Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 29 (1947)

Artikel: Le champ propre et l'interaction des particules de Dirac : suivant l'électrodynamique quantique [suite]

Autor: Pirenne, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742259

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LE CHAMP PROPRE ET L'INTERACTION DES PARTICULES DE DIRAC

suivant l'électrodynamique quantique

PAR

Jean PIRENNE

(suite) [1]

II. L'INTERACTION DE DEUX PARTICULES DE DIRAC

§ 1. — L'ÉQUATION D'ONDE DES PARTICULES ET DU CHAMP.

1. *Particules de même signe.*

Suivant le formalisme de l'électrodynamique quantique, l'état d'un système constitué par deux électrons en interaction avec le champ électromagnétique peut être représenté par une fonction d'onde à énergie positive $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \theta; t)$ dépendant des coordonnées des deux particules, des variables du champ et du temps. Cette fonction d'onde possède 16 composantes $\Psi_{\mu\nu}$ avec $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, et obéit à l'équation

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{1}$$

dans laquelle l'hamiltonien H a pour expression

$$H = H_1^{(p)} + H_2^{(p)} + H_1^{(i)} + H_2^{(i)} + H^{(ch)} \tag{2}$$

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ NEUCHATEL

[1] Première partie v. *Archives*, [5], *28*, 233 (1946) et [5], *29*, 121 (1947).

avec

$$
\begin{aligned}
H_1^{(p)} &= - \left(c\,\vec{\alpha}_1 \,.\, \vec{p}_1 + \beta_1\, mc^2\right) \\
H_2^{(p)} &= - \left(c\,\vec{\alpha}_2 \,.\, \vec{p}_2 + \beta_2\, mc^2\right) \\
H_1^{(i)} &= - e\left(A_0(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}_1 \,.\, \vec{A}(\vec{r}_1)\right) \qquad (3) \\
H_2^{(i)} &= - e\left(A_0(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_2 \,.\, \vec{A}(\vec{r}_2)\right) \\
H^{(ch)} &= \sum_{\vec{k}} \left(S\, N_{\tau \vec{k}} + N_{\lambda \vec{k}} - N_{0 \vec{k}}\right) w_k \,.
\end{aligned}
$$

$H_1^{(p)}$ et $H_2^{(p)}$ sont formellement identiques aux hamiltoniens de deux particules libres; $H_1^{(i)}$ et $H_2^{(i)}$ sont les termes d'interaction de chacune d'elles avec le champ et H^{ch} est l'hamiltonien des oscillateurs de ce dernier. $\vec{\alpha}_1$, β_1 et $\vec{\alpha}_2$, β_2 sont les matrices de Dirac opérant respectivement sur le premier et sur le second indice de Ψ tandis que les opérateurs impulsions $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ ont pour expression

$$
\vec{p}_1 = \frac{h}{2\,\pi\, i}\, \mathrm{grad}_{(\vec{r}_1)} \;; \qquad \vec{p}_2 = \frac{h}{2\,\pi\, i}\, \mathrm{grad}_{(\vec{r}_2)} \;.
$$

Du point de vue énergétique

$$
H_1^{(p)} - e\,\vec{\alpha}_1 \vec{A}(\vec{r}_1) \qquad \text{et} \qquad H_2^{(p)} - e\,\vec{\alpha}_2 \vec{A}(\vec{r}_2)
$$

représentent l'énergie cinétique (y compris mc^2) de chacune des particules tandis que

$$
w^{(ch)} = - e\,A_0(\vec{r}_1) - e\,A_0(\vec{r}_2) + H^{(ch)}
$$

est l'énergie du champ. Nous disons en principe, car il ne semble pas que l'on puisse écrire l'énergie totale du système sous la forme d'un hamiltonien décomposable de cette façon. Nous avons montré (§ 1, 5) qu'en électrodynamique classique une telle hypothèse conduit à des contradictions et que notamment il est nécessaire, si l'on veut ramener en première approximation l'étude du mouvement du système à un problème purement mécanique, d'omettre certains termes dus à l'existence du champ propre des particules et dont il a déjà été tenu compte dans leurs masses. Ces difficultés subsistent en électrodynamique quantique et nous verrons que ce sont exactement

les mêmes termes qu'il faut supprimer pour déduire de cette théorie l'équation de Schrödinger ou de Pauli du système. Ces réserves étant faites, la décomposition en question de l'hamiltonien H montre qu'il est nécessaire de compter toutes les énergies avec le même signe qu'en théorie classique (ou toutes avec le signe opposé, à condition d'utiliser d'autres opérateurs pour les potentiels (cf. I, § 4). D'une façon plus précise ceci signifie que si l'on fait tendre les interactions $H_1^{(i)}$ et $H_2^{(i)}$ vers zéro, Ψ se décompose en une somme de termes de la forme $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\,\Gamma$ où Γ est une fonction d'onde à énergie positive du champ transversal, tandis que $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ est le produit antisymétrisé de deux fonctions d'onde à énergie positive $\psi(\vec{r}_1)$ et $\psi(\vec{r}_2)$, produit dont les composantes s'écrivent

$$\psi_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \psi_\mu(\vec{r}_1)\, \psi'_\nu(\vec{r}_2) - \psi_\nu(\vec{r}_2)\, \psi'_\mu(\vec{r}_1) \right\} .$$

On peut de la même façon représenter le système positron-positron par une fonction d'onde à énergie positive $\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2;\ \theta;\ t)$ dépendant seulement des coordonnées des deux positrons, des variables du champ et du temps. Φ obéit à l'équation (1) dans laquelle on aura remplacé e par $-e$.

2. *Particules de signes opposés.*

Si l'on néglige, en première approximation, la possibilité d'annihilation, l'état du système électron-positron peut, comme précédemment, être décrit par une fonction d'onde à énergie positive ne dépendant que des coordonnées des deux particules, des variables du champ et du temps. Nous représenterons celle-ci par $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \theta, t)$, si les particules 1 et 2 sont respectivement l'électron et le positron, et par $\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \theta, t)$, dans l'hypothèse inverse. Ψ et Φ obéissent aux équations

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Big\{ & H_1^{(p)} + H_2^{(p)} - e\left(A_0(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}_1 . \vec{A}(\vec{r}_1)\right) \\ & + e\left(A_0(r_2) + \vec{\alpha}_2 . \vec{A}(\vec{r}_2)\right) + H^{(ch)} \Big\} \Psi \end{aligned} \qquad (4\,a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Big\{ & H_1^{(p)} + H_2^{(p)} + e\left(A_0(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}_1 . \vec{A}(\vec{r}_1)\right) \\ & - e\left(A_0(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_2 . \vec{A}(\vec{r}_2)\right) + H^{(ch)} \Big\} \Phi . \end{aligned} \qquad (4\,b)$$

Pour l'instant, l'une de ces deux équations est superflue, chaque particule conservant son caractère électron ou positron.

Il n'en serait plus de même si l'on ajoutait aux seconds membres de (4*a*) et (4 *b*) des termes dépendant respectivement de Φ et Ψ, ce qui indiquerait qu'un échange de caractère peut se produire entre les particules. L'électron devenant positron et le positron devenant électron. C'est parce que nous serons amenés à envisager une telle éventualité que nous considérons d'emblée les fonctions d'onde Ψ et Φ.

Nous voudrions maintenant tenir compte de la possibilité d'annihilation et de création de paires tout en continuant à n'utiliser que des représentations à énergie positive. Par suite de l'existence de ces phénomènes le nombre de paires n'est plus une intégrale première. Nous représenterons alors l'état du système par un ensemble de fonctions d'onde

$$\Psi^{(0)}(\theta\,;\,t)\,,\quad \Psi^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2\,;\,\theta\,;\,t)\,,\quad \Psi^{(4)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{r}_4\,;\,\theta\,;\,t)\,,\ \ldots \tag{5}$$

obéissant aux équations non homogènes

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{H}^{(0)}\right)\Psi^{(0)} = \\
&\qquad -e\int\left[\mathrm{C}\left(\mathrm{A}_0(\vec{r}_1)+\vec{\alpha}\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}_1)\right)\right]_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,.\,\Psi^{(2)}_{\mu\nu}\,d\tau_1\,d\tau_2 \\
&\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{H}^{(2)}\right)\Psi^{(2)}\right]_{\mu_1\nu_1} = \\
&\qquad -e\left[\left(\mathrm{A}_0(\vec{r}_1)+\vec{\alpha}\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}_1)\right)\mathrm{C}\right]_{\mu_1\nu_1}.\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,.\,\Psi^{(0)} \\
&-e\int\left[\mathrm{C}\left(\mathrm{A}_0(\vec{r}_1)+\vec{\alpha}\,.\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}_1)\right)\right]_{\mu_2\nu_2}\delta(\vec{r}_3-\vec{r}_4)\,.\,\Psi^{(4)}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3\,d\tau_4 \\
&\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{H}^{(4)}\right)\Psi^{(4)}\right]_{\mu_1\nu^1\mu_2\nu_2} = \ldots\ldots\,,
\end{aligned} \tag{6}$$

la sommation étant effectuée sur les indices muets et C étant la matrice I, § 2 (3). $\mathrm{H}^{(2n)}$ est l'hamiltonien d'un système de n électrons et n positrons, numérotés respectivement

$$1\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,n-1 \qquad \text{et} \qquad 2\,,\,4\,,\,\ldots\,.\,n\ :$$

$$\mathrm{H}^{(2n)} = \Sigma\,\mathrm{H}^{(p)} + \Sigma\,\mathrm{H}^{(i)} + \mathrm{H}^{(\mathrm{ch})}$$

