{4{,}765.10^{-10}}{1847.10^{-9}} = 2{,}58.10^{-4} = \sqrt{k}\ .$$

Or, le nombre 1847 est le rapport de la masse du proton ou du neutron à celle de l'électron; 1847.10^{-9} *c . g . s* est donc une masse formée avec l'unité 10^{-9} comme celle du proton l'est avec celle de l'électron. Ceci dit, considérons le moment magnétique du neutron, μ_g, ou plutôt sa valeur absolue $|\mu_g|$, égale à $1{,}935\,\frac{eh}{4\pi Mc}$, M étant ici la masse du neutron. Prenons pour h la valeur $6{,}50.10^{-27}$ *c . g . s*. On constate que $\frac{h}{4\pi}$ est justement égal à $\frac{1}{1{,}935}\,10^{-27}$ *c . g . s*.

On peut donc écrire, en désignant par 1 l'unité de moment de quantité de mouvement:

$$\left|\frac{\mu_g \cdot c}{1}\right| = \frac{e}{1847} \cdot \frac{10^{-27}}{0{,}9.10^{-27}} = \frac{10^{-9}\,\sigma}{0{,}9} = \frac{1}{3^2} \cdot 10^{-10}\sqrt{k}\ .$$

[1] *Archives*, vol. 28, fascicule 5, août 1946.

Le moment magnétique du proton diffère de celui du neutron, étant:

$$\mu_p = 2{,}795 \frac{eh}{4\,\pi\,\mathrm{M}c}.$$

Il diffère de $|\mu_g|$ par un terme égal à $0{,}860 \frac{eh}{4\,\pi\,\mathrm{M}c}$ que nous allons appeler μ_e. Or, 0,860 est exactement égal à $\left(\frac{2}{3}\right)^2 . 1{,}935$, de sorte que:

On peut considérer que le moment magnétique total du proton provient de la superposition de deux moments, l'un μ_g d'origine gravomagnétique, l'autre μ_e d'origine électro-magnétique.

Et ces deux moments, tous les deux liés à $\sqrt{k}$, ont des coefficients numériques assez curieux pour être signalés [1].

[1] Donnons ici quelques compléments sur les rapports numériques des distances a elles-mêmes des planètes du Soleil, à la distance de Mercure. Ces rapports sont les suivants:

$$1\ ;\ \left(\frac{15}{11}\right)^2;\ \left(\frac{8}{5}\right)^2;\ 2^2\ ;\ \left(\frac{8}{3}\right)^2;\ \left(\frac{11}{3}\right)^2; 5^2\ ;\ 7^2\ ;\ 9^2\ ;\ 10^2\ ,$$

le cinquième rang étant relatif au groupe principal des petites planètes. M. Coliac a d'ailleurs étendu la loi aux autres groupes de ces petites planètes. Aux § VI et XII du chap. I de notre Ire partie (*Archives*, vol. 28, fascicules 4 et 5, juillet et août 1946), nous ne faisions que des allusions à ces résultats.

Comme les a et les $\frac{m}{a}$ sont ainsi, pour les planètes, avec beaucoup de précision pour les $\frac{m}{a}$ et un peu moins pour les a, dans des rapports de carrés entiers, il en résulte qu'il en est ainsi pour les masses m aussi, ce qu'on vérifie directement. C'est une chose dont les théories cosmogoniques ne tiennent pas compte et dont elles doivent tenir compte.

Pensons maintenant au système de l'atome, conformément à nos idées de base. La masse du proton vaut 1847 fois celle de l'électron, soit à très peu près 43^2; celle du méson valant environ 205 fois celle de l'électron, d'après les mesures les plus récentes, on voit que celle du proton vaut 3^2 celle du méson. Isolés, ces résultats n'auraient guère de sens; insérés dans notre ensemble, peut-être en prennent-ils un. Enfin, pour les planètes, les énergies de l'unité de masse étant dans les rapports des a, et les moments des quantités de mouvement de l'unité de masse dans les rapports des $\sqrt{a}$, on voit que ces énergies et ces moments dépendent des rapports de carrés donnés ci-dessus

