

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 29 (1947)

Artikel: Le champ propre et l'interaction des particules de Dirac : suivant l'électrodynamique quantique [suite et fin]
Autor: Pirenne, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742261>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE CHAMP PROPRE ET L'INTERACTION DES PARTICULES DE DIRAC

suivant l'électrodynamique quantique

PAR

Jean PIRENNE

(suite et fin)¹



III. LE SYSTÈME ÉLECTRON-POSITRON

§ 1. — FONCTIONS D'ONDES ET NIVEAUX SUIVANT LA THÉORIE DE PAULI.

Nous avons montré plus haut (II, § 2 et 3) que les interactions individuelles d'un électron et d'un positron avec le champ quantifié donnaient lieu à des interactions mutuelles magnétiques et d'échange dont l'ordre de grandeur est v^2/c^2 fois plus petit que celui de l'interaction de Coulomb. Nous nous proposons pour l'instant de ne tenir compte que de cette dernière; nous n'introduirons les autres que par la suite (III, § 2) en les considérant comme de petites perturbations. Nous laisserons également de côté les transitions optiques et l'annihilation réelle dont l'influence est encore plus faible ainsi que nous le verrons plus loin (III, § 3).

¹ Première partie v. *Archives*, [5], 28, 233 (1946); [5], 29, 121 et 207 (1947).

Dans l'approximation actuelle l'équation d'onde du système électron-positron peut donc s'écrire

$$\left\{ - (c\alpha_1 p_1 + \beta_1 mc^2) - (c\alpha_2 p_2 + \beta_2 mc^2) - \frac{e^2}{r_{12}} \right\} \psi = \omega \psi . \quad (1)$$

La fonction d'onde ψ possède 16 composantes ψ_{ij} ; mais, puisque nous ne considérons ici que le cas de vitesses v faibles vis-à-vis de c , les ψ_{ij} dont chacun des indices i et j est égal à 1 ou 2 sont de loin les plus considérables et ne dépendent pratiquement pas de v/c ; nous les appellerons composantes non relativistes. Les autres ω_{ij} au contraire sont d'un ordre de grandeur v/c ou v^2/c^2 fois plus petit suivant qu'un seul des indices est supérieur à 2 ou qu'ils le sont tous les deux. Il est d'ailleurs aisé d'éliminer ces composantes relativistes des équations (1) si pour chaque ω_{ij} on se limite au premier terme de son développement suivant les puissances croissantes de v/c . Cette méthode est analogue à celle qui permet, dans le cas d'une seule particule, de passer de l'équation de Dirac à celle de Pauli lorsque $v/c \ll 1$. Ici, on trouve de cette façon que chacune des quatre composantes non relativistes, dont l'ensemble forme la fonction d'onde de Pauli du système, obéit à l'équation de Schrödinger

$$\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi = E \psi . \quad (2)$$

Pour résoudre celle-ci, nous utiliserons comme variables les coordonnées du centre de gravité et les coordonnées relatives représentées par les vecteurs attachés à l'origine:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (3a)$$

En introduisant les moments canoniquement conjugués à ces variables

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{\omega} &= \frac{1}{2} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \end{aligned} \quad (3b)$$

l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\left(\frac{\vec{P}^2}{2M_0} + \frac{\vec{\omega}^2}{2\mu_0} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi = E \psi \quad (2')$$

où $M_0 = 2m$ est la masse totale du système tandis que $\mu_0 = \frac{1}{2}m$ est la masse réduite correspondant au mouvement relatif.

Par conséquent chaque composante de ψ peut être écrite sous la forme du produit de l'onde de de Broglie du centre de gravité doué de la masse totale M_0 du système et d'une fonction d'onde hydrogénoides

$$\chi_{El}(\varphi) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

correspondant à la masse réduite μ_0 . L'énergie ne dépend pas des nombres quantiques l et m . Comme les composantes ψ_{ij} satisfont indépendamment à l'équation de Schrödinger on peut choisir arbitrairement chacune d'elles parmi toutes les fonctions hydrogénoides de même énergie. Cette dégénérescence élevée provient en grande partie de ce que nous avons négligé les interactions magnétiques et d'échange. Pour pouvoir introduire celles-ci comme une perturbation nous devons, pour chaque valeur de l'énergie, choisir un système de fonctions propres adaptées à la perturbation, c'est-à-dire qui puissent être considérées comme limites de fonctions propres perturbées lorsque la perturbation tend vers zéro. On peut construire un tel système en utilisant la propriété dont il jouit de rendre diagonale la matrice de l'interaction, ce qui nous ramène à un problème d'axes principaux. Mais il est plus commode d'avoir recours à la théorie des groupes de rotation. Afin de simplifier le raisonnement, nous supposerons dorénavant que le centre de gravité est au repos, ce qui ne constitue aucune restriction puisque le mouvement d'ensemble du système est totalement indépendant du mouvement relatif qui seul nous intéresse actuellement.

Lors d'une rotation autour du centre de gravité les différentes fonctions d'onde de même énergie se transforment entre elles linéairement; elles forment donc un tenseur qui fournit une

certaine représentation du groupe des rotations. Ce tenseur est complètement réductible étant donné que toute représentation du groupe des rotations réelles est complètement réductible¹. Rappelons qu'un tenseur est réductible s'il est possible de former un tenseur d'ordre moins élevé dont les composantes soient des combinaisons linéaires à coefficients constants des composantes du tenseur primitif. Dans le cas contraire le tenseur est dit irréductible. Enfin le tenseur est dit complètement réductible si, moyennant une substitution linéaire convenable de ses composantes, celles-ci peuvent être partagées en plusieurs suites formant chacune un tenseur irréductible. Dans le cas du tenseur formé par les fonctions d'onde de même énergie (non perturbée), l'intérêt principal de cette réduction résulte du fait qu'elle fournit directement un système de fonctions d'onde adaptée à toute perturbation $V(\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_1, \vec{\rho})$ invariante vis-à-vis des rotations autour du centre de gravité. Ce serait du moins le cas si la décomposition était univoque; dans notre problème elle ne le sera pas car nous pourrons extraire du tenseur primitif plusieurs tenseurs irréductibles du même ordre linéairement indépendants; toutes les combinaisons linéaires de ceux-ci seront encore des tenseurs irréductibles; il faudra alors choisir convenablement ces combinaisons. Ce choix fait, chaque tenseur irréductible formé par r fonctions d'ondes correspond à un niveau perturbé présentant une dégénérescence d'ordre r ; tous ces niveaux sont en général distincts.

Abordons maintenant la réduction du tenseur des fonctions d'onde de même énergie. Nous pouvons tout d'abord le décomposer en une suite de tenseurs d'ordre $4(2l + 1)$, avec $l = 0, 1, 2, \dots$, obtenus chacun en réunissant toutes les fonctions d'onde linéairement indépendantes que l'on peut construire en ne faisant intervenir que les $2l + 1$ fonctions de Laplace de même l qui se transforment linéairement entre elles (de façon irréductible). Si l'on convient d'écrire toute fonction d'onde ψ sous la forme d'une matrice

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}$$

¹ Cf. E. CARTAN. Leçons sur la théorie des spineurs. *Act. Sc. et Ind.* Hermann 643. Paris, 1938. § 29 et 79.

et que l'on laisse de côté le facteur radial $\chi_{El}(\rho)$ qui ne dépend pas de m , chacun de ces nouveaux tenseurs peut être constitué par les quatre suites

$$\begin{pmatrix} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{pmatrix}$$

avec

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l,$$

ou par toute suite se déduisant des précédentes par une substitution linéaire non dégénérée.

Il nous reste à réduire ces derniers tenseurs. A cette fin, analysons tout d'abord la transformation d'une fonction d'onde quelconque lors d'une rotation autour du centre de gravité G. Supposons que celle-ci ait pour effet d'amener \overrightarrow{GP} à la position $\overrightarrow{GP'}$; la nouvelle fonction d'onde $\psi'(P')$ se déduit de l'ancienne $\psi(P)$ par le produit de deux opérations. La première, \mathcal{R}_1 , consiste à passer de $\psi(P)$ à $\psi(P')$ par une translation à laquelle on peut substituer une rotation convenable autour de G à condition de considérer les composantes de ψ comme des quantités scalaires. La deuxième, \mathcal{R}_2 , fait passer de $\psi(P')$ à $\psi'(P')$ par une rotation autour de P' à la suite de laquelle les ψ_{ij} se transforment linéairement comme les composantes $\xi_i \xi'_j$ du tenseur formé par le produit de deux spineurs (ξ_1, ξ_2) et (ξ'_1, ξ'_2) . Si maintenant nous revenons au tenseur formé par les fonctions d'onde de même l nous voyons que ces dernières se transforment linéairement entre elles lors de chacune des deux opérations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . La première transformation résulte de celle du tenseur irréductible formé par les $2l+1$ fonctions de Laplace de même l ; la deuxième correspond à celle du produit de deux tenseurs d'ordre $\frac{1}{2}$ (spineurs).