Nous exclurons toutes les transitions vers les états d'énergie négative. Dans ces conditions, si les équations (6) n'avaient pas de seconds membres, la suite

$$0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ \ldots\,,\ 0\,,\ \Psi^{(2n)}\,,\ 0\,,\ \ldots$$

représenterait une configuration du système où celui-ci est constitué par un nombre connu et fixe n de paires. Au contraire la présence des seconds membres, considérés comme de petites perturbations, donne lieu à des transitions vers des états où ce nombre n'est plus le même. On peut alors interpréter l'intégrale

$$\int \left|\Psi^{(2n)}\right|^2 d\tau_1\, d\tau_2 \ \ldots\ldots\ d\tau_{2n} \frac{d\,\theta}{2\,\pi}$$

comme la probabilité que la configuration où existent n paires soit réalisée. On peut d'ailleurs regarder $\Psi^{(0)}$, $\Psi^{(2)}$, $\Psi^{(4)}$, ... comme les composantes d'une seule fonction d'onde. L'introduction de l'annihilation et de la création suivant notre formalisme ressemble alors à celle du spin dans la théorie de Pauli, les différents nombres possibles de paires correspondant dans cette image aux différentes orientations possibles du spin.

L'expression des seconds membres des équations (6) a été déterminée de façon à donner pour l'annihilation et la création les mêmes éléments de matrice que la théorie des lacunes (tout au moins dans l'approximation de Born).

Pour le vérifier, considérons par exemple une transition d'annihilation avec émission d'un photon transversal $\vec{k}$. Suivant la théorie des lacunes ce processus est décrit comme une transition effectuée par un électron d'un état d'énergie positive $\psi_a(\vec{r}_1)$ vers un état d'énergie négative non occupé $\psi_b(\vec{r}_1)$ le champ passant simultanément de l'état fondamental $\Gamma_0 = 1$ à l'état excité $\Gamma_1(\theta_{\tau\vec{k}})$. L'élément de matrice correspondant s'écrit:

$$\mathrm{H}_{ba} = -\,e \int \Gamma_1^*(\theta_{\tau\vec{k}})\ \psi_b^*(\vec{r}_1)\ \left(\vec{\alpha}\,.\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}_1)\right)\,.\ \psi_a(\vec{r}_1)\,.\,d\tau_1\ \frac{d\,\theta_{\tau\vec{k}}}{2\,\pi}$$

ou encore, en introduisant le spineur conjugué

$$H_{ba} = -e\int \Gamma_1^*(\theta_{\tau\vec{k}})\,\varphi_b(\vec{r_1})\,\left(C\vec{\alpha}\,\vec{A}(\vec{r_1})\right).\,\psi_a(\vec{r_1})\,.\,d\tau_1\,\frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}$$

$$= -e\int \Gamma_1^*(\theta_{\tau\vec{k}})\,.\,\left(C\vec{\alpha}.\vec{A}(\vec{r_1})\right)_{\mu\nu}\delta(\vec{r_1}-\vec{r_2})\,.\,\psi_{a\mu}(\vec{r_1})\,\varphi_{b\nu}(\vec{r_2})\,d\tau_1\,d\tau_2\,\frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}\,.$$

Sous cette forme H_{ba} fait intervenir les fonctions d'onde de l'état final, $\Gamma_1(\theta)$, et de l'état initial, $\psi_a(\vec{r_1})\,\varphi_b(\vec{r_2})$, ainsi qu'un terme d'interaction contenant la fonction $\delta(\vec{r_1}-\vec{r_2})$ de Dirac précédemment définie (I, § 1 (12)). Cette fonction indique que l'électron et le positron doivent se trouver au même endroit pour pouvoir s'annihiler.

Si la transition était accompagnée de l'absorption d'un photon, l'élément de matrice s'écrirait de même sous la forme

$$-\int \Psi^{(0)*}\,.\,e\left(C\vec{\alpha}.\vec{A}(\vec{r_1})_{\mu\nu}\,\delta(\vec{r_1}-\vec{r_2})\,.\,\Psi^{(2)}_{\mu\nu}(\vec{r_1},\vec{r_2},\theta)\,d\tau_1\,d\tau_2\,\frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}\,.$$

On obtient de façon analogue les éléments de matrice relatifs à la création d'une paire avec émission ou absorption d'un photon transversal. Pour les photons longitudinaux, les calculs sont tout à fait semblables. Ce sont là les seuls éléments de matrice dont nous aurons besoin. Ils interviennent, comme on s'en rend compte aisément, dans l'application de la méthode des perturbations à la résolution des équations (6). Les différences d'énergie qui figurent dans les dénominateurs des coefficients de Fourier des fonctions perturbées sont les mêmes que dans la théorie des lacunes. En effet, suivant celle-ci, l'annihilation d'un électron d'énergie w avec un positron représenté par un état d'énergie négative, $-w'$, non occupé, correspond à une diminution d'énergie $w-(-w')$, tandis que, suivant notre représentation à énergies positives, cette différence est $(w+w')-0$.

Pour ne pas compliquer l'écriture, nous n'avons pas cherché à symétriser les seconds membres des équations (6). En fait, une telle symétrisation est nécessaire si l'on veut qu'il ne puisse jamais apparaître que des fonctions d'onde antisymétriques par rapport aux particules de même signe. Notons la

différence essentielle qui existe à ce propos entre les équations non homogènes (6) et les équations homogènes utilisées dans la mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules identiques. Ces dernières admettent des solutions symétriques et antisymétriques et on peut choisir librement l'une ou l'autre de ces catégories, suivant la statistique à laquelle obéissent les particules étudiées, puisque la symétrie de la fonction d'onde demeure automatiquement invariable au cours du temps. Au contraire les équations non homogènes (6) peuvent être symétrisées de façon à n'admettre que des solutions symétriques ou que des solutions antisymétriques; de plus il est nécessaire de les écrire sous l'une ou l'autre de ces formes si l'on veut que la symétrie des fonctions d'onde ne puisse se modifier d'elle-même.

§ 2. — L'INTERACTION MUTUELLE DE DEUX ÉLECTRONS.

La formule de Møller.

Considérons le système formé par deux électrons et négligeons tout d'abord tous les termes d'interaction. Son état peut alors être représenté par une somme d'ondes planes $\psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Introduisons maintenant l'interaction avec le champ et développons la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \theta)$ suivant les fonctions propres non perturbées des particules et du champ; la partie indépendante des θ constitue en première approximation la fonction d'onde du système matériel dans une théorie purement mécanique. Elle est égale à la fonction d'onde non perturbée augmentée des perturbations dues aux interactions avec les ondes longitudinales et transversales. Ces interactions ne conduisent qu'au second ordre à des termes perturbés indépendants des θ. Ceux-ci peuvent s'écrire sous la forme:

$$\sum_F \frac{V_{FA}}{E_A - E_F} \psi_F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) , \tag{1}$$

où l'élément de matrice du second ordre V_{FA} a pour expression:

$$V_{FA} = \sum_I \frac{H^{(i)}_{FI} H^{(i)}_{IA}}{E_A - E_I} . \tag{2}$$

$H_{IA}^{(i)}$ et $H_{FI}^{(i)}$ sont respectivement les éléments de matrice relatifs à l'émission d'un photon virtuel par l'une des particules et à l'absorption subséquente de ce photon par l'autre. E_A, E_I et E_F désignent les énergies de l'état initial A, de l'état intermédiaire I et de l'état final F. Nous allons évaluer V_{FA} en choisissant, comme fonctions non perturbées, un systèmes d'ondes planes orthogonales à l'intérieur du cube L^3. Dans ce cas, $H_{IA}^{(i)}$ et $H_{FI}^{(i)}$ ne sont différents de zéro que s'il y a conservation de l'impulsion totale des particules et du champ, lors de chacune des transitions virtuelles correspondantes. Les états A et F ont donc la même impulsion totale et l'on peut dire que V_{FA} correspond à la transmission d'une certaine impulsion d'une particule à l'autre, par l'intermédiaire du champ. En première approximation, V_{FA} joue le même rôle en électrodynamique quantique que l'élément de matrice de l'interaction coulombienne dans la théorie de Schrödinger.