En tout état de cause, entre μ_g et $|\mu_p|$ existe la relation curieuse et très bien vérifiée:

$$\mu_p = \frac{2^2 + 3^2}{3^2} \, |\mu_g| \; .$$

Le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique, où le plan de polarisation de la lumière tourne d'un angle proportionnel à l'intensité du champ et à la distance parcourue par le rayon lumineux dans le sens des lignes de force du champ, permet de préciser que, dans certains corps, les filets composant les courants d'éther sont en forme d'hélices. La rotation de la direction des vibrations apparaît alors comme due à la composition de la vitesse de l'éther suivant ces filets avec la vitesse imprimée à chaque point par la vibration même. On sait enfin que des expérimentateurs, Macaluzo et Corbino, et récemment (1934) un expérimentateur anglais dont je m'excuse de n'avoir pu retrouver le nom ni la référence, ont découvert qu'un rayon de lumière polarisée placé dans un champ magnétique subit des modifications au point de vue de la vitesse de propagation, même dans le vide, d'après les expériences de 1934. Cela se conçoit, en effet; l'éther dans lequel se propage ce rayon étant en déplacement et la vitesse de propagation par rapport à l'éther étant supposée rester la même, la vitesse résultante par rapport à l'observateur peut varier, en plus ou en moins, selon le sens de la propagation. Ces expériences sont, à ce point de vue, à rapprocher de celle de Fizeau sur l'entraînement de l'éther. Il serait très intéressant de vérifier de nouveau ces résultats de l'expérience, en particulier dans le cas du vide; car s'ils se confirment, ils fourniront une autre base expérimentale sérieuse pour rejeter la proposition de la constance de la vitesse de la lumière et son caractère de vitesse limite qui selon la relativité, sont vrais dans un champ électromagnétique, du moins dans un champ faible et quel que soit, dans ce champ, le potentiel

de la même façon que les grandeurs correspondantes dans l'atome dépendent de rapports de carrés entiers. Ajoutons que la masse du neutrino serait $\frac{1}{4^2}$ de celle de l'électron.

vecteur. Il faudrait vérifier aussi que l'effet est maximum dans la direction du potentiel vecteur; l'expérience de Michelson et Galle rend la chose vraisemblable. Chemin faisant nous avons trouvé une raison de croire à la compressibilité de l'éther. Et dès lors la question pourra se poser de revoir s'il ne lui serait pas possible de propager des vibrations non seulement transversales, mais aussi longitudinales. Enfin, le mouvement d'un corps, même non électrisé, devrait créer un champ magnétique de potentiel vecteur parallèle à la vitesse; la chose serait seulement plus sensible si le corps en mouvement est électrisé.

VII. — *Vibrations lumineuses.* — La théorie des vibrations uniquement transversales rend un compte exact des phénomènes des interférences et de la diffraction; mais une théorie où la lumière serait constituée par des vibrations longitudinales et la lumière polarisée par des vibrations transversales en rendrait aussi bien compte, et par les mêmes moyens.

C'est l'expérience de la non-interférence des rayons polarisées dans des plans rectangulaires qui conduit à admettre que les vibrations de la lumière polarisée sont transversales et, d'ailleurs, perpendiculaires ou parallèles au plan de polarisation. Mais, ceci n'entraîne pas forcément que la lumière naturelle soit aussi faite de vibrations transversales.

Il est à remarquer d'ailleurs qu'un mouvement vibratoire longitudinal d'une tranche d'éther doit être accompagné d'un mouvement transversal, la condensation dans la direction de la propagation devant vraisemblablement entraîner une certaine dilatation perpendiculairement et inversement.

Nous disons ailleurs qu'une vibration longitudinale du grain d'éther serait accompagnée d'une oscillation transversale des grandeurs électromagnétiques qui lui sont liées.

Les vibrations longitudinales de la lumière naturelle permettent de donner un commencement d'explication du phénomène de la polarisation par réflexion et de la loi de Brewster, d'après laquelle le maximum de la polarisation est obtenu quand le rayon incident fait avec la normale au miroir un angle d'incidence i tel que $tg\, i = n$, n étant l'indice de la substance du miroir.

Cette relation entraîne, en effet, la perpendicularité du rayon réfléchi et du rayon réfracté dans la substance du miroir. L'éther de la vibration longitudinale pénètre suivant ce dernier rayon dans la substance et ne pouvant s'y déplacer en longueur, s'y étale dans le sens perpendiculaire au plan du rayon incident et du rayon réfracté, donnant ainsi une vibration transversale perpendiculaire au plan de polarisation qui est ici le plan d'incidence, et qui serait celle que transmet le rayon réfléchi.