En utilisant les notations d'E. Cartan, nous sommes donc ramenés à la réduction de la représentation complètement réductible $\mathcal{O}_l^+ \times \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}^+ \times \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}^+$ du groupe des rotations, problème dont

la solution est immédiate. En effet, d'après un théorème connu¹, $\mathcal{O}_{\frac{1}{2}}^+ \times \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}^+$ se décompose en les représentations \mathcal{O}_1^+ et \mathcal{O}_0^- ; la première, de degré 3, correspond aux états triplets où les spins sont parallèles et la deuxième aux états singulets où les spins sont antiparallèles. Cette première décomposition correspond donc au couplage des spins entre eux. D'autre part, la décomposition du produit de \mathcal{O}_l^+ par \mathcal{O}_1^+ ou \mathcal{O}_0^- se rapporte au couplage du spin total avec le mouvement orbital des états triplets et singulets. $\mathcal{O}_l^+ \times \mathcal{O}_1^+$ donne lieu aux trois représentations \mathcal{O}_{l+1}^+ , \mathcal{O}_l^- , \mathcal{O}_{l-1}^+ et $\mathcal{O}_l^+ \times \mathcal{O}_0^-$ à la seule représentation \mathcal{O}_l^- , ce qui correspond à trois niveaux dans le premier cas et à un seul dans le second; ces niveaux présentent des dégénérescences d'ordre $2j + 1$ avec $j = l + 1, l, l - 1$ pour le triplet et $j = l$ pour le singulet.

Pour développer le calcul il est commode d'introduire au lieu des fonctions sphériques de Laplace $P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ les fonctions $Y_l^m(\theta, \varphi)$ définies de la façon suivante:

Pour $m > 0$,

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta, \varphi) &= \frac{2^l l!}{(2l)!} (l-m)! P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ &= \left[\cos^{l-m} \theta - \frac{(l-m)(l-m-1)}{2(2l-1)} \cos^{l-m-2} \theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2l-1)(2l-3)} \cos^{l-m-4} \theta - \dots \right] \sin^m \theta e^{im\varphi}. \end{aligned}$$

Pour $m < 0$,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi). \quad (5)$$

Les fonctions $Y_l^m(\theta, \varphi)$ se transforment comme les produits $\xi_1^{l-m} \xi_2^{l+m}$ des composantes (ξ_1, ξ_2) d'un spinor.

Revenons à la réduction de la représentation $\mathcal{O}_{\frac{1}{2}}^+ \times \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}^+$. On sait que le tenseur $\xi_i \xi_j$ se décompose en deux tenseurs irréductibles

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_1 \xi_1' & \sim u^1 = -x + iy \\ \xi_1 \xi_2' + \xi_2 \xi_1' & \sim u^2 = z \\ \xi_2 \xi_2' & \sim u^3 = x + iy \end{array} \right.$$

¹ E. CARTAN. *Loc. cit.*, § 68.

et

$$\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1 \sim \text{pseudo-scalaire}$$

correspondant aux représentations \mathcal{D}_1^+ et \mathcal{D}_0^- . Le signe \sim signifie que les premiers membres se transforment comme les seconds; x, y, z représentent les composantes rectangulaires d'un vecteur; u^1, u^2, u^3 peuvent être considérées comme les composantes contravariantes de ce même vecteur si l'on prend comme vecteurs de base

$$\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, 0 \right); \quad \vec{e}_2 = (0, 0, 1);$$

$$\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, 0 \right)$$

Il résulte de là que la fonction d'onde ψ est de la forme

$$\psi = U^1 a_1 + U^2 a_2 + U^3 a_3$$

pour les états triplets et de la forme

$$\psi = Vb$$

pour les états singulets, a_1, a_2, a_3 et b représentant les matrices

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6a)$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6b)$$

et U^1, U^2, U^3 et V étant des combinaisons linéaires des $Y_l^m(\theta, \varphi)$.

Vis-à-vis de l'opération \mathcal{R}_2

$$U^1, U^2, U^3 \sim u^1, u^2, u^3$$

tandis que V reste invariant.

D'autre part, on peut considérer la matrice $u^1 a_1 + u^2 a_2 + u^3 a_3$ comme une représentation du vecteur

$$u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2 + u^3 \vec{e}_3$$

dans laquelle a_1, a_2, a_3 jouent le rôle de vecteurs de base. On sait que si l'on fait tourner le vecteur on peut conserver

les vecteurs de base et transformer les composantes de façon contravariante ou conserver les composantes et prendre de nouveaux vecteurs de bases déduits des anciens par une transformation covariante. Il est d'ailleurs possible de remplacer les transformations covariantes par des transformations contravariantes et réciproquement; il suffit pour cela de mettre le vecteur sous la forme

$$u_1 \vec{e^1} + u_2 \vec{e^2} + u_3 \vec{e^3}$$

avec

$$u_i = \sum_k g_{ik} u^k \quad \text{et} \quad \vec{e^i} = \sum_k g^{ik} \vec{e_k},$$

g_{jk} représentant le tenseur métrique fondamental que l'on obtient immédiatement en remarquant que le carré de la longueur du vecteur a pour expression

$$\sum g_{ik} u^i u^k = (u^2)^2 - u^1 u^3 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous pouvons donc écrire ψ sous la forme $\psi = \sum a^i U_i$ avec

$$a^i = \sum_k g^{ik} a_k,$$

c'est-à-dire

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Vis-à-vis de \mathcal{R}_2 on peut considérer a^1, a^2, a^3 comme des quantités contravariantes et les U_i comme des constantes tandis que, suivant \mathcal{R}_1 , les U_i subissent une transformation résultant de celle des Y_l^m . On voit ainsi que le tenseur des fonctions d'onde de même l est équivalent au produit des tenseurs irréductibles

$$a^1, a^2, a^3 \sim \xi_1'^2, \xi_1' \xi_2', \xi_2'^2 \quad (\mathcal{D}_1^+)$$

et

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \sim \xi_1^{l-m} \xi_2^{l+m}, \quad (\mathcal{D}_l^+)$$

(ξ_1, ξ_2) et (ξ_1', ξ_2') représentant deux spineurs.

Or le tenseur $\xi_1'^{1-s} \xi_2'^{1+s} \xi_1^{l-m} \xi_2^{l+m}$ se décompose en trois tenseurs irréductibles d'ordres $j = l+1, l, l-1$ dont les

$(j+m)$ -ièmes composantes sont respectivement les coefficients de $c_{2j}^{j+m} a^{j-m} b^{j+m}$ dans le développement des polynomes ¹:

$$\begin{aligned}\Phi_{l+1} &= (a \xi_1 + b \xi_2)^{2l} (a \xi'_1 + b \xi'_2)^2 \\ \Phi_l &= (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1) (a \xi_1 + b \xi_2)^{2l-1} (a \xi'_1 + b \xi'_2) \\ \Phi_{l-1} &= (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1)^2 (a \xi_1 + b \xi_2)^{2l-2}\end{aligned}$$

Par conséquent, en remplaçant dans ces tenseurs les produits $\xi_1^{l-m} \xi_2^{l+m}$ et $\xi_1'^2, \xi_1' \xi_2', \xi_2'^2$ respectivement par les fonctions $Y_l^m(\theta, \varphi)$ et les matrices a^1, a^2, a^3 dont les expressions ont été données plus haut (7), on obtient les trois tenseurs irréductibles formés par les fonctions d'onde des trois états du triplet ou plus exactement par les facteurs angulaires ${}^3u_{jlm}(\theta, \varphi)$ de ces fonctions d'onde. Par leur construction ces tenseurs se transforment comme ceux des $Y_l^m(\theta, \varphi)$. D'autre part, si l'on veut que les facteurs angulaires ${}^1u_{jjm}(\theta, \varphi)$ des fonctions d'onde du singulet satisfassent à la même condition, il faut que ceux-ci soient égaux à $b Y_l^m(\theta, \varphi)$, la matrice b étant donnée par la formule (6b). Les expressions complètes des facteurs ${}^1u_{jjm}(\theta, \varphi)$ et ${}^3u_{jlm}(\theta, \varphi)$ se trouvent rassemblées dans le tableau suivant.

Singulets.

$${}^1u_{llm} = \begin{pmatrix} 0 & + Y_l^m(\theta, \varphi) \\ - Y_l^m(\theta, \varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

Triplets.

$$\begin{aligned}{}^3u_{l+1, l, m} &= \begin{pmatrix} (l+m) & (l+m-1) Y_l^{m-1}(\theta, \varphi) & -(l+m+1) (l-m+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \\ -(l+m+1) (l-m+1) Y_l^m(\theta, \varphi) & (l-m) & (l-m+1) Y_l^{m+1}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ {}^3u_{l, l, m} &= \begin{pmatrix} (l+m) Y_l^{m-1}(\theta, \varphi) & m Y_l^m(\theta, \varphi) \\ m Y_l^m(\theta, \varphi) & -(l-m) Y_l^{m+1}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ {}^3u_{l-1, l, m} &= \begin{pmatrix} Y_l^{m-1}(\theta, \varphi) & Y_l^m(\theta, \varphi) \\ Y_l^m(\theta, \varphi) & Y_l^{m+1}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

¹ Cf. E. CARTAN. *Loc. cit.* § 68.

En représentant par

$$U_{jlm}(\theta, \varphi) = N_{jlm} u_{jlm}(\theta, \varphi) \quad (8)$$

les fonctions angulaires normalisées par la condition

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |U_{jlm}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 1 \quad (9)$$

on trouve les facteurs de normalisation suivants:

$$\begin{aligned} {}^1N_{l,l,m} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(2l)!}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}} \\ {}^3N_{l+1,l,m} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(2l)!}{2^l l!} \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} \frac{1}{\sqrt{(l+m+1)!(l-m+1)!}} \\ {}^3N_{l,l,m} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(2l)!}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2l(l+1)}} \frac{1}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}} \\ {}^3N_{l-1,l,m} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(2l)!}{2^l l!} \sqrt{\frac{1}{2l}} \frac{1}{\sqrt{(l+m-1)!(l-m-1)!}} \end{aligned} \quad (10)$$

Quant au facteur radial de la fonction d'onde, il est le même que dans le cas de l'atome d'hydrogène, sauf que le rayon de Bohr b_0 doit être remplacé par $b = 2b_0$.