Nous allons maintenant évaluer V_{FA}. Pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous laisserons provisoirement de côté la symétrisation de la fonction d'onde et nous écrirons

$$\psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{01}(\vec{r}_1)\,\psi_{02}(\vec{r}_2) \;; \qquad \psi_F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\,. \tag{3}$$

On obtient alors

$$V_{FA} = V_{FA}^{(\tau)} + V_{FA}^{(\lambda)} + V_{FA}^{(0)} \tag{4}$$

$$V_{FA}^{(\tau)} = -\,S \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \left\{ \frac{(\psi_2^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\tau\vec{k}}\psi_{02})(\psi_1^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\tau\vec{k}}^{+}\psi_{01})}{\omega_k + \omega_1 - \omega_{01}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\psi_1^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\tau\vec{k}'}\psi_{01})(\psi_2^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\tau\vec{k}'}^{+}\psi_{02})}{\omega_{k'} + \omega_2 - \omega_{02}} \right\} \tag{5 a}$$

$$V_{FA}^{(\lambda)} = -\sum_{\vec{k},\vec{k}'} \left\{ \frac{(\psi_2^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\lambda\vec{k}}\psi_{02})(\psi_1^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\lambda\vec{k}}^{+}\psi_{01})}{\omega_k + \omega_1 - \omega_{01}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\psi_1^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\lambda\vec{k}'}\psi_{01})(\psi_2^* e\vec{\alpha}\vec{A}_{\lambda\vec{k}'}^{+}\psi_{02})}{\omega_{k'} + \omega_2 - \omega_{02}} \right\} \tag{5 b}$$

$$V_{FA}^{(0)} = -\sum_{\vec{k},\vec{k}'} \left\{ \frac{(\psi_2^* e A_{0\vec{k}}\psi_{02})(\psi_1^* e A_{0\vec{k}}^{+}\psi_{01})}{-\omega_k + \omega_1 - \omega_{01}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\psi_1^* e A_{0\vec{k}'}\psi_{01})(\psi_2^* e A_{0\vec{k}'}^{+}\psi_{02})}{-\omega_{k'} + \omega_2 - \omega_{02}} \right\} \tag{5 c}$$

La première et la seconde partie de chacune de ces sommes correspondent respectivement aux deux processus suivants:

1° Un photon virtuel (transversal ou longitudinal) est émis par la particule 1 et absorbé par la particule 2.
2° Un photon virtuel (transversal ou longitudinal) est émis par la particule 2 et est absorbé par la particule 1.

Les seuls termes non nuls de ces séries sont ceux pour lesquels

$$\frac{h}{2\pi}\vec{k} = \vec{p}_{01} - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_{02} - \vec{p}_2) = -\frac{h}{2\pi}\vec{k}', \qquad (6)$$

Considérons le cas où l'on a $E_A = E_F$, c'est-à-dire:

$$w_{01} - w_1 = -(w_{02} - w_2) \qquad (7)$$

En écrivant les fonctions d'onde de chacune des particules sous la forme

$$\psi(\vec{r}) = u\, e^{\frac{2\pi i}{h}\vec{p}\cdot\vec{r}} \qquad (8)$$

et en effectuant les sommations sur les vecteurs de polarisation dans les séries (5) nous obtenons la formule de Møller [1]

$$V_{FA} = \frac{4\pi}{L^3}\,\frac{e^2\left\{(u_1^* u_{01})(u_2^* u_{02}) - (u_1^*\vec{\alpha}u_{01})(u_2^*\vec{\alpha}u)\right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\left\{(p_{01}-p_1)^2 - \left(\frac{w_{01}-w_1}{w_k}\right)^2\right\}}. \qquad (9)$$

Cette formule donne les éléments de matrice de l'interaction de deux électrons pour les transitions entre états de même énergie, éléments qui interviennent notamment dans l'étude des phénomènes de diffusion élastique. V_{FA} constitue une extension relativiste de l'élément de matrice de l'interaction coulombienne utilisée dans la théorie élémentaire.

Pour mettre en évidence le rôle joué dans cette interaction généralisée par les champs propres des deux particules, désignons par $A_0^{(1)}$, $\vec{A}^{(1)}$ et $A_0^{(2)}$, $\vec{A}^{(2)}$ leurs potentiels respectifs. En compa-

[1] Møller, *Annalen der Physik*, *14*, 1932, p. 531.

rant les expressions I, § 4 (9 et 6) des éléments de matrice de ces potentiels aux formules (5), on voit que l'élément de matrice de Møller peut s'écrire sous la forme

$$V_{FA} = \int \psi_F^* (\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\, \psi_A (\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (10)$$

en posant

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{1}{2} e \left\{ \left(A_0^{(2)}(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}_1 . \vec{A}^{(2)}(\vec{r}_1)\right) + \left(A_0^{(1)}(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_2 . \vec{A}^{(1)}(\vec{r}_2)\right) \right\} \qquad (11)$$

$$= - e \left(A_0^{(2)}(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_1 . \vec{A}^{(2)}(\vec{r}_1)\right) = - e \left(A_0^{(1)}(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_2 . \vec{A}^{(1)}(\vec{r}_2)\right) .$$

Pour évaluer la fonction d'interaction $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ nous avons besoin de l'expression des opérateurs potentiels qui y figurent. Comme nous ne considérons ici que des transitions entre états d'énergie positive nous pouvons utiliser les opérateurs I, § 4 (13). On peut les remplacer par les potentiels $(A_0^{(1)}, \vec{A}^{(1)})$, $(A_0^{(2)}, \vec{A}^{(2)})$ qui se rapportent aux parties longitudinale et transversale de chacun des deux champs (cf. I, § 4, 4). En effet, en groupant séparément les termes de V_{FA} qui proviennent de l'une et de l'autre de ces parties, on obtient

$$V_{FA}^{(\lambda)} + V_{FA}^{(0)} = \int \psi_F^* V_0\, \psi_A\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (12\,a)$$

$$V_{FA}^{(\tau)} = \int \psi_F^* V_\tau\, \psi_A\, d\tau_1\, d\tau_1 \qquad (12\,b)$$

avec

$$V_0 = -\frac{1}{2} e \left(A_0'^{(1)}(\vec{r}_2) + A_0'^{(2)}(\vec{r}_1)\right) \qquad (13\,a)$$

$$V_\tau = -\frac{1}{2} e \left(\vec{\alpha}_2 . \vec{A}'^{(1)}(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_1 . \vec{A}'^{(2)}(\vec{r}_1)\right) \qquad (13\,b)$$

La vérification des formules (12 *a*) et (13 *a*) se fait de la même façon que celle de la relation I, § 4 (8). L'interaction coulombienne V_0 ne présente en fait qu'une analogie purement formelle avec l'interaction électrostatique de deux charges immo-

biles (cf. I, § 1, 6). Elle s'applique rigoureusement à toutes les transitions ainsi que l'a montré Fermi [1]. Pour le voir, il suffit de reprendre la démonstration classique de cette formule (I, § 1, 6) en tenant compte des relations de commutation des coefficients de Fourier [I, § 3 (10 *a*)] du champ, lesquelles ne modifient pas le résultat final.

L'interaction V_0 représente l'énergie de superposition des champs longitudinaux des deux particules, tandis que l'interaction V_τ est égale, comme en théorie classique, à l'énergie de superposition des champs transversaux changée de signe. En effet celle-ci est donnée par la formule I, § 1 (44 *b*) et en introduisant les expressions I, § 4 (6) des éléments de matrice des $c_{\tau\vec{k}}$ et $c^{+}_{\tau\vec{k}}$, la relation (5 *a*) s'écrit :

$$V^{(\tau)}_{FA} = - S \sum_{\vec{k}} \left\{ \left(c^{(1)+}_{\tau\vec{k}}\right)_{1,01} \left(c^{(2)}_{\tau\vec{k}}\right)_{2,02} + \left(c^{(2)+}_{\tau,-\vec{k}}\right)_{2,02} \left(c^{(1)}_{\tau,-\vec{k}}\right)_{1,01} \right\} \omega_k \tag{14}$$

Notons que les formules (13 *b*) et (14) ont été obtenues dans le cas où $E_A - E_F = 0$. Si $E_A - E_F \neq 0$, les éléments de matrice du second ordre ne peuvent plus en général être identifiés aux éléments de matrice de l'interaction. Ceci résulte notamment du fait que les matrices $\| V^{(\tau)}_{FA} \|$, $\| V^{(\lambda)}_{FA} \|$ et $\| V^{(0)}_{FA} \|$ formées au moyen des éléments (5) ne sont pas hermitiennes et que la somme des deux dernières ne correspond pas à l'opérateur V_0 exact (13 *a*).