On pourrait d'une façon analogue montrer que la réfraction polarise les vibrations longitudinales dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence et qu'une loi, semblable à celle de Brewster, s'y applique. Il serait intéressant aussi de vérifier que le phénomène de Macalozo et Corbino ne se produit qu'avec de la lumière polarisée, car ce serait un indice de différence plus profonde que ne le disait Fresnel qui existerait entre la lumière naturelle et la lumière polarisée dont, d'un autre côté, il n'est pas établi expérimentalement qu'elles se propagent avec la même vitesse exactement. Il serait très intéressant de l'établir. A cet effet des dispositifs expérimentaux simples, d'ordre interférentiel, peuvent être imaginés.

Je ne sache pas que, jusqu'ici d'ailleurs il ait été fourni d'explications satisfaisantes de l'extinction par un miroir, sous une incidence convenable, d'un rayon polarisé rectilignement. Un tel rayon, polarisé par réflexion sur un miroir M dans le plan d'incidence RMM′, étant reçu par un second miroir M′, le rayon réfléchi une seconde fois a son intensité minimum quand les deux plans d'incidence RMM′ et MM′ R′ sont rectangulaires, et il s'éteint quand l'incidence sur le second miroir est de 55°.

Le rayon réfléchi par le premier miroir MM′ est alors perpendiculaire à la trace M′ A′ du premier plan d'incidence sur le second miroir. En effet, le plan RMM′ étant perpendiculaire à MM′ R′ contient la perpendiculaire à ce plan en M′ laquelle est aussi perpendiculaire à la normale M′ N′ au miroir. Elle est donc contenue dans le miroir. Et elle est aussi perpendiculaire à MM′. Les vibrations transversales qui sont contenues dans le plan d'incidence sur le second miroir rencontrent donc parallèlement la droite en question du second miroir. Si un fil conducteur est disposé suivant cette droite, elles pourront donner dans ce fil des émissions électriques, comme les vibrations longitudinales ont pu en donner elles aussi sur le miroir M pendant leur polarisation. L'énergie lumineuse ne doit donc pas apparaître comme détruite pendant la polarisation, ni pendant l'extinction du rayon polarisé. Elle doit apparaître comme transformée en énergie électrique ou calorifique.

Et si l'on arrivait par quelque redresseur à éliminer l'une des demi-vibrations se propageant dans le conducteur, peut-être pourrait-on effectivement recueillir l'énergie mise en jeu dans les phénomènes de polarisation et d'extinction.

VIII. — *Figuration des phénomènes électrostatiques.* — S'il est susceptible de compressions et de dilatations et s'il peut transmettre des vibrations longitudinales lumineuses, l'éther, peut être considéré comme susceptible de transmettre des vibrations longitudinales dont la partie compression, par exemple, développe une force plus intense que la partie dilatation, ou inversement.

Imaginons un corps dont la surface est en vibration normalement à elle-même et qui soit tel que la résistance à la partie extérieure, par exemple, de la vibration soit moindre que la résistance à la partie intérieure. Les vibrations de cette surface créeront dans l'éther environnant un train de vibrations longitudinales dans lesquelles la demi-vibration comprimant l'éther jusqu'ici immobile y développera une force plus grande que celle que restituera l'éther dans la dilatation qui suivra. Appelons ces vibrations du nom de positives et le corps émetteur du nom de corps vibrant positivement; on imaginerait de même ce que peuvent être des corps vibrant négativement et des vibrations négatives.

L'équation donnant le déplacement ψ d'un élément serait:

$$\psi = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \left\{ \cos 2\pi\Phi \right\}$$

le coefficient a_1 s'appliquerait à l'une des demi-vibrations; le coefficient a_2 à l'autre; du moment que les forces développées à chaque demi-vibration positive ou négative de la vibration longitudinale complète sont inégales, il est vraisemblable que les amplitudes a_1 et a_2 ne seront pas égales en chaque point. Il est possible d'établir qu'en première approximation, la force macroscopique résultante est proportionnelle à la différence $a_1 - a_2$. J'appellerai cette différence la « caractéristique première de force du champ ». Voici comment on peut se rendre compte de la propriété en question. Si les dimensions du corpuscule sont petites relativement à la longueur d'onde, la force agissant sur lui peut être considérée comme une fonction sinusoïdale du temps ainsi que l'onde elle-même. Dans une période $\frac{1}{\nu}$, la valeur moyenne de la force est donc proportionnelle à:

$$2\nu \int_0^{\frac{1}{2\nu}} a_1 \sin 2\pi\nu t \, dt + 2\nu \int_{\frac{1}{2\nu}}^{\frac{1}{\nu}} a_2 \sin 2\pi\nu t \, dt \ ,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{2}{\pi}(a_1 - a_2) \ .$$