Finalement la fonction d'onde de l'état triplet ou singulet caractérisé par les nombres quantiques n, j, l, m , a pour expression:

$$\psi_{njl}(\rho) = \chi_{nl}(\rho) U_{jlm}(\theta, \varphi) \frac{e^{\frac{2\pi i}{h} \vec{P} \cdot \vec{R}}}{\sqrt{L^3}} \quad (11)$$

Si $\chi_{nl}(\rho)$ satisfait à la condition de normalisation

$$\int_0^{\infty} \chi_{nl}^2(\rho) d\rho = 1 .$$

ψ_{njl} est normalisée sur l'espace tout entier pour $\vec{\rho}$ et sur le domaine intérieur à un cube d'arête L pour \vec{R} .

Si $\vec{P} = 0$ l'énergie propre est la moitié de celle du niveau correspondant de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire que

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{e^2}{2b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \frac{e^2}{2b_0}. \quad (19)$$

Il nous reste à mettre en évidence certaines propriétés des fonctions d'onde que nous venons de construire.

En premier lieu elles sont fonctions propres des opérateurs inscrits ci-dessous avec les valeurs propres correspondantes

$$\begin{array}{l|l} J_z & m \frac{h}{2\pi} \\ \vec{J}^2 & j(j+1) \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \\ \vec{M}^2 & l(l+1) \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \vec{\Sigma}^2 & s(s+1) \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \\ \left(\frac{h}{2\pi} \right) \vec{M} \cdot \vec{\Sigma} & \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \end{array} \quad (14)$$

Les opérateurs \vec{M} , $\frac{h}{4\pi} \vec{\Sigma}$ et $\vec{J} = \vec{M} + \frac{h}{4\pi} \vec{\Sigma}$ représentant le moment cinétique orbital, la somme des moments cinétiques des spins et le moment cinétique total tandis que s est le nombre quantique de spin égal à 0 ou 1 suivant qu'il s'agit d'un état singulet ou triplet. Pour établir ces propriétés remarquons d'abord que J_z est le produit par $\frac{h}{2\pi i}$ de l'opérateur

$$R_z = \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} i \Sigma_z$$

correspondant aux rotations infinitésimales autour de Oz. En effet, si l'on fait tourner le système de référence d'un angle $d\varphi$ autour de Oz, ψ s'accroît de

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{1}{2} i \Sigma_z \psi d\varphi,$$

les deux termes se rapportant respectivement aux opérations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 précédemment envisagées. Comme pour des valeurs déterminées de j et l

$$u_{jlm}(\theta, \varphi) \sim Y_l^m(\theta, \varphi)$$

ces deux fonctions correspondent à la même valeur propre m de R_z , d'où le résultat annoncé pour J_z . Quant à la propriété relative à \vec{J}^2 elle résulte immédiatement de ce que, pour une représentation irréductible d'ordre j du groupe des rotations, on a, d'après un théorème connu¹,

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = -j(j+1) .$$

Pour les autres opérateurs les résultats indiqués se vérifient sans peine.

En deuxième lieu, l'ensemble des fonctions U_{jlm} forme un système orthogonal, normal et complet. L'orthogonalité découle du fait qu'il n'existe pas deux fonctions U caractérisées par les mêmes nombres quantiques j, l, m, s . D'autre part, l'ensemble des composantes des tenseurs réductibles dont nous sommes partis forme visiblement un système complet; il en est de même de l'ensemble des composantes des tenseurs irréductibles obtenus puisque chaque tenseur complètement réductible est équivalent à la réunion des quatre tenseurs irréductibles qui en sont extraits.

§ 2. — STRUCTURE FINE DES NIVEAUX.

Dans l'approximation que nous avons considérée au paragraphe précédent, tous les niveaux de même nombre quantique principal n correspondent à la même énergie propre E_n . Nous allons montrer maintenant comment cette dégénérescence est pour la plus grande part levée par l'introduction des énergies d'interaction magnétique et d'échange entre électron et positron. Ces énergies sont de l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique multipliée par v^2/c^2 ; elles sont données en première approximation par les formules II, § 2 (17) changées de signe, et II, § 3 (21).

¹ E. CARTAN, *loc. cit.*, § 80.

Nous nous attacherons surtout ici à mettre en évidence l'influence des termes nouveaux, à savoir ceux qui contiennent la fonction $\delta(\rho)$. D'autre part, en développant en série l'énergie cinétique relativiste d'une particule suivant les puissances de p on obtient:

$$\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - m c^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

Dans l'approximation actuelle le terme classique n'est plus suffisant; il faut conserver également le deuxième terme. Celui-ci se retrouve aussi en ramenant de façon approchée l'équation de Dirac à une équation du type de Pauli¹. Breit le trouve par une méthode analogue dans le problème de deux électrons². Nous sommes donc amenés à ajouter à l'hamiltonien de Schrödinger, en plus des interactions magnétiques et d'échange, le terme relativiste:

$$V_r = + \frac{p_1^4 + p_2^4}{8m^3 c^2}$$

Introduisons maintenant les coordonnées relatives et celles du centre de gravité que nous supposerons d'ailleurs au repos ($\vec{P} = 0$). Les différentes énergies de perturbation sont alors représentées par les opérateurs:

$$\left. \begin{aligned} V_r &= - \frac{\vec{\omega}^4}{4m^3 c^2} \\ V_l &= - \frac{e^2}{2m^2 c^2} \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{\omega}^2 + \frac{1}{\rho^3} \sum_{i,k=x,y,z} \rho_i \rho_k \vec{\omega}_i \vec{\omega}_k \right\} \\ V_{\sigma l} &= - \frac{2\mu^2}{\rho^3} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} (\vec{M} \cdot \vec{\Sigma}) \\ V_{\sigma} &= V_{\sigma}^I + V_{\sigma}^{II} \left\{ \begin{aligned} V_{\sigma}^I &= - 2 \frac{\mu^2}{\rho^3} \left\{ \frac{\vec{\Sigma}^2}{4} - \frac{3}{4} \frac{(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\rho})^2}{\rho^2} \right\} \\ V_{\sigma}^{II} &= \frac{8}{3} \pi \mu^2 \left(\frac{\vec{\Sigma}^2}{2} - 3 \right) \delta(\rho) \end{aligned} \right. \\ V_{\alpha} &= 4\pi\mu^2 \frac{\vec{\Sigma}^2}{4} \delta(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹ FRENKEL, *Wave mechanics. Advanced general theory*, p. 299, équ. 261a.

² BREIT, *Phys. Rev.*, 34, 1929, pp. 564-5, équ. 48.

Nous devons construire les éléments de matrice de ces opérateurs au moyen des diverses fonctions d'onde non perturbées correspondant à une même valeur du nombre quantique principal n . Les matrices ainsi formées sont toutes diagonales; pour le voir il suffit de remarquer que, sauf V_{σ}^I , chacun des termes perturbateurs commute avec J_z , \vec{J}^2 , \vec{M}^2 , $\vec{\Sigma}^2$; quant à V_{σ}^I , il commute bien avec J_z , \vec{J}^2 , $\vec{\Sigma}^2$ mais pas avec \vec{M}^2 ; toutefois l'intégration sur ρ fait disparaître les éléments de matrices non diagonaux pour lesquels l'intégration sur les angles θ et φ ne donne pas zéro (voir plus loin). Par conséquent, le système orthogonal de fonctions d'onde non perturbées que nous avons choisi au paragraphe précédent est adapté à la perturbation $V = V_r + V_l + V_{\sigma l} + V_{\sigma} + V_{\alpha}$ et l'énergie de perturbation du premier ordre de l'état (n, j, l, m) est égale à l'élément de matrice diagonal $(V)_{njl m}^{njl m}$.

Calculons d'abord les éléments de matrice de V_r , V_l , $V_{\sigma l}$.