Toutefois, si nous nous bornons à considérer le cas de vitesses non relativistes, ces difficultés disparaissent et les formules (13 *b*) et (14) restent applicables pour toutes les transitions entre états d'énergie positive. Nous allons dans ce cas transformer l'expression de V_τ de façon à mettre en évidence le magnétisme du spin, ainsi que nous l'avons fait lors du calcul du champ propre de l'électron. A cette fin, les coefficients de Fourier des densités de courant intervenant dans les expressions (5 *a*) seront décomposés selon les formules I, § 4 (14 *a*) et l'on fera

[1] E. Fermi, *Reviews of Modern Physics*, *4* (1932).

les mêmes approximations que dans ce paragraphe. On obtient ainsi:

$$V_\tau = V_l + V_{\sigma l} + V_\sigma \tag{15}$$

$$V_l = -e^2 \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} S \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\vec{p}_1}{mc} . \vec{a}_{\vec{k}}\right)\left(\frac{\vec{p}_2}{mc} . \vec{a}_{\vec{k}}\right) \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \tag{16 a}$$

$$V_{\sigma l} = e\mu \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} S \sum_{\vec{k}} \left\{ \left(\frac{\vec{p}_2}{mc} . \vec{a}_{\vec{k}}\right) ([\vec{\sigma}_1, \vec{ik}] . \vec{a}_k) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\vec{p}_1}{mc} . \vec{a}_{\vec{k}}\right) ([\vec{\sigma}_2, \vec{ik}] . \vec{a}_{\vec{k}}) \right\} \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \tag{16 b}$$

$$V_\sigma = \mu^2 \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} S \sum_{\vec{k}} ([\vec{\sigma}_1, \vec{ik}] . \vec{a}_{\vec{k}}) ([\vec{\sigma}_2, \vec{ik}] . \vec{a}_{\vec{k}}) \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \tag{16 c}$$

En comparant ces formules à l'expression I, § 4 (44 *b*) de l'énergie de superposition et aux développements en série I, § 4 (16 *a* et 16 *d*) des potentiels $\vec{A}_{c\tau}$ et $\vec{A}_\sigma$, ont voit que V_l correspond à l'énergie de superposition (changée de signe) des champs magnétiques de Laplace des deux électrons, $V_{\sigma l}$ à celle du champ de Laplace de chacun d'eux avec le champ de spin de l'autre et V_σ à celle des deux champs de spin.

Enfin, effectuons les sommations sur les deux directions du vecteur de polarisation $\vec{a}_{\vec{k}}$ et sur tous les vecteurs $\vec{k}$ au moyen des formules I, § 1 (12, 48 *b* et 53).

En rassemblant tous les résultats nous trouvons que l'interaction globale de deux électrons animés de vitesses non relativistes est la somme des interactions partielles indiquées dans le tableau de la page suivante.

A part le dernier terme de l'interaction spin-spin, dont la signification sera indiquée dans un instant, ces expressions sont formellement identiques à celles de l'électrodynamique classique [cf. I, § 1 (38 et 47 *b*)] et ont été introduites par correspondance en théorie quantique par Heisenberg [1] et Breit [2].

[1] Heisenberg, *Zeit. für Physik*, *39*, 1926, 499.
[2] Breit, *Physical Review*, *34*, 1929, p. 564-5.

Interaction électrique coulombienne	$V_0 = \frac{e^2}{r}$
Interactions magnétiques	
Orbite — Orbite	$V_l = -\frac{1}{2} e^2 \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\vec{p}_1}{mc} \frac{\vec{p}_2}{mc} \right) + \frac{1}{r_{12}^3} \left(\vec{r}_{12} \left(\vec{r}_{12} \frac{\vec{p}_1}{mc} \right) \frac{\vec{p}_2}{mc} \right) \right\}$
Orbite — Spin et Spin — Orbite	$V_{\sigma l} = - e \mu \left\{ \left(\frac{[\vec{\sigma}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_2]}{r_{12}^3} \cdot \frac{\vec{p}_2}{mc} \right) + \left(\frac{[\vec{\sigma}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1]}{r_{12}^3} \cdot \frac{\vec{p}_1}{mc} \right) \right\}$
Spin — Spin	$V_3 = \mu^2 \left\{ \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{8\pi}{3} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r_{12}) \right\}$

(17)

Toutefois cette dernière méthode n'est pas entièrement univoque car elle ne permet pas de déterminer avec certitude l'ordre dans lequel doivent être écrits les différents opérateurs qui ne commutent pas comme les grandeurs classiques auxquelles ils correspondent. Cet ordre est ici fixé sans ambiguïté (à part les permutations qui fournissent des opérateurs équivalents) et il est intéressant de noter qu'il coïncide avec celui que Breit a été amené à considérer comme le plus vraisemblable après discussions des divers résultats obtenus par correspondance.

Quant au dernier terme de l'interaction spin-spin il a également une origine classique; nous l'avons déjà rencontré en évaluant l'énergie de superposition moyenne de deux dipôles magnétiques. D'après l'interprétation que nous avons donnée alors des différents termes de cette énergie, V_σ résulte de l'action sur le spin d'un électron du champ moyen dû au spin de l'autre électron, champ égal à l'induction si l'on admet que le magnétisme du spin est analogue à celui d'un petit circuit électrique. Les deux premiers termes de V_σ représentent l'interaction de deux dipôles pontuels, tandis que le dernier donne la contribution des petites distances ($r \lesssim \Lambda$) pour lesquelles le champ de spin diffère notablement de celui d'un dipôle ponc-

tuel. Ce nouveau terme devrait, en toute rigueur, être introduit dans le calcul des niveaux singulets des atomes à deux électrons. Un terme analogue a été trouvé par Fermi dans la théorie de la structure hyperfine.

Enfin rappelons que le facteur $8\pi/3$ n'est valable que si l'intégrale impropre de V_σ est évaluée par un passage à la limite bien déterminé, consistant à isoler le pôle $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ par une sphère de rayon infiniment petit (cf. I, § 1, 6; application),

Remarques.

I. Nous avons jusqu'ici laissé de côté la symétrisation des fonctions d'onde de deux électrons. Il est aisé de voir qu'en tenant compte de celle-ci la formule de Møller devient::

$$V_{FA} = \frac{4\pi}{L^3} \frac{e^2 \left\{ (u_1^* u_{01})(u_2^* u_{02}) - (u_1^* \vec{\alpha} u_{01})(u_2^* \vec{\alpha} u_{02}) \right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left\{ (\vec{p}_1 - \vec{p}_{01})^2 - \left(\frac{w_1 - w_{01}}{c}\right)^2 \right\}}$$
$$- \frac{4\pi}{L^3} \frac{e^2 \left\{ (u_2^* u_{01})(u_1^* u_{02}) - (u_2^* \vec{\alpha} u_{01})(u_1^* \vec{\alpha} u_{02}) \right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left\{ (\vec{p}_2 - \vec{p}_{01})^2 - \left(\frac{w_2 - w_{01}}{c}\right)^2 \right\}} \qquad (18)$$

Toutefois on s'aperçoit sans difficulté que les expressions des interactions indiquées dans le tableau précédent restent applicables aux fonctions antisymétrisées.

II. Nous n'avons pas tenu compte du cas où le photon virtuel est absorbé par la particule qui l'a émis. L'élément de matrice V_{FA} relatif à ce processus est égal à l'énergie de perturbation de la particule supposée isolée; il représente également la différence entre les énergies des parties longitudinales et transversales de son champ propre. Ces énergies, qui sont d'ailleurs divergentes, se trouvent déjà comprises dans la masse de la particule. En les supprimant, pour passer de l'électrodynamique quantique à la mécanique ondulatoire non relativiste, nous faisons disparaître une contradiction qui se manifeste déjà en théorie classique lorsqu'on cherche à écrire sous forme hamiltonienne les équations du champs et du mouvement d'un système de particules (cf. I, § 1, 6).

§ 3. — L'INTERACTION ENTRE L'ÉLECTRON ET LE POSITRON.

1. *L'annihilation virtuelle.*

Nous avons vu précédemment (II, § 1) qu'en utilisant que des états d'énergie positive, il était possible de décrire l'état du système électron-positron au moyen d'une fonction d'onde à énergie positive dépendant seulement des coordonnées des deux particules et obéissant à l'équation II, § 1 (4 *a*), à condition toutefois de négliger la possibilité d'annihilation et de création de paires. Cette possibilité a été introduite ensuite comme une petite perturbation, en substituant à l'équation (4 *a*) le système d'équations (6).

Dans la première hypothèse, l'interaction entre l'électron et le positron diffère, uniquement par le signe, de celle qui existe entre deux électrons. Par conséquent, les interactions dues aux champs de Coulomb et de spin sont données par les formules II, § 2 (17), changées de signe.