Elle est d'autre part proportionnelle à la fréquence. En définitive elle est donc proportionnelle à $\nu(a_1 - a_2)$. Du moins il en serait ainsi si les amplitudes a_1 et a_2 étaient afférentes chacune à une demi-période exactement. Or, il n'en est certainement pas ainsi. Il faut évidemment tenir compte des vitesses différentes avec lesquelles sont décrites les amplitudes a_1 et a_2, et la valeur ci-dessus de la caractéristique de force du champ doit sans doute être tenue pour proportionnelle à:

$$\nu\left(\frac{a_1}{\tau_1} - \frac{a_2}{\tau_2}\right)$$

τ_1 et τ_2 étant les deux parties de la période. Cette valeur s'écrit aussi:

$$4\nu^3(a_1\tau_2 - a_2\tau_1) = \nu^2(b_1 - b_2) \ ,$$

b_1 et b_2 désignant deux nouvelles grandeurs voisines de a_1 et a_2.

Si le mobile n'est pas de dimensions très petites, la valeur moyenne de cette expression dans le volume du mobile doit être proportionnelle au potentiel macroscopique du champ.

On appelle longueur d'onde la longueur dont il faut se déplacer à temps constant dans la direction de propagation de l'onde (l'axe de x, par exemple) pour faire varier la phase Φ de l'unité.

Soit λ_1, la longueur dont il faut se déplacer à temps constant pour faire varier Φ de $+ 1$; soit λ_2 la longueur correspondante à une variation de Φ de $- 1$. En général Φ étant fonction non linéaire de x, les deux nombres λ_1, λ_2, ne seront pas égaux.

Chacune des deux fonctions a_1 et a_2 qui ne sont pas simultanées, mais s'appliquent respectivement à chacune des demi-vibrations, vérifie l'équation de propagation de l'onde. La fonction a qu'elles composent à elles deux la vérifie donc. En somme a est une fonction de x, y, z ou de x, y, z, t qui est discontinue pour les valeurs du temps correspondant au passage de la grandeur oscillante par sa position d'équilibre, c'est-à-dire pour les valeurs $\left(\frac{2k+1}{4}\right)$ de la phase, k étant un nombre entier.

Supposons que dans le champ d'un corps à vibrations positives, par exemple se trouve un autre corps perméable à ces vibrations. Comme tout se passe comme si chaque point du champ était sollicité successivement, à chaque demi-période, par deux forces de sens différent et inégales, on comprend que la face du second corps tournée vers le premier va être animée de vibrations dont la demi-vibration dirigée vers l'intérieur du corps sera la plus intense, c'est-à-dire de vibrations négatives, tandis que l'autre face sera animée de vibrations positives représentant une énergie égale à celles des vibrations négatives [1]. Il y aura une ligne neutre qui, si le premier corps est un point, sera la courbe de contact du cône circonscrit de ce point au second corps.

On reconnaît là la figure de l'influence électrique et l'on peut voir dans les vibrations inégales une figure de l'électricité statique, qui n'est d'ailleurs point contraire à l'existence des électrons.

[1] Il est possible que le mouvement du corps influencent dans l'éther fasse subir à l'onde, si elle existe, une modification. Aussi se pourrait-il que, faisant passer des électrons dans un cylindre de Faraday très long et sans fond, on constatat que les charges induites dépendent des vitesses.

On peut également voir dans ces vibrations la cause des tensions et des compressions de Maxwell. Il en résulte évidemment une sorte de pression de radiation.

J'appellerai ces ondes du nom d'ondes de force électrostatique. Ce sont peut-être les mêmes que celles que nous avons rencontrées au chapitre III.

IX. — *Figuration des ondes électromagnétiques.* — Ces ondes sont toujours polarisées. Elles transmettent une force électrique et une force magnétique perpendiculaire entre elles et à la direction de propagation. A un instant donné, sur la surface d'une telle onde ont donc lieu d'autres ondes du type électrique positif ou négatif, ou des mouvements du type magnétique; ces ondes secondaires se propagent, de même que les mouvements ont lieu, normalement à la direction de l'onde électromagnétique.