En remarquant que les fonctions d'onde non perturbées satisfont à l'équation de Schrödinger

$$\left(\frac{\tilde{\omega}^2}{m} - \frac{e^2}{\rho} \right) \psi = E \psi$$

et en tenant compte de la relation

$$M^2 = \rho^2 \tilde{\omega}^2 - \sum_{i, h=x, y, z} \rho_i \rho_h \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_h - 2 \frac{\hbar}{2\pi i} (\vec{\rho} \cdot \vec{\tilde{\omega}}) ,$$

on peut mettre les deux premiers termes perturbateurs sous la forme

$$V_r = -\frac{1}{4mc^2} \left\{ E^2 + 2E \frac{e^2}{\rho} + \frac{e^4}{\rho^2} \right\}$$

$$V_l = -\frac{1}{mc^2} \left\{ E \frac{e^2}{\rho} + \frac{e^4}{\rho^2} \right\} + 2\mu^2 \left\{ \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right)^2 \vec{M}^2 - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right\}$$

En utilisant les expressions des valeurs propres de E , \vec{J}^2 , \vec{M}^2 , $\vec{\Sigma}^2$, on obtient pour les éléments de matrice diagonaux de V_r , V_l , $V_{\sigma l}$, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 (V_r) &= \frac{2\mu^2}{b^3} \left[-\frac{1}{4n^4} + \frac{1}{n^2} \overline{\left(\frac{b}{\rho} \right)} - \overline{\left(\frac{b^2}{\rho^2} \right)} \right] \\
 (V_l) &= \frac{2\mu^2}{b^3} \left[\frac{2}{n^2} \overline{\left(\frac{b}{\rho} \right)} - 4 \overline{\left(\frac{b^2}{\rho^2} \right)} + l(l+1) \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3} \right)} - 2 \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)} \right] \quad (2) \\
 (V_{l\sigma}) &= \frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3} \right)} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]
 \end{aligned}$$

dans lesquelles la barre surmontant un opérateur $f(\rho)$ indique qu'il faut en considérer la valeur moyenne

$$\overline{f(\rho)} = \int_0^\infty \chi_{nl}(\rho) f(\rho) \chi_{nl}(\rho) \cdot \rho^2 d\rho .$$

On a d'ailleurs:

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{b}{\rho} \right)} &= \frac{1}{n^2} \\
 \overline{\left(\frac{b^2}{\rho^2} \right)} &= \frac{1}{n^3 \left(l + \frac{1}{2} \right)} \\
 \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3} \right)} &= \frac{1}{n^3 \left(l + \frac{1}{2} \right) l(l+1)} \quad \text{pour } l > 0 \\
 \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)} &= \begin{cases} -\frac{2}{n^3} & \text{pour } l = 0 \\ 0 & \text{pour } l > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour les états S ($l = 0$) la valeur moyenne $\overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3} \right)}$ est divergente mais les termes où elle intervient doivent être supprimés puisque dans ce cas $\vec{M} = 0$.

En portant ces valeurs moyennes dans les formules (2) on trouve les expressions suivantes des énergies de perturbation dues à V_r , V_l et $V_{\sigma l}$:

$$\begin{aligned}
 V_r &= \frac{2\mu^2}{b^3} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l + \frac{1}{2}} \right) \frac{1}{n^4} \\
 V_l &= \begin{cases} \frac{2\mu^2}{b^3} \left(2 - \frac{3n}{l + \frac{1}{2}} \right) \frac{1}{n^4} & \text{pour } l > 0 \\ \frac{2\mu^2}{b^3} \left(2 - 4n \right) \frac{1}{n^4} & \text{pour } l = 0 \end{cases} \\
 V_{\sigma l} &= \begin{cases} \frac{2\mu^2}{b^3} \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{\left(l + \frac{1}{2}\right) l(l+1)} \frac{1}{n^4} & \text{pour } l > 0 \\ 0 & \text{pour } l = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad \left. \right\} (3)$$

Calculons maintenant les éléments de matrice de V_{σ}^I . Ceux du premier terme de V_{σ}^I sont nuls sauf les diagonaux qui ont pour expression:

$$(3) = -\frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} s(s+1) .$$

Ceux du deuxième terme peuvent s'écrire sous la forme:

$$(3)_{njl m}^{n'j'l'm'} = \frac{2\mu^2}{b^3} \cdot 3 \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)}_{n, l}^{n, l'} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F_{j'l'm'}^*(\theta, \varphi) F_{jlm}(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

avec

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)}_{n, l}^{n, l'} &= \int_0^{\infty} \chi_{nl'}(\rho) \frac{b^3}{\rho^3} \chi_{nl}(\rho) \cdot \rho^2 d\rho \\
 F_{jlm}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \frac{(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\rho})}{\rho} U_{jlm}(\theta, \varphi) .
 \end{aligned}$$

On établit sans difficulté que

$$\begin{aligned}
 {}^1F_{j, j, m} &= 0 \\
 {}^3F_{j, j-1, m} &= \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} {}^3U_{j, j, m} \\
 {}^3F_{j, j, m} &= \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} {}^3U_{j, j-1, m} + \sqrt{\frac{j}{2j+1}} {}^3U_{j, j+1, m} \\
 {}^3F_{j, j+1, m} &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}} {}^3U_{j, j, m}
 \end{aligned}$$

Les fonctions U_{jlm} formant un système orthogonal et normal, l'intégration sur les angles est immédiate. Pour les états singulets tous les éléments de matrice de B sont nuls. Pour les états triplets les seuls éléments non diagonaux qui pourraient être différents de zéro sont

$$(\mathcal{B})_{n,j,j-1,m}^{n,j,j+1,m} \quad \text{et} \quad (\mathcal{B})_{n,j,j+1,m}^{n,j,j-1,m}$$

mais ceux-ci s'annulent du fait que

$$\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)_{n,l}^{n,l\pm 2} = 0.$$

Quant aux éléments diagonaux, ils ont pour expressions:

$$(\mathcal{B}) = \begin{cases} \frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} 3 \frac{j+1}{2j+1} & \text{pour } l = j-1 \\ \frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} 3 & \text{pour } l = j \\ \frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} 3 \frac{j}{2j+1} & \text{pour } l = j+1 \end{cases}$$

Enfin, l'énergie de perturbation $(V_\sigma^I) = (\mathcal{A}) + (\mathcal{B})$ s'écrit,

pour les états singulets, $(V_\sigma^I) = 0$

$$\text{pour les états triplets, } (V_\sigma^I) = \begin{cases} -\frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} \frac{j-1}{2j+1} & \text{pour } l = j+1 \\ +\frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} & \text{pour } l = j \\ -\frac{2\mu^2}{b^3} \overline{\left(\frac{b^3}{\rho^3}\right)} \frac{j+2}{2j+1} & \text{pour } l = j-1 \end{cases} \quad (4)$$

Enfin, il nous reste à calculer les matrices des deux nouveaux termes, à savoir: V_σ^{II} et V_α . Celles-ci sont évidemment diagonales et les seuls états qui donnent des éléments de matrices non nuls sont les états S.

Pour le singulet 1S_0 ces éléments ont pour expression:

$$(V_{\sigma}^{II}) = -8\pi\mu^2\psi^2(0) = -\frac{8\mu^2}{n^3b^3} \quad (5)$$

$$(V_{\alpha}) = 0$$

tandis que pour le triplet 3S_1 on a:

$$(V_{\sigma}^{II}) = \frac{8}{3}\pi\mu^2\psi^2(0) = \frac{8\mu^2}{3n^3b^3} \quad (6)$$

$$(V_{\alpha}) = 8\pi\mu^2\psi^2(0) = \frac{8\mu^2}{n^3b^3}$$

Les formules (3), (4), (5) et (6) déterminent complètement la structure fine de tous les niveaux du système électron-positron. On voit que les nouveaux termes V_{σ}^{II} et V_{α} donnent lieu à des énergies de perturbation du même ordre de grandeur que les autres termes, mais à cause de la présence de la fonction $\delta(\rho)$ ils n'affectent que les états S. L'interaction d'échange V_{α} n'intervient que pour le triplet 3S_1 tandis que le terme d'interaction des spins à courte distance, V_{σ}^{II} , influence le triplet 3S_1 et le singulet 1S_0 .

§ 3. — L'ANNIHILATION RÉELLE ET SON INFLUENCE SUR LA LARGEUR NATURELLE DES NIVEAUX.

Nous avons jusqu'ici supposé que l'on pouvait déterminer la position et la structure fine des niveaux discrets du système électron-positron sans tenir compte du fait que la paire peut disparaître définitivement en émettant un certain nombre de photons (annihilation réelle). Pour justifier cette approximation, il nous reste à calculer la probabilité de ce phénomène et à vérifier que l'élargissement correspondant des niveaux est très inférieur à leur écart.

Comme nous supposons que le système est isolé, les principes de conservation de l'énergie et de l'impulsion ne peuvent être satisfaits que si la paire donne lieu, en s'annihilant, à deux photons au moins. Toutefois la probabilité d'annihilation est d'autant plus faible que le nombre de photons émis est plus

élevé, chacun d'eux faisant intervenir un facteur $(2\pi e^2/hc) = (1/137)$ dans l'expression de cette probabilité. Aussi nous bornerons-nous à étudier le cas où ce nombre est égal à deux.

Suivant le formalisme de l'électrodynamique quantique, le phénomène correspond alors au processus suivant: le système initialement doué d'une impulsion \vec{P} émet en premier lieu un photon d'impulsion $(h/2\pi)\vec{k}_1$ en recevant une impulsion de recul $-(h/2\pi)\vec{k}_1$; ensuite il effectue une transition d'annihilation en émettant un deuxième photon dont l'impulsion $(h/2\pi)\vec{k}_2$ est égale à celle du système dans l'état intermédiaire, de sorte que le principe de la conservation de l'impulsion est vérifié pour chacune des transitions. D'autre part l'énergie W de l'état initial est la même que celle de l'état final. \vec{k}_1 et \vec{k}_2 satisfont donc aux relations

$$\frac{h}{2\pi}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) = \vec{P}$$

$$\frac{h}{2\pi}(k_1 + k_2) = \frac{W}{c}.$$

En particulier si \vec{P} est nul, $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ et les deux photons ont la même énergie $h\nu_1 = h\nu_2 = \frac{W}{2}$; celle-ci étant au moins égale à mc^2 , le système se trouvera, dans l'état intermédiaire, animé d'une vitesse relativiste. Comme dans ce cas il n'est pas possible de tenir compte de façon rigoureuse de l'interaction entre les deux particules, nous la négligerons. La fonction d'onde peut alors être représentée par le produit de deux ondes planes à énergies positives. En tenant compte des deux orientations possibles des spins on obtient quatre types de fonctions d'onde dont les composantes s'écrivent:

$$\psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{4p_{10}p_{20}(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)}} \varphi_{ij} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2)}}{L^3}, \quad (1)$$

les valeurs des coefficients φ_{ij} étant inscrites respectivement dans les quatre tableaux suivants, où ils sont rangés d'après leurs indices comme des éléments de matrice:

$(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)$	0	$-(p_{10} + mc)p_{2z}$	$-(p_{10} + mc)(p_{2x} + ip_{2y})$
0	0	0	0
$-(p_{20} + mc)p_{1z}$	0	$p_{1z}p_{2z}$	$(p_{1x} + ip_{1y})p_{1z}$
$-(p_{20} + mc)(p_{1x} + ip_{1y})$	0	$(p_{1x} + ip_{1y})p_{2z}$	$(p_{1x} + ip_{1y})(p_{2x} + ip_{2y})$

0	0	0	0
$(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)$	0	$-(p_{10} + mc)p_{2z}$	$-(p_{10} + mc)(p_{2x} + ip_{2y})$
$-(p_{20} + mc)(p_{1x} + ip_{1y})$	0	$(p_{1x} + ip_{1y})p_{2z}$	$(p_{1x} + ip_{1y})(p_{2x} + ip_{2y})$
$(p_{20} + mc)p_{2z}$	0	$-p_{1z}p_{2z}$	$(p_{2x} + ip_{2y})p_{1z}$

0	$(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)$	$-(p_{10} + mc)(p_{2x} - ip_{2y})$	$(p_{10} + mc)p_{2z}$
0	0	0	0
0	$-(p_{20} + mc)p_{1z}$	$(p_{2x} - ip_{2y})p_{1z}$	$-p_{1z}p_{2z}$
0	$-(p_{20} + mc)(p_{1x} + ip_{1y})$	$(p_{2x} - ip_{2y})(p_{1x} + ip_{1y})$	$-(p_{1x} + ip_{1y})p_{2z}$

0	0	0	0
0	$(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)$	$-(p_{10} + mc)(p_{2x} - ip_{2y})$	$(p_{10} + mc)p_{2z}$
0	$-(p_{20} + mc)(p_{1x} - ip_{1y})$	$(p_{1x} - ip_{1y})(p_{2x} - ip_{2y})$	$-(p_{1x} - ip_{1y})p_{2z}$
0	$(p_{20} + mc)p_{1z}$	$-p_{1z}(p_{2x} - ip_{2y})$	$p_{1z}p_{2z}$

(2)

Ces fonctions d'onde forment système orthogonal, normal et complet à l'intérieur du cube L^2 si l'on prend soin de choisir les impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 de telle façon que le facteur exponentiel imaginaire présente la période L par rapport à chacune des variables $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

Pour la suite du calcul il est commode d'introduire les coordonnées du centre de gravité et les coordonnées relatives comme au § 1, III. L'exposant du dernier terme de ψ s'écrit alors :

$$\frac{2\pi i}{\hbar} (\vec{P} \vec{R} + \vec{\varpi} \vec{\rho}) .$$

Remarquons également qu'on peut symétriser ou antisymétriser les fonctions d'ondes précédentes en prenant comme composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \pm \psi_{ji}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)] .$$

Ces nouvelles fonctions nous serviront dans un raisonnement ultérieur.

Quant à la fonction d'onde de l'état initial, elle s'obtient avec une approximation suffisante, si, comme nous le supposons, le centre de gravité est au repos, en prenant comme composantes non relativistes celles que nous avons déterminées au § 1, III et en remplaçant toutes les autres par zéro. En effet, celles-ci sont très petites puisque la vitesse des particules est ici de l'ordre de $c/2.137$ alors que dans l'état intermédiaire, où elle atteint environ $c/\sqrt{2}$, toutes les composantes sont du même ordre de grandeur.

Nous pouvons maintenant aborder le calcul de la probabilité d'annihilation réelle. L'élément de matrice du second ordre correspondant à ce phénomène a pour expression :

$$H_{FA} = \sum_I \frac{H_{FI} H_{IA}}{W_A - W_I - \omega_k} \quad (3)$$

dans laquelle H_{IA} et H_{FI} sont respectivement les éléments de matrice relatifs à l'émission du premier photon avec transition du système de l'état initial A vers l'état intermédiaire I et à l'émission du deuxième photon avec annihilation de la paire se trouvant dans l'état I. La sommation s'étend à tous les états intermédiaires I. A ce propos, il ne faut pas perdre de vue que le premier et le second photon émis peuvent être \vec{k}_1 et \vec{k}_2 ou \vec{k}_2 et \vec{k}_1 .

Dans le premier cas,

$$H_{IA} = - \int \psi_I^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Gamma_I^*(\theta_{\vec{k}_1}) \cdot e [\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) - \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_2)] \cdot \psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \frac{d\theta_{\vec{k}_1}}{2\pi}$$

$$H_{FI} = - \int \Gamma_I^*(\theta_{\vec{k}_1}) \Gamma_I^*(\theta_{\vec{k}_2}) \cdot e \Sigma \{ c \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) \}_{ij} \delta(\rho) \cdot \psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \frac{d\theta_{\vec{k}_2}}{2\pi}.$$

Dans le second cas, ces éléments de matrices sont donnés par les mêmes expressions dans lesquelles on aura permuted \vec{k}_1 et \vec{k}_2 .

Les interactions qui figurent dans H_{IA} et H_{FI} sont respectivement antisymétriques et symétriques vis-à-vis d'une permutation des coordonnées et des spins des deux particules. Il faut par conséquent que les états A et I possèdent des symétries opposées et que ces derniers soient symétriques. Nous arrivons ainsi à la conclusion importante suivante:

L'annihilation réelle avec émission deux photons ne peut se produire que si le système est dans un état initial antisymétrique.

Pour évaluer H_{IA} et H_{FI} nous utiliserons les coordonnées du centre des gravité et les coordonnées relatives. Comme nous supposons que l'état initial appartient au spectre discret, l'intégration sur la variable ρ dans le calcul de H_{IA} fournit un résultant pratiquement indépendant de la limite jusqu'à laquelle on intègre pourvu que celle-ci atteigne une valeur finie de l'ordre de grandeur de b . Dans le cas de H_{FI} , le résultat de cette intégration est rigoureusement indépendant de la limite en question à cause des propriétés particulières de la fonction $\delta(\rho)$. Comme d'autre part la longueur L est arbitrairement grande, on voit aisément que l'on peut choisir comme domaine d'intégration l'espace tout entier pour $\vec{\rho}$ et l'intérieur d'un cube d'arête L pour \vec{R} .

En introduisant \vec{R} et $\vec{\rho}$ dans l'expression de \vec{A} [I, § 3 (11)], on voit intervenir respectivement dans H_{IA} et H_{FI} les facteurs

$$\frac{1}{L^3} \int e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \left(\vec{P} + \frac{\hbar}{2\pi} \vec{k}_1 \right) \vec{R}} d\tau_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{P} + \frac{\hbar}{2\pi} \vec{k} \neq 0 \\ 1 & \text{si } \vec{P} + \frac{\hbar}{2\pi} \vec{k} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{L^3} \int e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \left(\vec{P} + \frac{\hbar}{2\pi} \vec{k}_2 \right) \vec{R}} d\tau_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{P} + \frac{\hbar}{2\pi} \vec{k} \neq 0 \\ 1 & \text{si } \vec{P} + \frac{\hbar}{2\pi} \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Pour que les deux éléments de matrice ne soient pas nuls il faut que l'impulsion totale du système matériel et du champ électromagnétique soit conservée lors de l'émission de chacun des photons.

On trouve alors :

$$H_{IA} = - \frac{ehc}{\sqrt{2\pi\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{4p_{10}p_{20}(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)}} \frac{1}{L^3} \int v^* e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \vec{\omega} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}_1} (\vec{\alpha}_1 e^{-\frac{i\vec{k} \cdot \vec{v}}{2}} - \vec{\alpha}_2 e^{\frac{i\vec{k} \cdot \vec{v}}{2}}) \cdot \Phi_A(\vec{v}) d\tau_v$$

$$H_{FI} = - \frac{ehc}{\sqrt{2\pi\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{4p_{10}p_{20}(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)}} \frac{1}{\sqrt{L^3}} (c \vec{\alpha} \cdot \vec{a}_{\vec{k}_2})_{ij} v_{ij} \cdot$$

Notons que

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{\hbar} \vec{\omega} - \frac{\vec{k}_1}{2} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{\vec{P}}{2} - \vec{\omega} \right) = -\frac{2\pi}{\hbar} \vec{p}_2 \\ -\frac{2\pi}{\hbar} \vec{\omega} + \frac{\vec{k}_1}{2} &= -\frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{\vec{P}}{2} + \vec{\omega} \right) = -\frac{2\pi}{\hbar} \vec{p}_1 \end{aligned}$$

et posons

$$\frac{2\pi}{\hbar} \vec{p}_1 = \vec{K}_1 ; \quad \frac{2\pi}{\hbar} \vec{p}_2 = \vec{K}_2 .$$