D'autre part, si l'on tient compte de la possibilité d'annihilation et de création de paires, on voit apparaître deux nouveaux phénomènes que nous appellerons respectivement annihilations réelle et virtuelle. Le premier est constitué par la disparition définitive de la paire avec émission de deux photons au moins si le système est isolé, c'est-à-dire s'il n'est soumis à aucune action extérieure. Le deuxième phénomène correspond aux deux processus suivants:

1° L'électron et le positron s'annihilent en émettant un photon virtuel qui est ensuite absorbé en recréant une nouvelle paire.

2° La deuxième paire est créée en premier lieu avec émission d'un photon virtuel qui est ensuite absorbé lors de l'annihilation de la première paire.

Nous allons maintenant calculer l'élément de matrice du second ordre relatif à ce phénomène. Désignons par

$$\psi_{01}(\vec{r}_1, t) = u_{01} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_{01}\vec{r}_1 - w_{01}t)}}{\sqrt{L^3}} \; ; \quad \psi_1(\vec{r}_1{}', t) = u_1 \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_1\vec{y}_1{}' - w_1 t)}}{\sqrt{L^3}}$$
$$\varphi_{02}(\vec{r}_2, t) = u_{02} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_{02}\vec{r}_2 - w_{02}t)}}{\sqrt{L^3}} \; ; \quad \varphi_1(\vec{r}_2{}', t) = u_2 \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_2\vec{r}_2{}' - w_2 t)}}{\sqrt{L^3}} \tag{1}$$

les fonctions d'onde de l'électron et du positron dans l'état initial, d'une part, et dans l'état final, d'autre part.

Celles du système électron-positron, dans chacun de ces deux états, s'écrivent respectivement:

$$\psi^A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi^{0A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_{01}+w_{02})t} \; ;$$
$$\psi^F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi^{0F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_1+w_2)t} \tag{2 a}$$

avec

$$\psi^A_{\mu\nu} = \psi_{01,\mu}\, \varphi_{02,\nu} \; ; \quad \psi^F_{\mu\nu} = \psi_{1,\mu}\, \varphi_{2,\nu} \tag{2 b}$$

Les éléments de matrice correspondant à l'annihilation de la première paire avec émission d'un photon virtuel transversal $\vec{k}$ et à l'absorbtion de ce photon avec création d'une nouvelle paire ont pour expression

$$H_{IA} = \int \Gamma_1^*(\theta_{\tau\vec{k}}) \,.\, e\left\{ C(A_0 + \vec{\alpha}.\vec{A}) \right\}_{\mu\nu} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,.\, \psi^{0A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}$$
$$= \left(e\left\{ C\vec{\alpha}.\vec{A}^+_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1) \right\}_{\mu\nu} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,.\, \psi^{0A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right) \tag{3 a}$$

$$H_{FI} = \int \psi^{0F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ (A_0 + \vec{\alpha}\vec{A})\, C \right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}') \,.\, \Gamma_1(\theta_{\tau\vec{k}})\, d\tau_1'\, d\tau_2' \frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}$$
$$= \left(\psi^{0F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ \vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1) \,.\, \vec{\alpha} C \right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}') \right) \tag{3 b}$$

Ces éléments ne sont différents de zéro que si l'on a:

$$\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \frac{h}{2\pi}\vec{k} \tag{4}$$

La différence d'énergie entre l'état initial et l'état intermédiaire est

$$E_A - E_I = w_{01} + w_{02} - w_k \ . \tag{5}$$

D'autre part, les éléments de matrice relatifs à l'émission et à l'absorption subséquente d'un photon virtuel transversal $\vec{k}'$, suivant le second processus, s'écrivent:

$$H_{IA} = \int \psi^{0A*}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, \psi^{0F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}')\, \Gamma^*_1(\theta_{\tau\vec{k}'}) \,.\, e\left\{ (A_0 + \vec{\alpha}\vec{A})C \right\}_{\varkappa\lambda}$$

$$\delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}') \,.\, \psi^{0A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \,.\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_1'\, d\tau_2'\, \frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}$$

$$= \left(\psi^{0F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ \vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}'} \,.\, \vec{\alpha} C \right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\right) \tag{3' a}$$

$$H_{FI} = \int \psi^{0F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ C(A_0 + \vec{\alpha}\vec{A}) \right\}_{\mu\nu} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$.\, \psi^{0A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, \psi^{0F}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}')\, \Gamma_1(\theta_{\tau\vec{k}}) \,.\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_1'\, d\tau_2'\, \frac{d\theta_{\tau\vec{k}}}{2\pi}$$

$$= \left(e\left\{ C\vec{\alpha} \,.\, \vec{A}_{\tau\vec{k}'}(\vec{r}_1) \right\}_{\mu\nu} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,.\, \psi^{0A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right) \tag{3' b}$$

Pour que H_{IA} et H_{FI} ne soient pas nuls, il faut maintenant que

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = -\frac{h}{2\pi}\vec{k}' \tag{4'}$$

La différence d'énergie entre l'état initial et l'état intermédiaire est ici:

$$E_A - E_I = -w_1 - w_2 - w_k \tag{5'}$$

Pour les photons virtuels longitudinaux, les calculs sont tout à fait analogues. On voit que les impulsions des photons émis et absorbés au cours des processus d'annihilation et de création virtuelles de paires sont égales à $\pm$ l'impulsion totale du système électron-positron, alors que, dans les processus d'interaction sans annihilation, elles représentaient, au signe près, l'impulsion échangée par les deux particules.

En rassemblant les résultats, on trouve l'élément de matrice du second ordre

$$V_{FA} = V_{FA}^{(\tau)} + V_{FA}^{(\lambda)} + V_{FA}^{(0)} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} V_{FA}^{(\tau)} = S\,\big(\psi_{\varkappa\lambda}^{0F*}(\vec{r}_1{}'\,\vec{r}_2{}')\,.\,e\{\vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\,.\,\vec{\alpha}C\}_{\varkappa\lambda}\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')\big) \\ \big(e\{C\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1)\}_{\mu\nu}\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,.\,\psi_{\mu\nu}^{0A}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\big) \\ \left\{\frac{1}{w_{01}+w_{02}-w_k}+\frac{1}{-w_1\;-w_2\;-w_k}\right\} \end{aligned} \tag{7 a}$$

$$\begin{aligned} V_{FA}^{(\lambda)} = \big(\psi_{\varkappa\lambda}^{0F*}(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}')\,.\,e\{\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\,.\,\vec{\alpha}C\}_{\varkappa\lambda}\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')\big) \\ \big(e\{C\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^{+}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1)\}_{\mu\nu}\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,.\,\psi_{\mu\nu}^{0A}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\big) \\ \left\{\frac{1}{w_{01}+w_{02}-w_k}+\frac{1}{-w_1\;-w_2\;-w_k}\right\} \end{aligned} \tag{7 b}$$

$$\begin{aligned} V_{FA}^{(0)} = \big(\psi_{\varkappa\lambda}^{0F*}(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}')\,.\,e\{A_{0\vec{k}}(r_1')\,C\}_{\varkappa\lambda}\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')\big) \\ \big(e\{CA^{+}_{0\vec{k}}(\vec{r}_1)\}_{\mu\nu}\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,.\,\psi_{\mu\nu}^{0A}(\vec{r}_1,\vec{r}_3)\big) \\ \left\{\frac{1}{x_{01}+w_{02}+w_k}+\frac{1}{-w_1\;-w_2\;+w_k}\right\} \end{aligned} \tag{7 c}$$

Nous nous restreindrons comme précédemment aux transitions entre états de même énergie:

$$w_{01} + w_{02} = w_1 + w_2 \tag{8}$$

Dans ce cas V_{FA} peut être considéré comme l'élément de matrice d'un opérateur hermitien représentant une nouvelle interaction due aux phénomènes d'annihilation et création de paires. En tenant compte des formules (1) et (8), on peut écrire V_{FA} sous la forme :

$$V_{FA} = \frac{4\pi}{L^3}\,\frac{e^2\{(u^*_{1,\varkappa}v^*_{2,\lambda}C_{\varkappa\lambda})(C_{\mu\nu}u_{01,\mu}v_{02,\nu})-(u^*_{1,\varkappa}v^*_{2,\lambda}\{\vec{\alpha}C\}_{\varkappa\lambda})\,.\,(\{C\vec{\alpha}\}_{\mu\nu}u_{01,\mu}v_{02,\nu})\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\left\{(\vec{p}_{01}+\vec{p}_{02})^2-\left(\frac{w_{01}+w_{02}}{c}\right)^2\right\}} \tag{9}$$

Cet élément de matrice s'ajoute à celui qui corresponds à un échange d'impulsion entre les deux particules sans qu'il inter-

vienne de phénomènes d'annihilation et de création de paires. Nous allons montrer que ces deux éléments de matrice sont équivalents à ceux qu'on obtient en appliquant la formule de Møller à la théorie des lacunes.