X. — *Figuration des phénomènes de la gravitation.* Les corps matériels, tels que les astres, tendant à perdre continuellement de leur énergie interne, de leur chaleur en particulier, tendent à se contracter. Par suite de leur élasticité, il est à croire que cette contraction s'effectue par vibration du type négatif que transmet ensuite l'éther par vibrations longitudinales négatives. On peut voir là une figuration de la gravitation. On s'explique l'attraction, la loi de l'inverse du carré des distances. On conçoit la possibilité de la non-application intégrale de la force suivant le mouvement du corps qui y est soumis, fait important qui servira dans les chapitres suivants. Le frottement de l'éther contre les corps célestes devrait ralentir leur mouvement; mais ce frottement, transformé en énergie calorifique ou autre, augmenterait l'énergie interne, l'intensité des vibrations et l'attraction, de telle sorte qu'à chaque instant il y aurait compensation presque exacte entre le ralentissement dû au frottement et l'accélération due à l'augmentation de l'attraction. Par suite de la tension ou de la compression de l'éther réalisée par le genre de vibrations électriques ou gravifiques que nous sommes ainsi conduits à envisager, l'éther apparaît dans son aspect macroscopique comme recélant des pressions ou des tensions, ou si l'on veut encore, comme présentant entre ces divers éléments des forces de cohésion.

J'appellerai ces ondes du nom d'ondes de forces gravifiques.

La considération des ondulations longitudinales, concuremment avec celles des ondulations transversales, permet ainsi l'explication, en principe, *des chocs*, au sens étendu du mot, et, plus généralement *des interactions*. On sait d'ailleurs que la mécanique quantique est arrivée elle aussi à la considération de telles ondes longitudinales et transversales, aussi bien pour les corpuscules chargés que pour les corpuscules neutres. La seule différence, là encore, sera que, dans notre idée, l'onde sera liée au champ et non pas au corpuscule, comme nous l'avons exposé plusieurs fois, notamment dans notre 1re partie. Au lieu de dire que, par exemple, dans l'interaction électro-statique coulombienne, deux particules électrisées n'agiraient pas directement l'une sur l'autre, mais que chacune d'elles interagirait avec le champ électromagnétique ambiant, par émission et absorption de photons, nous dirions que ces particules interagiraient avec le milieu ambiant, composé aussi de corpuscules. La différence serait assez près de n'être plus qu'une question de mots, non négligeable d'ailleurs. D'une autre manière, nous pouvons dire qu'en quelque sorte, en repeuplant l'espace d'un nombre immense de corpuscules de toute sorte (peut-être réductibles à un plus petit nombre de types), électrons, protons, photons, mésons, gravitons, etc... on a créé un substratum nouveau, différent de l'éther géométrique d'Einstein, mais assez peu différent du nôtre, à qui nous ne demandons que d'être composé de parties pouvant être suivies dans le temps.

Le photon, dont on a pu calculer, de façon approchée, la masse, extrêmement petite par rapport à celle de l'électron, serait en quelque sorte le grain ultime d'éther. On objecte à cela que la vitesse des astres ou des électrons atomiques serait freinée par ces grains d'éther. Mais le frottement se traduirait par un gain d'énergie de l'astre, et pas forcément par une augmentation de la masse pesante, de sorte qu'il pourrait y avoir une compensation au freinage. D'une autre façon, compte tenu des formules du potentiel et de la force que nous établirons au chapitre VII, on peut voir que chocs ou frottements, agissant sur la vitesse de l'astre ou de l'électron, agissent par le fait même sur la force, et par suite peuvent avoir sur la vitesse un effet compensateur. Seules seraient stables les trajectoires pour lesquelles cette compensation aurait lieu. Et cela serait de nature à faire entrevoir comment il peut y avoir des trajectoires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas, contrairement aux lois de l'électrodynamique. Car enfin les théories mêmes les plus modernes admettent ce fait mais ne l'expliquent pas; et il faudrait l'expliquer. Seul M. Varcollier y a tâché, à notre connaissance. Resterait à montrer que les trajectoires stables par suite de compensation sont les mêmes que celles que donne la théorie de la résonance en mécanique ondulatoire.