De plus, écrivons par raison de simplicité \vec{a}_1 et \vec{a}_2 au lieu de $\vec{a}_{\vec{k}_1}$ et $\vec{a}_{\vec{k}_2}$ et explicitons la somme qui figure dans H_{FI} . Il vient

$$\begin{aligned}
 H_{IA} = & - \frac{ehc}{\sqrt{2\pi\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{4p_{10}p_{20}(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)}} \frac{1}{L^3} \\
 & \int \varphi^* \vec{a}_{k_1} (\vec{\alpha}_1 e^{+i\vec{K}_2 \vec{p}} - \vec{\alpha}_2 e^{-i\vec{K}_1 \vec{p}}) \Phi_A(\vec{p}) d\tau_{\vec{p}} \quad (4) \\
 H_{FI} = & - \frac{ehc}{\sqrt{2\pi\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{4p_{10}p_{20}(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)}} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \\
 & [(a_{2x} + ia_{2y}) \varphi_{11} - (a_{2x} - ia_{2y}) \varphi_{22} - (a_{2x} - ia_{2y}) \varphi_{33} + (a_{2x} + ia_{2y}) \varphi_{44}] .
 \end{aligned}$$

Ces dernières formules sont encore valables si le photon \vec{k}_2 est émis le premier, à condition de permuter \vec{a}_1 et \vec{a}_2 . L'impulsion du système dans l'état intermédiaire est alors :

$$\vec{P}' = -\frac{h}{2\pi} \vec{k}_2 = \frac{h}{2\pi} \vec{k}_1 = -\vec{P} .$$

Il existe donc des états intermédiaires I et I' de mêmes spins et tels que les impulsions des particules soient une à une opposées :

$$\vec{p}'_1 = -\vec{p}_1 ; \quad \vec{p}'_2 = -\vec{p}_2 .$$

Enfin, puisque nous supposons que l'état initial A est non relativiste :

$$W_A \approx 2mc^2 ; \quad \omega_k = \frac{W_A}{2} \approx mc^2 .$$

Par conséquent

$$W_A - W_I - \omega_k = mc^2 - c(p_{10} + p_{20}) .$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'élément de matrice du second ordre H_{FA} au moyen de la formule (3). Nous effectuerons d'abord la sommation sur les deux orientations des spins de chaque particule et sur les deux ordres d'émission des photons (états I et I') puis sur toutes les impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 en remarquant que celles-ci sont liées par la relation

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = \text{Cte} . \quad (5)$$

Il nous reste à calculer la probabilité d'annihilation réelle. Celle-ci est donnée par la formule de Wentzel

$$\Pi = \frac{4\pi^2}{h} D_{W_F} |H_{FA}|^2 \quad (6)$$

où D_{W_F} représente la densité énergétique d'états finals pour $W_F = W_A$. Pour obtenir celle-ci considérons les photons dont l'énergie est comprise entre ω_k et $\omega_k + d\omega_k$, dont le vecteur \vec{k} se trouve à l'intérieur d'un angle solide élémentaire $d\Omega$ et dont le vecteur de polarisation \vec{a}_k a une orientation déterminée (à un angle infinitésimal près).

Le nombre de ces photons est

$$dN = L^3 \frac{\omega_k^2}{h^3 c^3} d\omega_k d\Omega .$$

D'autre part, puisque le principe de la conservation de l'impulsion est satisfait pour chacune des transitions $A \rightarrow I$, $I \rightarrow F$, constituant le processus d'annihilation réelle, les deux photons ont nécessairement des impulsions égales et opposées et par suite des énergies identiques $\omega_k = \frac{W_F}{2}$; dN représente donc également le nombre d'états finaux dont l'énergie est comprise entre W_F et $W_F + dW_F$, avec $W_F = 2\omega_k$, et dont les photons satisfont aux conditions suivantes:

- 1^o Leurs directions sont opposées et contenues à l'intérieur d'un double cône d'ouverture $d\Omega$.
- 2^o Leurs vecteurs de polarisation ont des orientations déterminées \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

La densité énergétique de ces états est donc

$$D_{W_F} = \frac{1}{2} L^3 \frac{\omega_k^2}{h^3 c^3} d\Omega . \quad (7)$$

En faisant $\omega_k = mc^2$ dans cette expression et en portant celle-ci dans (6) on obtient la probabilité $d\Pi^{(a)}$ d'annihilation avec émission de deux photons satisfaisant aux conditions ci-dessus. Il suffit alors de sommer sur les deux directions possibles de chacun des vecteurs de polarisation \vec{a}_1 et \vec{a}_2 et d'intégrer

sur l'angle solide $\Omega = 2\pi$ pour trouver la probabilité totale $\Pi^{(a)}$ d'annihilation avec émission de deux photons de directions opposées arbitraires et de polarisations quelconques.

Appliquons ces résultats aux cas de l'état initial 1^1S_0 . On a alors :

$$\Phi_A = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \chi & 0 & 0 \\ -\chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\chi(\rho) = 2\sqrt{\chi^3} e^{-\chi\rho} ; \quad \chi = \frac{1}{b} = \frac{1}{2b_0} ;$$

Comme la fonction d'onde $\Phi_A(\vec{\rho})$ présente une symétrie sphérique, l'élément de matrice H_{IA} est indépendant de la direction de \vec{k}_1 ; pour simplifier le calcul nous supposerons ce vecteur parallèle à O_1 .

On obtient sans difficulté l'expression des éléments de matrice H_{IA} et H_{FI} en rassemblant les formules (2), (4) et (8) et en tenant compte de la relation $\int e^{\pm i\vec{K}\vec{\rho} - \chi\rho} d\tau = 4\pi \frac{2\chi}{(\chi^2 + K^2)^2}$.

Pour évaluer H_{FA} au moyen de (3) nous sommerons d'abord les huit termes correspondant aux quatre états I et aux quatre états I' relatifs respectivement à l'émission des photons \vec{k}_1 et \vec{k}_2 en premier lieu, aux impulsions \vec{p}_1 , \vec{p}_2 et $\vec{p}'_1 = -\vec{p}_1$, $\vec{p}'_2 = -\vec{p}_2$ et aux quatre orientations possibles des deux spins. Ces huit états possédant la même énergie, le dénominateur peut être mis en évidence devant le signe somme de (3). On trouve alors aisément pour les états I :

$$\begin{aligned} \sum_I H_{FI} H_{IA} &= \frac{e^2 h^2 c^2}{2\pi w_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2\sqrt{\chi^3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{4p_{10} p_{20}} \frac{1}{L^{9/2}} \\ &\quad \left[(a_{1x} - ia_{1y})(a_{2x} + ia_{2y}) - (a_{2x} - ia_{2y})(a_{1x} + ia_{1y}) \right] \\ &= 4\pi \left\{ (p_{10} + mc) \left[p_{2z} - \frac{p_2^2}{(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)} p_{1z} \right] \frac{2\chi}{(\chi^2 + K_1^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + (p_{20} + mc) \left[p_{1z} - \frac{p_1^2}{(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)} p_{2z} \right] \frac{2\chi}{(\chi^2 + K_2^2)^2} \right\} . \end{aligned} \quad (9)$$

La sommation sur les états I' donne le même résultat car il faut permutez \vec{a}_1 et \vec{a}_2 et remplacer \vec{p}_1, \vec{p}_2 par $\vec{p}'_1 = -\vec{p}_1, \vec{p}'_2 = -\vec{p}_2$ dans l'expression précédente.

Il nous reste à effectuer la sommation sur toutes les impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 liées par la relation (5) avec $P_x = P_y = 0, P_z = -mc$. Comme celles-ci jouent des rôles symétriques, les deux termes du dernier facteur de (9) apportent la même contribution; il suffit donc de conserver l'un d'eux, le premier par exemple, et de le multiplier par deux. Nous choisirons alors p_{1x}, p_{1y}, p_{1z} comme variables indépendantes et nous remplacerons la somme par une intégrale en remarquant que le nombre de vecteurs \vec{p}_1 dont l'extrémité se trouve à l'intérieur de l'élément de volume $dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}$ de l'espace des impulsions est $L^3 \frac{dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}}{h^3}$.

D'autre part

$$(a_{1x} - ia_{1y})(a_{2x} + ia_{2y}) - (a_{2x} - ia_{2y})(a_{1x} - ia_{1y}) = 2i \sin \eta$$

où η est l'angle que font les vecteurs de polarisation \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

On trouve ainsi

$$H_{FA} = \frac{e^2 \hbar^2 c^2}{2 \pi \omega_k} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \pi}} \frac{2 \sqrt{\kappa^3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{L^3}} 8i \sin \eta \cdot \frac{4 \pi}{4} \int \frac{1}{mc^2 - cp_{10} - cp_{20}} \frac{p_{10} + mc}{4 p_{10} p_{20}} \\ \left\{ P_z - \left[1 + \frac{(\vec{P} - \vec{p}_1)^2}{(p_{10} + mc)(p_{20} + mc)} \right] p_{1z} \right\} \frac{2 \kappa}{(\kappa^2 + K_1^2)^2} \frac{dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}}{h^3}.$$

Le facteur précédent l'élément de volume présente un maximum très aigu pour $K_1 = \frac{2\pi}{h} p_1 = 0$ de sorte que la presque totalité de l'intégrale provient d'un domaine intérieur à une sphère dont le rayon est de l'ordre de

$$p_1 = \frac{h}{2\pi} K_1 = \frac{h}{2\pi} \kappa = \frac{mc}{2(137)}.$$

Dans ce domaine p_{10} et p_{20} ont donc pratiquement les mêmes valeurs qu'au point $\vec{p}_1 = 0$, soient: $p_{10} = mc; p_{20} = \sqrt{2} mc$.