Suivant cette théorie l'existence d'une paire est caractérisée par le fait qu'un seul état d'énergie positive est occupé, tandis que ceux d'énergie négative le sont tous sauf un. Désignons par

$$\left\{\begin{aligned} \psi_{01}(\vec{r}_1) &= u_{01}\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_{01}\vec{r}_1 - w_{01}t)}}{\sqrt{L^3}} \\ \psi_{02}(\vec{r}_2) &= u_{02}\frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_{02}\vec{r}_2 - w_{02}t)}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \psi_1(\vec{r}_1{}') &= u_1\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_1\vec{r}_1{}' - w_1 t)}}{\sqrt{L^3}} \\ \psi_2(\vec{r}_2{}') &= u_2\frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_2\vec{r}_2{}' - w_2 t)}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

la fonction d'onde de l'état d'énergie positive occupé (électron) et celle de la lacune (positron) dans l'état initial d'une part et dans l'état final d'autre part. Nous avons écrit les fonctions d'onde à énergie négative de telle sorte que w_{02}, $\vec{p}_{02}$ et w_2, $\vec{p}_2$ représentent l'énergie (positive) et l'impulsion du positron.

En toute rigueur l'état du système est décrit par une fonction d'onde antisymétrique dépendant des coordonnées de tous les électrons d'énergie positive ou négative. Toutefois les états qui restent occupés au cours des transitions que nous envisageons ne jouent aucun rôle dans le calcul des éléments de matrice relatifs à celles-ci. Il suffit donc de considérer le système constitué par les deux électrons qui effectuent des transitions d'annihilation et de création de paires. Avant le processus, ceux-ci se trouvent respectivement dans les états d'énergie positive et négative ψ_{01} et ψ_2 et après le processus dans les états d'énergie négative et positive ψ_1 et ψ_{02}.

En raison de l'antisymétrie de la fonction d'onde de ces deux électrons, la formule de Møller doit être utilisée sous la forme II, § 2 (18) en remarquant que pour l'application actuelle les indices 02 et 2 doivent être permutés et qu'il faut remplacer w_{02}, $\vec{p}_{02}$ et w_2, $\vec{p}_2$ par $-w_2$, $-\vec{p}_2$ et $-w_{02}$, $-\vec{p}_{02}$.

Cette formule s'écrit alors:

$$U_{FA} = \frac{4\pi}{L^3} \frac{e^2\left\{ (u_1^* u_{01})(u_{02}^* u_2) - (u_1^* \vec{\alpha} u_{01})(u_{02}^* \vec{\alpha} u_2) \right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left\{ (\vec{p}_{01} - \vec{p}_1)^2 - \left(\frac{w_{01} - w_1}{c}\right)^2 \right\}}$$

$$- \frac{4\pi}{L^3} \frac{e^2\left\{ (u_{02}^* u_{01})(u_1^* u_2) - (u_{02}^* \vec{\alpha} u_{01})(u_1^* \vec{\alpha} u_2) \right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left\{ (\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02})^2 - \left(\frac{w_{01} + w_{02}}{c}\right)^2 \right\}} \qquad (11)$$

L'élément de matrice U_{FA} peut servir à étudier la diffusion des positrons par les électrons. Cette application de la formule de Møller a été donnée par Bhabha [1].

Afin de nous débarrasser des états d'énergie négative, il suffit d'utiliser les spineurs conjugués

$$\begin{aligned} v_{02}\, e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_{02}\vec{r}_2 - w_{02} t)} &= C\left(u_{02}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_{02}\vec{r} - w_{02} t)}\right)^* \\ v_2\, e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_2\vec{r}_2{}' - w_{02} t)} &= C\left(u_2\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}_2\vec{r}_2{}' - w_2 t)}\right)^* . \end{aligned} \qquad (12\,a)$$

En introduisant dans la formule (11)

$$\begin{aligned} v_{02} &= C u_{02}^* \\ v_2 &= C u_2^* \end{aligned} \qquad (12\,b)$$

il vient

$$U_{FA} = \frac{4\pi}{L^3} \frac{e^2\left\{ (u_1^* u_{01})(v_2^* v_{02}) - (u_1^* \vec{\alpha} u_{01})(v_2^* \vec{\alpha} v_{02}) \right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left\{ (\vec{p}_{01} - \vec{p}_1)^2 - \left(\frac{w_{01} - w_1}{c}\right)^2 \right\}}$$

$$- \frac{4\pi}{L^3} \frac{e^2\left\{ (u_{1,\varkappa}^* v_{2,\lambda}^* C_{\varkappa\lambda})(u_{01,\mu} v_{01,\nu} C_{\mu\nu}) - (u_{1,\varkappa}^* v_{2,\nu}^* \{\vec{\alpha} C\}_{\varkappa\lambda})(\{C\vec{\alpha}\}_{\mu\nu} u_{01,\mu} v_{02,\nu}) \right\}}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left\{ (\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02})^2 - \left(\frac{w_{01} + w_{02}}{c}\right)^2 \right\}} \qquad (13)$$

Sous cette forme l'élément de matrice U_{FA}, qui découle de la théorie des lacunes, peut être comparé à celui qu'on obtient en utilisant notre représentation à énergie positive; ce dernier est égal à la somme des expressions § 2 (9) changées de

[1] H. J. Bhabha, *Proc. Roy. Soc.* (A), *154*, p. 195 (1936).

signe et § 3 (9). On voit que les deux éléments de matrice sont identiques sauf que leurs signes sont opposés. Nous ne pouvons pas dire à priori qu'on aboutit là à des résultats incompatibles, étant donné que pour représenter une paire on emploie d'un côté, les coordonnées d'une infinités d'électrons et, de l'autre, celles de l'électron et du positron seulement. Cette difficulté est intimement liée à celle que l'on rencontre déjà dans la théorie du champ propre du positron lorsqu'on cherche à utiliser la méthode des lacunes (cf. I, § 4).

En ce qui concerne les phénomènes de diffusion étudiés par Bhabha les deux éléments de matrice conduisent au même résultat puisque c'est le carré de leur module qui intervient alors.

2. *L'interaction* V_α *et la superposition des champs* α.

Si nous continuons à ne considérer que les transitions entre états de même énergie, l'élément de matrice V_{FA} relatif aux phénomènes d'annihilation et de création virtuelles de paires peut encore s'écrire sous la forme

$$V_{FA} = \int \psi^{F*}(\vec{r}_1', \vec{r}_2')\, \mathcal{V}_\alpha(\vec{r}_1', \vec{r}_2', \vec{r}_1, \vec{r}_2)\, \psi^A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1' d\tau_2' d\tau_1 d\tau_2 \ , \tag{14}$$

dans laquelle $\mathcal{V}_\alpha$ désigne l'opérateur hermitien:

$$\mathcal{V}_\alpha = \delta(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')\, V_\alpha(\vec{r}_1' - \vec{r}_1)\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{15}$$

avec

$$\begin{aligned} V_{\alpha;\varkappa\lambda,\mu\nu}(\vec{r}_1' - \vec{r}_1) = \sum_{\vec{k}} & \frac{2\,w_k}{(w_{01} + w_{02})^2 - w_k^2} \\ & e^2 \Big\{ S\left(\vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1')\,.\,\vec{\alpha}C\right)_{\varkappa\lambda} \left(C\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^+_{\tau\vec{k}}(\vec{r})\right)_{\mu\nu} \\ & + \left(\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1')\,.\,\vec{\alpha}C\right)_{\varkappa\lambda} \left(C\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^+_{\lambda\vec{k}}(\vec{r})\right)_{\mu\nu} \\ & - \left(A_{0\vec{k}}(\vec{r}_1')\,C\right)_{\varkappa\lambda} \left(CA^+_{0\vec{k}}(\vec{r})\right)_{\mu\nu} \Big\} \end{aligned} \tag{16}$$

Si nous nous restreignons comme précédemment au cas des vitesses non relativistes, w_k^2 est négligeable vis-à-vis de $(w_{01} + w_{02})^2$ puisque

$$\frac{w_k}{w_{01} + w_{02}} \simeq \frac{v}{c} \ ,$$

v étant la vitesse du centre de gravité du système. De plus, on a alors sensiblement

$$\frac{1}{k}\frac{w_k}{w_{01}+w_{02}} = \frac{h}{4\pi mc} = \Lambda \quad \text{(Longueur d'onde de Compton).}$$

En effectuant les sommations, il vient alors

$$V_{\alpha;\varkappa\lambda,\mu\nu}(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_1{}') = -4\pi\mu^2\left\{C_{\varkappa\lambda}C_{\mu\nu} - (\vec{\alpha}C)_{\varkappa\lambda}.(C\vec{\alpha})_{\mu\nu}\right\}\delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_1) \tag{16'}$$

La présence des fonctions $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ et $\delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')$ signifie que l'annihilation de la paire (1, 2) et la création de la paire (1′, 2′) ne peuvent se produire que si l'électron et le positron se trouvent au même endroit dans chacune des paires. L'existence de la fonction $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ indique de plus que les deux phénomènes ont lieu au même endroit.