La force à laquelle donne lieu les ondes gravifiques serait elle aussi proportionnelle à $\nu^2(b_1 - b_2)$. Or, la fréquence ν, d'après ce que nous avons dit au paragraphe XI de notre chapitre I aurait pour valeur $\frac{k}{2\pi}\sqrt{\frac{KM}{r^3}}$, k étant un nombre entier, K la constante de la gravitation, r la distance au centre de la masse M qui crée le champ. La force serait donc proportionnelle à

$$\frac{M}{r^3}(b_1 - b_2) \ .$$

Quant à $b_1 - b_2$, ce serait, si le mobile envisagé est supposé soumis à la même force que s'il était sans vitesse dans le champ, une fonction de r. Supposons-la développable suivant les puissances de r en la bornant à la cinquième:

$$b_1 - b_2 = \alpha + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \beta_4 r^4 + \beta_5 r^5 \ .$$

Pour r extrêmement petit, nous trouvons une formule de la force en $\frac{1}{r^3}$, comme cela semble exister dans la région centrale de l'atome. Pour r plus grand, le terme en $\beta_4 r^4$ commence à l'emporter; la force prend alors la forme de celle de la théorie newtonienne; pour r encore plus grand, nous avons une force en $\frac{1}{r}$, puis une constante sensiblement dans un domaine pas trop étendu; r croissant encore, le terme en $\beta^4 r_4$ donne la prépondérance à une formule de force de la forme A . Mr. Il y correspond, par l'équation:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \mathrm{A}.\mathrm{M}r$$

une vitesse qui, avec la condition théorique de s'annuler pour $r = 0$, est proportionnelle à r; on reconnaît là une propriété de la zone d'expansion de l'univers de Lemaître, avec une possibilité d'interprétation de la constante dite cosmique.

Mais, au delà, tout pourrait encore changer de nouveau.

XI. — *Masse de l'électricité.* — La force électrique étant de la nature d'une accélération, et son produit par une quantité d'électricité étant de la nature d'une force, la quantité d'électricité apparaît comme de la nature d'une masse mécanique. L'électricité et la matière seraient alors des condensations de l'éther à des degrés divers ou sous des forces diverses, la première étant intermédiaire entre la matière et l'éther, et pouvant exister sans support matériel. La masse d'un corps matériel varierait, mais très peu, selon la quantité d'électricité qu'il supporterait.

XIII. — *Attractions et répulsions en électrostatique et magnétisme. Potentiel électrique.* — Les considérations qui précèdent permettent d'élucider le fait, bien connu ,mais très peu clair, d'après lequel une même charge électrostatique attire ou repousse une charge de signe contraire à elle ou de même signe qu'elle. Il existe des explications de la loi du carré des distances, mais, à ma connaissance, il n'existe pas d'explication de ce fait du renversement du signe de la force suivant le signe de la charge. On comprendrait qu'une même charge attirât ou repoussât toujours; on ne distingue pas pourquoi tantôt elle attire et tantôt elle repousse. Mais, puisque l'électrodynamique nous apparaît comme une hydrodynamique de l'éther, l'idée vient que l'électrostatique pourrait apparaître comme une hydrostatique de cet éther.

Soit un corps électrisé positivement par exemple. Il émet des ondes de force électrostatique, à demi-vibrations inégales, d'où résulte dans l'éther une tension macroscopique et, en définitive, la force électrique du champ qui, par exemple, agit dans le sens de la répulsion. Soit d la densité de l'ensemble de l'éther où règne le champ. Soit d' la densité d'une portion de cet éther. Soit f la force avec laquelle le champ repousse l'unité de masse de l'éther. La masse d' d'éther sera repoussée avec la force fd'; mais d'après le principe d'Archimède, une force fd agira en sens inverse. La force résultante sera $f(d' - d)$; elle sera attirante si d' est inférieur à d; l'éther de densité d' sera dit alors être de l'électricité négative; la force sera repoussante si d' est supérieur à d, et l'éther de densité d' sera dit être de l'électricité positive. L'électricité statique peut donc être considérée comme un agrégat d'éther, de densité supérieure ou inférieure à celle de l'éther ambiant. Si le centre électrostatique était électrisé négativement, la force f serait attirante; une portion d'éther de densité $d' < d$, c'est-à-dire de l'électricité négative sera repoussée; une portion de densité $d' > d$, c'est-à-dire de l'électricité positive, sera attirée. C'est bien ce qu'il faut pour que la figuration ainsi donnée puisse être soutenue.