En remplaçant p_{10} et p_{20} par ces valeurs et négligeant p_{1z} vis-à-vis de $P_z = -mc$, puis en introduisant comme nouvelles variables d'intégration les coordonnées polaires K_1, Θ_1, Φ_1 de l'extrémité du vecteur \vec{K}_1 , il vient :

$$\begin{aligned} H_{FA} &= \frac{e^2 h^2 c^2}{2\pi (mc^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2\sqrt{\kappa^3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \cdot 2i \sin \eta \cdot 4\pi \int_{K_1=0}^{\infty} \int_{\Theta_1=0}^{\pi} \int_{\Phi_1=0}^{2\pi} \\ &\quad \frac{2\kappa}{(\kappa^2 + K_1^2)^2} \frac{K_1^2 dK_1}{8\pi^3} \sin \Theta_1 d\Theta_1 d\Phi_1 \\ &= \frac{e^2 h^2 c^2}{2\pi (mc^2)^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2\sqrt{\kappa^3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{L^3}} 2i \sin \eta . \end{aligned}$$

Par suite, la probabilité élémentaire $d\Pi_{1^1S_0}^{(a)}$ d'annihilation a pour expression :

$$\begin{aligned} d\Pi_{1^1S_0}^{(a)} &= \frac{4\pi^2}{h} \frac{e^4 h^4 c^4}{4\pi^2 (mc^2)^4} \frac{4\kappa^2}{4\pi} \frac{1}{L^3} 2 \sin^2 \eta \cdot \frac{1}{2} L^3 \frac{(mc^2)^2}{h^3 c^3} d\Omega \\ &= \frac{\kappa^3}{\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 c \cdot \sin^2 \eta \cdot d\Omega . \end{aligned}$$

On notera qu'elle est proportionnelle au carré du sinus de l'angle fait par les vecteurs de polarisation des deux photons. Enfin la probabilité totale d'annihilation réelle avec émission de deux photons de directions opposées arbitraires et de polarisation quelconque a pour expression :

$$\Pi_{1^1S_0}^{(a)} = \frac{\kappa^3}{\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 c \cdot \sum_{a_1 a_2} S S \sin^2 \eta \cdot \int d\Omega = 4\kappa^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 c \quad (10)$$

En remarquant que

$$\kappa = \frac{1}{b} = \frac{1}{2b_0} ; \quad (b_0 = \text{rayon de Bohr} = 0,528 \cdot 10^{-8} \text{ cm})$$

$$\frac{e^2}{mc^2} = r_0 ; \quad (r_0 = \text{rayon classique de l'électron})$$

$$\frac{r_0}{b_0} = \left(\frac{2\pi e^2}{hc} \right)^2 = \frac{1}{(137)^2} ,$$

celle-ci devient

$$\Pi_{1^1S_0}^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{b_0} \right)^2 \frac{c}{b_0} = \frac{1}{2} (137,3)^{-4} \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{0,528 \cdot 10^{-8}} = 0,80 \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}.$$

La vie moyenne de l'état 1^1S_0 est donc

$$\tau_{1^1S_0} = \frac{1}{\Pi_{1^1S_0}^{(a)}} = \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{0,80} \text{ sec}.$$

D'une façon générale, on trouve qu'à l'approximation précédente la probabilité d'annihilation de l'état n^1S_0 est

$$\Pi_{n^1S_0} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{b_0} \right)^2 \frac{c}{b_0} = \frac{0,80}{n^3} \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}.$$

D'autre part, on sait que si la vie moyenne d'un état quantique a une valeur finie τ , l'énergie de celui-ci n'est pas parfaitement déterminée.

La probabilité que celle-ci soit comprise entre E et $E + \Delta E$ est donnée par la formule

$$\frac{E}{2\pi} \frac{dE}{(E - E_0)^2 + \Delta E^2/4}$$

dans laquelle la largeur ΔE du niveau est liée à sa vie moyenne τ par la relation d'incertitude d'Heisenberg

$$\Delta E \cdot \tau = \frac{h}{2\pi}$$

que l'on peut encore écrire

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{\tau} = \frac{h}{2\pi} \Sigma \Pi$$

la sommation étant étendue à toutes les probabilités de transition spontanée vers les autres états.

Au phénomène d'annihilation réelle correspond donc une largeur partielle

$$\Delta E^{(a)} = \frac{h}{2\pi} \Pi^{(a)}.$$

Pour le niveau n^1S_0 celle-ci vaut:

$$\Delta E^{(a)} = 2 \left(\frac{r_0}{b_0} \right)^2 \frac{hc}{2\pi e^2} \frac{e^2}{4b_0} \frac{2}{(137)^2} \frac{I}{n^3}$$

où $I = e^2/4b_0$ est l'énergie d'ionisation de l'état fondamental.

Par ailleurs il résulte des formules III, § 2 (5) et (6) que la séparation des niveaux n^1S_0 et n^3S_1 due aux interactions de spin et d'échange est :

$$\Delta E^{(i)} = \frac{56}{3} \frac{\mu^2}{n^3 b^3} = \frac{7}{3(137)^2} \frac{I}{n^3} .$$

Par suite

$$\frac{\Delta E^{(a)}}{\Delta E^{(i)}} = \frac{7}{6} \frac{1}{137} = 0,85 \cdot 10^{-2} .$$

Autrement dit, la largeur des niveaux n^1S_0 due à l'annihilation réelle est petite vis-à-vis de la distance entre les niveaux n^1S_0 et n^3S_1 .

Les calculs se développent de façon analogue dans le cas d'un état antisymétrique quelconque. On peut ainsi voir que la largeur des niveaux 3P est d'un ordre de grandeur 137^2 fois plus petit que celle des niveaux 1S_0 , et que celle des niveaux antisymétriques suivants 1D , 3F , ... n'est certainement pas plus élevée. D'une façon générale on peut affirmer que l'annihilation réelle avec émission de deux photons confère aux niveaux antisymétriques une largeur bien inférieure aux séparations résultant des interactions magnétiques (spin — spin, spin — orbite, orbite — orbite) et d'échange. Enfin, on peut étendre le résultat aux états symétriques, qui ne peuvent s'annihiler qu'avec émission de trois photons au moins, si l'on admet que de tels phénomènes correspondant à un processus d'ordre plus élevé, leur probabilité est toujours inférieure à la plus forte probabilité d'annihilation avec émission de deux photons.

Nous arrivons donc à cette importante conclusion que l'annihilation réelle est un phénomène suffisamment rare pour ne pas perturber de façon appréciable les phénomènes d'interaction magnétique et d'échange que nous avons étudiés aux II, § 2 et 3 en la négligeant purement et simplement; c'est ce qui permet d'attribuer un sens précis à la structure fine des niveaux déterminée au III, § 2.

Toutefois, son influence sur la largeur des niveaux peut être dans certains cas notablement plus importante que celle des transitions optiques.

Considérons par exemple les niveaux n^1S_0 . Exprimée en pulsation $\omega = 2\pi\nu$ (ν = fréquence), leur largeur partielle due à l'annihilation réelle est :

$$\Delta^{(a)} \omega_{n^1S_0} = 2\pi \Delta^{(a)} \nu_{n^1S_0} = \Pi_{n^1S_0}^{(a)} = \frac{0,80}{n^3} \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1} .$$

Pour les trois premiers niveaux cette formule donne :

$$\begin{aligned} \Delta^{(a)} \omega_{1^1S_0} &= 800 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1} ; & \Delta^{(a)} \omega_{2^1S_0} &= 100 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1} ; \\ \Delta^{(a)} \omega_{3^1S_0} &= 29,6 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1} . \end{aligned}$$

D'autre part, la largeur partielle due aux transitions optiques est la moitié de celle des niveaux correspondants de l'hydrogène. En effet, la probabilité d'une telle transition est proportionnelle au carré du moment électrique de transition et au cube de la fréquence émise et ces grandeurs sont multipliées respectivement par $\frac{1}{2}$ et par 2 lorsqu'on passe du système électron-positron à l'atome d'hydrogène. Pour celui-ci on a d'ailleurs¹

$$\Delta \omega_{1S} = 0 ; \quad \Delta \omega_{2S} = 0 ; \quad \Delta \omega_{3S} = 0,63 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1} .$$

Pour le système électron-positron, les largeurs partielles dues aux transitions optiques sont par conséquent :

$$\Delta^{(0)} \omega_{1^1S_0} = 0 ; \quad \Delta^{(0)} \omega_{2^1S_0} = 0 ; \quad \Delta^{(0)} \omega_{3^1S_0} = 0,315 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1} .$$

Pour l'état 3^1S_0 la contribution de l'annihilation réelle est donc environ cent fois supérieure à celle des transitions optiques. Dans d'autres cas, au contraire, comme celui du triplet 3P , cette dernière l'emporte largement sur la première.

Remarque.

La quantité α qui figure dans la formule (10) provient uniquement du facteur de normalisation de la fonction d'onde. Le α qui se trouvait dans le facteur exponentiel de celle-ci a disparu dans notre approximation, valable pour $\alpha\Lambda \ll 1$. Par conséquent, si on fait tendre α vers zéro, (10) fournit rigoureusement

¹ HEITLER, *The quantum theory of radiation*, p. 118.

la probabilité d'annihilation d'un positron dans un espace où il y a une probabilité uniforme \propto^3/π de trouver un électron dont le spin est antiparallèle à celui du positron.

La section efficace correspondant à l'annihilation réelle est donc dans ce cas.

$$s = 4 \pi r_0^2 \frac{c}{v} \quad (11)$$

où v désigne la vitesse relative des deux particules.