Nous allons montrer maintenant que l'interaction $\mathcal{V}_\alpha$ est intimement liée à l'existence du champ α. Les éléments de matrice des coefficients de Fourier de ce champ sont donnés par les formules générales I, § 4 (6) appliquées à des transitions entre états d'énergies de signes opposés. Transformons ces formules en introduisant les spineurs conjugués de façon à ne plus faire intervenir que des états d'énergie positive. Nous obtenons ainsi, pour une transition d'annihilation,

$$\begin{aligned}
(c_{\tau\vec{k}})_{0A} &= -\frac{\left(e\left\{\vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1).\vec{\alpha}C\right\}_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2).\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)}{w_{01}+w_{02}-w_k}\ ;\\
(c^{+}_{\tau\vec{k}})_{0A} &= \frac{\left(e\left\{\vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1).\vec{\alpha}C\right\}_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2).\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)}{w_{01}+w_{02}+w_k}\\
(c_{\lambda\vec{k}})_{0A} &= -\frac{\left(e\left\{\vec{A}^{+}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1).\vec{\alpha}C\right\}_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_1).\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)}{w_{01}+w_{02}-w_k}\ ;\\
(c^{+}_{\lambda\vec{k}})_{0A} &= \frac{\left(e\left\{\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1).\vec{\alpha}C\right\}_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2).\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)}{w_{01}+w_{02}+w_k}\\
(c_{0\vec{k}})_{0A} &= +\frac{\left(e\left\{A^{+}_{0\vec{k}}(\vec{r}_1)\ C\right\}_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2).\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)}{w_{01}+w_{02}-w_k}\ ;\\
(c^{+}_{0\vec{k}})_{0A} &= -\frac{\left(e\left\{A_{0\vec{k}}(\vec{r}_1)\ C\right\}_{\mu\nu}\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2).\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)}{w_{21}+w_{02}+w_k}
\end{aligned} \tag{17 a}$$

et pour une transition de création,

$$(c_{\tau\vec{k}})_{F0} = \frac{\left(\psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ C\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\right)}{w_1 + w_2 + w_k} \;;$$

$$(c^{+}_{\tau\vec{k}})_{F0} = -\frac{\left(\psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(r'_1, r'_2) \,.\, e\left\{ C\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\right)}{w_1 + w_2 - w_k}$$

$$(c_{\lambda\vec{k}})_{F0} = \frac{\left(\psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ C\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^{+}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\right)}{w_1 + w_2 + w_k} \;;$$

$$(c^{+}_{\lambda\vec{k}})_{F0} = -\frac{\left(\psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(r'_1, r'_2)\, e\left\{ C\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\right)}{w_1 + w_2 - w_k} \qquad (17\,b)$$

$$(c_{0\vec{k}})_{F0} = -\frac{\left(\psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ C\,.\,A^{+}_{0\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2)\right)}{w_1 + w_2 + w_k} \;;$$

$$(c^{+}_{0\vec{k}})_{F0} = +\frac{\left(\psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(r'_1, r'_2) \,.\, e\left\{ C\,.\,A_{0\vec{k}}(\vec{r}_1{}')\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\right)}{w_1 + w_2 - w_k}$$

On arriverait exactement au même résultat en partant du système d'équations II, § 1 (6) et en se limitant au calcul de la perturbation du premier ordre.

On déduit immédiatement des formules (17) et I, § 3 (11 *a*) les éléments des matrices $(A_0)_{0A}$, $(\vec{A})_{0A}$ et $(A_0)_{F0}$, $(\vec{A})_{F0}$ qui sont les potentiels du champ d'annihilation de la paire (1, 2) et du champ de création de la paire (1′, 2′). Grâce à ces éléments de matrice, on peut mettre V_{FA} sous la forme

$$V_{FA} = -\frac{1}{2}\Big[\int \psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, e\left\{ C\left(A_0)_{0A} + \vec{\alpha}(\vec{A})_{0A}\right)\right\}_{\varkappa\lambda} \delta(r'_1 - r'_2) \,.\, d\tau'_1\, d\tau'_2$$

$$+ \int e\left\{ \left((A_0)_{F0} + \vec{\alpha}(\vec{A})_{F0}\right) C\right\}_{\mu\nu} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,.\, \psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \Big] \qquad (18)$$

Le premier terme correspond à la création de la deuxième paire sous l'influence du champ d'annihilation de la première et le deuxième à l'annihilation de la première paire sous l'influence du champ de création de la seconde.

Dans le cas des vitesses non relativistes, on a d'ailleurs:

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\,(\vec{r}))_{0A} &= -e\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 \int (C\vec{\alpha})_{\mu\nu}\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\delta(\vec{r}_1-r)\,.\,\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 \\
(A_0(\vec{r}))_{0A} &= \quad e\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 \int C_{\mu\nu}\quad \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r})\,.\,\psi^{A}_{\mu\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 \\
(\vec{A}\,(\vec{r}))_{F0} &= -e\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 \int \psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}')\,.\,(\vec{\alpha}C)_{\varkappa\lambda}\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r})\,d\tau_1'\,d\tau_2' \\
(\vec{A}_0(\vec{r}))_{F0} &= \quad e\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 \int \psi^{F*}_{\varkappa\lambda}(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}')\quad C_{\varkappa\lambda}\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')\,\delta(\vec{r}_1{}'-\vec{r})\,d\tau_1'\,d\tau_2'
\end{aligned}
\tag{19}
$$

En introduisant ces expressions dans la relation (18), on retrouve les formules (14), (15) et (16).

Montrons maintenant comment s'applique ici la notion d'énergie de superposition. En tenant compte des expressions (17) et en continuant à ne considérer que des transitions entre états de même énergie, nous pouvons écrire les relations (7) sous la forme

$$
V^{(\tau)}_{FA} = -\sum_{\vec{k}} \left\{ (c^{+}_{\tau\vec{k}})_{F0}\,(c_{\tau\vec{k}})_{0A} + (c^{+}_{\tau\vec{k}})_{0A}\,(c_{\tau\vec{k}})_{F0} \right\} \omega_k \tag{20 a}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{(\lambda)}_{FA} + V^{(0)}_{FA} = \sum_{\vec{k}} \Big\{ & (c^{+}_{0\vec{k}} - c^{+}_{\lambda\vec{k}})_{F0}\,(c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}})_{0A} + \\
& + (c^{+}_{0\vec{k}} - c^{+}_{\lambda\vec{k}})_{0A}\,(c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}})_{F0} \Big\} \omega_k
\end{aligned}
\tag{20 b}
$$

La première de ces formules n'est valable que dans le cas où le centre de gravité du système est animé d'une vitesse non relativiste; la deuxième est valable indépendamment de cette restriction. En comparant les expressions (20) et I, § 1 (44) on voit que V_{FA} est égal à la différence des énergies de superposition des parties longitudinales et transversales des champs d'annihilation de la première paire et de création de la seconde.

Si l'on utilisait la théorie des lacunes, on obtiendrait au lieu de la formule (18):

$$
V'_{FA} = -V_{FA} = \int \psi^{*}_{02}(\vec{r}_1)\,\psi_1(\vec{r}_2)\,.\,\mathcal{V}'_{\alpha}\,.\,\psi_{01}(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\,d\tau_1\,d\tau_2
$$

avec

$$\mathcal{V}'_\alpha = + \frac{1}{2}\left\{ e\left(A^{(1)}_{\alpha 0}(\vec{r}_2) + \vec{\alpha}_2 . \vec{A}^{(1)}_\alpha(\vec{r}_2)\right) + e\left(A^{(2)}_{\alpha 0}(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}_1 . \vec{A}^{(2)}_\alpha(\vec{r}_1)\right) \right\}$$

$$= \quad e^2 (1 - \vec{\alpha}_1 . \vec{\alpha}_2)\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Suivant ce point de vue, chacun des deux électrons d'énergie positive et négative qui interviennent dans le phénomène d'annihilation et de création virtuelles de paires est soumis à l'action du champ α de l'autre. V'_{FA} résulte alors de la différence des énergies de superposition des champs α longitudinaux et transversaux de ces deux particules. Nous nous sommes jusqu'ici restreints au cas de transitions entre états de même énergie. Toutefois il est fort probable que les expressions hermitiennes (14), (15), (16), (16′) et (18) restent applicables aux autres transitions. En effet, nous avons déjà vu qu'en ce qui concerne l'interaction coulombienne, les opérateurs hermitiens § 2 (11), déduits de l'élément de matrice du second ordre pour les transitions entre états de même énergie, restent applicables en toute rigueur aux autres transitions, bien que cet élément ne soit plus alors égal à l'élément de matrice de l'interaction correcte. Enfin, puisque nous nous bornons à étudier les phénomènes d'interaction dans les cas non relativistes, il suffit d'employer pour chaque particule des fonctions d'onde à deux composantes. On vérifie alors sans difficulté que V_α s'exprime au moyen des matrices de spin de Pauli par la formule

$$V_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2{}') = 4\pi\mu^2 \left\{ 1 + \frac{1 + \sigma_1 . \vec{\sigma}_2}{2} \right\} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2{}') \qquad (21\,a)$$

$$= 4\pi\mu^2 \frac{\vec{\Sigma}^2}{4}\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2{}') \qquad (21\,b)$$