La quantité d'électricité apparaît ainsi comme proportionnelle, à la différence $d' - d$ entre la densité de l'éther du milieu électrisé et celle de l'éther ambiant. Plus exactement, ce serait le potentiel électrique qui serait proportionnel à cette différence. Toutefois cela ne serait exact que pour les différences $d' - d$ relativement petites par rapport à chacun des termes de la différence. Reprenons le calcul fait au paragraphe I pour l'obtention du second groupe des équations de Maxwell. Avec le système d'unités choisi, l'une des équations de ce groupe serait:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}$$

c étant la vitesse de la lumière.

Pour que l'équation trouvée au paragraphe I puisse se mettre sous cette forme, il faut que soit vérifiée la condition suivante, dite équation complémentaire qui, dans nos idées, est la transcription de l'équation de la continuité de l'hydrodynamique:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}$$

La quantité $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ s'introduit aussi dans le second groupe des équations de Maxwell. On a, d'après les équations (3):

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Delta H - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\right) = -\Delta H + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} .$$

En tout point où la fonction H permet d'annuler le second membre, on a:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 .$$

Quand la fonction H donne, au contraire, au second membre la valeur P, on reconnaît que P désigne la densité de charge électrique de la théorie classique.

Le potentiel vecteur représentant une vitesse, si ω est le volume d'un élément d'éther, on sait que la divergence de ce vecteur représente la vitesse de variation du volume divisée par ce volume; elle a donc la valeur $\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}$.

Supposons de plus que la composante G_3 du potentiel vecteur ne dépende pas du temps, de sorte que $Z = -\frac{\partial H}{\partial z}$. L'équation complémentaire donne alors (dans certains cas):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t} ,$$

d'où:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \log e\,\omega}{\partial z\,\partial t} .$$

Par suite:

$$Z = \frac{c^2}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial z}$$

à une constante près.

La force électrique sera proportionnelle à la compression. La fonction potentielle sera $- c^2 \log e\,\omega$.

La masse ne variant pas, le volume de l'élément est inversement proportionnel à sa densité d'. La fonction potentielle peut donc être prise égale à $c^2 \log_e d'$, en désignant par d' une densité supérieure ou inférieure à la densité d de l'éther homogène ou, si l'on veut, à $c^2 \log \frac{d'}{d}$. Si d' est voisin de d, cette expression est peu différente de $c^2 \frac{d' - d}{d}$. Le potentiel est donc bien alors sensiblement proportionnel à la différence $d - d'$.

Par contre si, par exemple, d' est nul, le potentiel est infiniment grand et négatif. C'est bien ce qu'il faut. Il est assez curieux de remarquer que nous arrivons ainsi à la conception de ce que peut être le vide d'éther. Dans une partie de l'espace où ce vide serait assez poussé, par suite de la présence d'un potentiel très grand et négatif, la lumière si elle est bien une ondulation de cet éther, ne devrait pas se propager, ou ne devrait se propager que difficilement. Il serait donc intéressant de faire passer un rayon lumineux dans une telle portion d'éther pour en observer les effets sur ce rayon. Une telle portion d'éther serait aussi un écran électrique ou gravifique.

XIII. — *Interprétation de la théorie de Weyl.* — Dans la géométrie de Weyl on est amené à considérer l'intégrale :

$$\int G_1\, dx + G_2\, dy + G_3\, dz = H\, dt$$

où les G et H sont les composantes d'un quadrivecteur qu'on cherche à identifier avec les potentiels scalaire et vecteur de l'électromagnétisme.

Cette intégrale est le logarithme de la variation de ce qu'on appelle la longueur généralisée d'une règle quand on déplace cette règle d'un point A à un point B. On recherche les conditions pour que la longueur généralisée soit intégrable. Il faut et il suffit que, quand on passe du point A au point B, l'intégrale ne dépende pas du chemin suivi, c'est-à-dire que l'élément différentiel soit une différentielle exacte. Ceci conduit aux conditions :

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 \,, \qquad \text{etc.}, \ \ldots$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \,, \qquad \text{etc.}, \ \ldots$$

Ce sont les équations du champ électromagnétique quand les forces électrique et magnétique sont nulles. La longueur est intégrable quand, dans l'intégration, on ne rencontre pas de champ électromagnétique. Si on en traverse, les équations ci-dessus se complètent par des seconds membres (forces électrique et magnétique) et la longueur n'est pas intégrable.