D'autre part, Dirac a déterminé la section efficace s_0 relative à l'annihilation d'un électron et d'un positron animés de vitesses relativistes et dont les spins sont quelconques. Pour les vitesses non relativistes la formule qu'il obtient se réduit à

$$s_0 = \pi r_0^2 \frac{c}{v} .$$

Or, dans ce cas, les symétries d'espace et de spin peuvent être séparées et l'on peut dire qu'un quart des états sont anti-symétriques et trois quarts symétriques de spin. Si v tend vers zéro, les premiers donnent lieu à la section efficace s que nous venons de trouver et les autres à une section nulle. En effectuant la moyenne sur les différentes orientations des spins on trouve donc $s_0 = s/4$. La formule (11) est donc en parfait accord avec celle de Dirac.

CONCLUSIONS.

1^o Dans le présent mémoire, nous avons étudié au moyen de l'électrodynamique quantique, le champ propre de l'électron, ainsi que l'interaction mutuelle de deux particules de Dirac, de signes identiques ou opposés et animées de vitesses non relativistes.

En ce qui concerne l'étude du champ propre de l'électron, la méthode que nous avons suivie repose, comme celle de G. Beck, sur un calcul de perturbation du premier ordre, mais suit de beaucoup plus près la définition des potentiels introduits en électrodynamique quantique. Elle nous a permis de retrouver dans les grandes lignes les trois champs déjà obtenus par cet

auteur: à savoir; le champ de Coulomb, le champ de spin et le champ α , mais sous un aspect plus satisfaisant.

En premier lieu, tous les champs que nous obtenons sont maxwelliens. Les difficultés de transformation relativiste ont disparu et il n'y a plus aucune raison, de chercher à introduire un potentiel tenseur ni d'envisager l'existence hypothétique de photons longitudinaux ainsi que le suggère G. Beck.

D'autre part si les champs de Coulomb et de spin, peuvent toujours être considérés comme statiques, puisqu'ils interviennent dans le calcul des éléments diagonaux des matrices d'Heisenberg des potentiels, il n'en est plus du tout de même pour le champ α . Celui-ci correspond aux éléments non diagonaux relatifs aux transitions d'annihilation ou de création d'une paire. De plus le potentiel vecteur de ce champ ne varie plus comme l'inverse du carré de la distance mais bien suivant une fonction $\delta(r)$ de Dirac, ce qui rend beaucoup plus naturel le fait que dans le problème électron-positron, l'interaction V_α due à ce champ contient elle aussi une fonction δ . Ces différences montrent également pourquoi le champ α , malgré son importance comparable à celle du champ magnétique du spin, ne peut donner lieu à des phénomènes macroscopiques analogues au ferro-magnétisme.

2^o En ce qui concerne l'interaction de deux électrons, nous avons montré que l'élément de matrice du second ordre, dont une expression particulière est fournie par la formule de Møller, peut être considéré comme l'élément de matrice d'une interaction mutuelle qui s'exprime très simplement au moyen des potentiels de leurs champs propres. Cette interaction correspond, comme en électrodynamique classique, à la différence des énergies de superposition des parties longitudinales et transversales de leurs champs.

La considération des échanges d'impulsion par émission et absorption de photons virtuels revient, à ce point de vue, à calculer ces énergies en décomposant les champs des deux particules en série d'ondes planes, chaque photon virtuel émis ou absorbé par l'une d'elles correspondant à une composante de Fourier de son champ propre.

En superposant les champs de Coulomb et de spin de deux électrons, nous retrouvons les interactions obtenues par Heisenberg, Breit et d'autres au moyen de considérations de correspondance. Cependant l'ordre des opérateurs non commutables figurant dans ces interactions ne pouvait être déterminé sans ambiguïté par de telles considérations alors qu'il est parfaitement fixé par l'électrodynamique quantique. De plus nous obtenons, dans l'interaction de deux spins, un nouveau terme contenant la fonction $\delta(r)$ de Dirac et n'intervenant par conséquent que pour les petites distances. Sa présence correspond au fait que chaque électron est plongé dans le champ magnétique moyen de l'autre, champ égal à l'induction suivant la théorie de Lorentz. Ce terme est en parfait accord avec un terme analogue indiqué par Fermi dans la théorie de la structure hyper-fine et tenant compte de l'interaction du spin du noyau avec celui de l'électron dans les états S.

3^o Dans le cas du système électron-positron, la possibilité d'annihilation et de recréation de la paire donne lieu à une nouvelle interaction V_α qui contient également la fonction $\delta(r)$ et n'intervient donc qu'à très petite distance. Son influence avait déjà été prise en considération implicitement par Bhabha, dans l'étude de la diffusion élastique des positrons par les électrons. Nous avons montré que V_α résulte de la superposition des champs α d'annihilation et de création de la paire qui disparaît et de celle qui réapparaît et qu'elle pouvait être considérée comme une interaction d'échange. Elle fait alors intervenir la somme des opérateurs de permutation que Heisenberg et Majorana ont introduits empiriquement dans l'étude du problème proton-neutron. Cette analogie nous a conduit à étudier en détail le système électron-positron. Celui-ci est assez semblable à l'atome d'hydrogène, mais tous ses niveaux en sont deux fois moins profonds. Après avoir recherché toutes les fonctions d'onde nous avons déterminé pour chaque niveau la structure fine due aux interactions magnétiques des spins et des orbites et à l'interaction V_α . Les déplacements dus à ces diverses interactions sont tous du même ordre de grandeur. Cependant V_α n'intervient que dans les états triplets 3S_1 qui

sont d'ailleurs également affectés par le nouveau terme de l'interaction spin-spin. Enfin le système électron-positron peut s'annihiler définitivement en émettant deux photons au moins s'il est dans un état antisymétrique par rapport aux coordonnées et aux spins et plus de deux photons s'il se trouve dans un état symétrique. La probabilité d'un tel phénomène est maxima pour l'état singulet 1^1S_0 dont la vie moyenne est $1,25 \cdot 10^{-10}$ sec. De façon plus générale, la largeur partielle du niveau n^1S_0 due à l'annihilation réelle est $n^{-3} \cdot 0,80 \cdot 10^{10}$ sec.⁻¹, ce qui correspond à peu près au centième de l'écart entre les niveaux n^1S_0 et n^3S_1 . Ceci confère un sens précis au calcul de structure fine. Cependant cette largeur peut être dans certains cas notablement supérieure à celle qui résulte des transitions optiques (environ cent fois pour le niveau 3^1S_0). Ces résultats permettent d'espérer que dans des conditions particulièrement favorables, il sera possible d'observer le spectre optique du système électron-positron.

Note ajoutée lors de l'impression.

Depuis le dépôt de ce mémoire à la Faculté des Sciences de Paris en 1943, le problème de l'interaction entre l'électron et le positron a été considéré dans plusieurs publications¹ qui suscitent quelques commentaires.

Ruark déclare notamment que, dès 1937, il a recherché, mais en vain, les raies du système électron-positron (qu'il appelle positronium) dans le spectre infra-rouge des nébuleuses. Bien que celui-ci soit insuffisamment connu, Ruark attribue plutôt son échec à la grande probabilité d'annihilation réelle qu'il croit même capable de masquer complètement la structure fine des niveaux, ce qui est nettement exagéré comme nous l'avons montré.

¹ A.-E. RUARK, *Phys. Rev.* 68, 278, 1945 (lettre).

J.-A. WHEELER, *Ann. of the New York Ac. of Sc.*, 48, art. 3, 219, 1946.

AADNE ORE, *Phys. Rev.* 70, 90, 1946. — HYLLERAS et AADNE ORE, *Bull. Am. Phys. Soc.* n° 1, p. 13, 1947.

Wheeler, d'autre part, calcule la vie moyenne de l'état lié 1S_0 à partir de la formule de Dirac relative aux particules libres, en suivant un raisonnement analogue à celui que nous avons exposé dans le dernier paragraphe du présent travail. Cette méthode, où l'interaction coulombienne n'intervient que d'une façon indirecte et partielle, semble à première vue trop simpliste pour pouvoir être appliquée aux autres états. En utilisant par contre un formalisme où l'électron et le positron sont tous deux représentés par des états d'énergie positive seulement, nous avons été conduits à une méthode tout à fait générale, applicable à un état quelconque (l'état 3P par exemple) et tenant compte directement de l'interaction coulombienne entre l'électron et le positron.

Enfin, Belinfante¹ a tout récemment insisté lui aussi sur la signification classique des interactions spin-spin du type δ que l'on ne peut par conséquent supprimer purement et simplement comme nous l'avons remarqué. Appliquant cette constatation à la théorie mésonique, Belinfante conclut que si l'on veut éliminer les interactions δ entre les particules nucléaires, on doit imposer certaines relations entre les constantes d'interaction relatives aux diverses composantes du champ mésonique.

Je remercie très vivement M. Guido Beck qui a suivi ces recherches avec grande bienveillance, jusqu'à son départ de France, et qui m'a très obligamment communiqué ses résultats alors inédits sur la théorie quantique du champ de l'électron.

J'exprime également ma profonde reconnaissance à M. Louis de Broglie pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et à M. E. C. G. Stueckelberg qui a examiné le manuscrit en détail en 1943.

Enfin, je tiens à dire combien j'ai été sensible à l'accueil que j'ai trouvé en pleine guerre à la Faculté des Sciences de Lyon.

¹ BELINFANTE, *Physica*. 12, 1, 1946.