Dans nos idées, l'intégrale peut s'écrire, appliquée à l'élément d'éther de vitesse $G_1 = \frac{dx}{dt}$, etc...:

$$\int (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - H)\, dt \, .$$

Remplaçons H par sa valeur $T + U + \varphi$ avec les notations du paragraphe I, en comprenant dans U la valeur $\int \frac{dp}{\rho}$. Supposons vérifiées les conditions ci-dessus de Weyl et cherchons à les interpréter. D'après nos équations (2) φ est alors le même en tout point de l'espace; on peut donc dans les conditions trouvées, ainsi que dans les intégrales ci-dessus, remplacer H par $H - \varphi = T + U$. Or: $G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = 2\,T$.

L'intégrale s'écrit finalement: $\int (T - U)\, dt$. Les conditions trouvées équivalent alors à l'application du principe de la moindre action et à grad. $\varphi = 0$; le second groupe de trois conditions notamment n'exprime pas autre chose que les équations fondamentales de la dynamique.

On verrait que, dans le cas général, la géométrie de Weyl est encore équivalente à l'application du principe newtonien de la moindre action, avec grad. $\varphi \neq 0$. Cela n'est pas pour nous surprendre; nous avons reconnu que les équations électromagnétiques n'étaient autre chose que des équations hydrodynamiques; nous ne doutions par conséquent pas de pouvoir les déduire des principes généraux de la dynamique.

XIV. — *Autre manière de présenter la théorie précédente.* On peut essayer de voir à quelles conditions on réussirait à exposer les résultats précédents sans employer le mot d'éther.

Tant qu'on emploierait les relations (2) sous forme de relations entre le potentiel vecteur et les forces électrique et magnétique, il ne serait pas impossible d'y arriver. En fait, comme les équations électromagnétiques coïncideraient avec les équations hydrodynamiques, on peut penser qu'on ne ferait ainsi que sous-entendre le mot d'éther.

Mais dans certains des résultats obtenus, il a été nécessaire de remplacer explicitement G_1 par $\frac{dx}{dt}$. Si l'on admet ces résultats, il serait nécessaire, pour continuer à se passer du mot d'éther, d'introduire un déplacement électromagnétique dx, dy, dz, distinct évidemment du déplacement électrique de Maxwell.

Il y a enfin à observer de nouveau en cette fin de chapitre que, puisque nous admettons un éther hydrodynamique, nous ne pourrons pas conserver dans son essence la doctrine relativiste et que, par suite, nous devrons pouvoir rendre compte autrement des faits expliqués par elle.

Or, cette doctrine a connu de tels succès quantitatifs, et si nombreux, qu'il faut, à priori, penser qu'on n'expliquera tous ces faits qu'en conservant, dans un autre langage, l'appareil mathématique de la relativité. C'est ce que nous nous efforcerons de faire [1].

[1] Remarques complémentaires au sujet de la note [2], § VI du présent chapitre, p. 107. — La loi suivant laquelle les distances moyennes des planètes au Soleil sont avec celle de Mercure dans des rapports simples de carrés parfaits a été mise pour la première fois par M. H. Coliac sous la forme de loi récurrente dans laquelle les distances sont représentées par des carrés de nombres entiers *successifs* de 3^2 à 11^2, c'est-à-dire de Mercure à Jupiter inclus, les petites planètes étant représentées, groupées en quatre anneaux, par 7^2; 8^2; 9^2; 10^2. Cette forme de loi est très intéressante. Elle a été obtenue par M. Coliac suivant une méthode bien meilleure que l'artifice que nous avons employé pour cela, à savoir la simple multiplication par 3^2 des rapports de carrés. Au delà de Jupiter, les nombres entiers élevés du carré ne sont plus successifs. Si on les considère vraiment comme des niveaux, il y aurait des niveaux inoccupés, ce qui n'est pas étonnant. La loi présente deux écarts sensibles pour Vénus et la Terre et un écart important pour Neptune. Mais si, toujours par analogie avec l'atome, on admet l'existence de « demi-quanta », avec nombres quantiques demi-entiers, on fait disparaître l'écart en prenant le n de Neptune égal à $26 + \frac{1}{2}$, le nombre exact pour Neptune étant $(26,49)^2$. Les deux autres écarts, plus petits pourraient disparaître pour raisons de « structure fine ». La loi étant alors bien acceptable sous cette forme, on pourrait, à l'aide de ces valeurs de n, calculer l'ordre de grandeur de la valeur de notre h_0 du § XII de notre chap. I, I^re partie (*Archives*, fascicule 4, 1946).

En ce qui concerne les satellites, on trouve, pour les quatre pla-