L'expression (21 *a*) a été écrite de façon à mettre en évidence, dans l'accolade, deux opérateurs dont l'un ne modifie pas les spins tandis que l'autre les permute; nous reviendrons sur cette propriété remarquable. D'autre part la forme (21 *b*), qui fait intervenir le spin total

$$\vec{\Sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 \qquad (22)$$

des deux particules, nous montre que le phénomène d'annihilation et création virtuelle de paires ne peut se produire que si l'électron et le positron ont leur spins parallèles.

3. *Le caractère d'échange de l'interaction* V_α.

Suivant le formalisme de l'électrodynamique quantique, le phénomène d'annihilation et de création virtuelles correspond à la disparition de la paire initiale (1, 2) et à l'apparition d'une nouvelle paire (1′, 2′), différente de la première. A ce point de vue, l'étude du système électron-positron nécessite en toute rigueur, l'emploi d'une infinité de coordonnées, aussi bien suivant la théorie des lacunes, que suivant notre représentation à énergies positives.

Nous nous proposons maintenant de rechercher comment il est possible d'entreprendre cette étude, dans l'approximation non-relativiste de Pauli, en n'utilisant que les coordonnées $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ de deux particules seulement, tout en tenant compte des phénomènes d'annihilation et de création virtuelles par l'introduction convenable de l'interaction V_α.

Nous laisserons, pour l'instant, de côté l'influence des transitions radiatives ordinaires ainsi que celle de l'annihilation réelle.

Si l'annihilation virtuelle n'existait pas, l'état du système électron-positron pourrait être décrit par une fonction d'onde $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ dans laquelle $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ désignent respectivement les positions de l'électron et du positron, et qui obéirait à l'équation de Pauli:

$$\left\{ H_1 + H_2 + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right\} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\, \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \ , \quad (23\,a)$$

où $H_1 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}$ et $H_2 = \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}$ représentent les énergies cinétiques des deux particules et $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ la somme de l'interaction électrostatique de Coulomb, $V_0 = -\frac{e^2}{r_{12}}$, et des interactions magnétiques indiquées dans le tableau du §2, II.

Nous pourrions également considérer le positron comme première particule et l'électron comme seconde. Dans ce cas la fonction d'onde $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ obéirait à l'équation:

$$\left\{ H_1 + H_2 + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right\} \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\,\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \qquad (23\,b)$$

identique à la précédente.

Dans le cas considéré ici, où le champ extérieur est nul, les fonctions propres sont symétriques ou antisymétriques par rapport aux permutations simultanées des coordonnées et des spins des particules,

$$\psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \pm\, \psi_{ji}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)\ , \qquad (24\,a)$$

en raison de l'invariance de l'hamiltonien des équations (23) par rapport à ces opérations. Si l'on néglige les interactions magnétiques, ces deux permutations respectent séparément l'invariance de l'hamiltonien. La symétrie de la fonction d'onde se décompose alors en une symétrie d'espace

$$\psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \pm\, \psi_{ij}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \qquad (24\,b)$$

et une symétrie de spin

$$\psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \pm\, \psi_{ji}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \qquad (24\,c)$$

Introduisons maintenant le phénomène d'annihilation et de création virtuelles. Suivant l'électrodynamique quantique, la paire créée est essentiellement différente de celle qui s'est annihilée. Toutefois, il est possible d'utiliser les mêmes coordonnées $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ pour représenter ces deux paires, du fait que les deux particules finales apparaissent à l'endroit même où ont disparu les deux particules initiales. En effet, grâce à cette circonstance exceptionnelle, l'élément de matrice V_{FA} peut se transformer de la façon suivante:

$$\begin{aligned} V_{FA} &= 4\pi\mu^2 \int \psi^{F*}(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') \,.\, \left\{ 1 + \frac{1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{2} \right\} \\ &\qquad \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')\, \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_1)\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,.\, \psi^{A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_1'\, d\tau_2' \\ &= 4\pi\mu^2 \int \psi^{F*}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \,.\, \left\{ 1 + \frac{1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{2} \right\} \\ &\qquad \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,.\, \psi^{A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \end{aligned} \qquad (25)$$

Mais la présence de la fonction $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ nous permet également de l'écrire sous la forme

$$V_{FA} = 4\pi\mu^2 \int \varphi^{F*}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \left\{ 1 + \frac{1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{2} \right\}$$
$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \psi^A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (25\,b)$$

En d'autres termes nous pouvons supposer à priori qu'après un processus d'annihilation et de création virtuelle, chaque particule a conservé son caractère électron ou positron [élément de matrice (25 *a*)], ou au contraire qu'il y a eu échange des caractères, l'électron étant devenu un positron et le positron un électron [élément de matrice (25 *b*)]. Dans la première hypothèse, les équations (23) doivent être remplacées par les suivantes:

$$\begin{aligned} (H_1 + H_2 + V + V_\alpha)\,\psi &= E\psi \\ (H_1 + H_2 + V + V_\alpha)\,\varphi &= E\varphi \end{aligned} \qquad (26)$$

Si l'une des configurations (ψ, 0) ou (0, φ) est réalisée à un instant donné, elle subsistera ultérieurement. On peut donc assigner un caractère bien déterminé aux particules 1 et 2 et résoudre l'équation correspondante.

Par contre, si l'on suppose que l'interaction V_α correspond à un échange de caractères, les équations du système électron-positron s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} (H_1 + H_2 + V)\,\psi \pm V_\alpha\varphi &= E\psi \\ (H_1 + H_2 + V)\,\varphi \pm V_\alpha\psi &= E\varphi \end{aligned} \qquad (27)$$

Rien ne fixant jusqu'ici les signes de ψ et φ on peut choisir arbitrairement dans (27) soit le signe supérieur, soit le signe inférieur. Il est bien connu que des équations de ce type représentent un phénomène d'échange: si à l'instant $t = 0$ la configuration (ψ, 0) est réalisée, un certain temps après c'est la configuration (0, φ) qui le sera. Pour résoudre ces équations, effectuons en la somme et la différence; il vient

$$\begin{aligned} (H_1 + H_2 + V \pm V_\alpha) \cdot (\psi + \varphi) &= E.(\psi + \varphi) \\ (H_1 + H_2 + V \mp V_\alpha) \cdot (\psi - \varphi) &= E.(\psi - \varphi) \end{aligned} \qquad (28)$$

Ces nouvelles équations admettent deux espèces de solutions

$$\psi + \varphi = \xi \qquad \psi = \frac{1}{2}\xi$$

$$\psi - \varphi = 0 \qquad \varphi = \frac{1}{2}\xi$$

et

$$\psi + \varphi = 0 \qquad \psi = \frac{1}{2}\eta$$

$$\psi - \varphi = \eta \qquad \varphi = -\frac{1}{2}\eta$$

Suivant que nous avons affaire à l'une ou l'autre de ces espèces, nous disons que le système est dans un état symétrique ou antisymétrique de caractère.

Si nous considérons V et V_α comme des perturbations, nous sommes amenés à construire les éléments de matrice de $V + V_\alpha$ ou $V - V_\alpha$, selon la symétrie de caractère de l'état non-perturbé et le signe adopté dans les équations (27). Nous avons vu (§ 3, 1) que c'est le premier de ces éléments qui intervient dans l'interaction entre électron et positron. Par conséquent l'annihilation et la création virtuelles se produisent dans les états symétriques ou antisymétriques de caractère, suivant que nous choisissons le signe supérieur ou inférieur dans les équations précédentes (27) et (28).

D'autre part ce phénomène n'affecte que les états symétriques d'espace et symétriques de spin, car les éléments de matrice de V_α ne sont différents de zéro que si l'électron et le positron ont une certaine probabilité de se trouver au même endroit avec des spins parallèles dans chacun des états initial et final. Si pour fixer les idées nous choisissons le signe inférieur dans les équations (27), ces états sont de plus antisymétriques de caractère. Dans ce cas particulier, la fonction d'onde est antisymétrique au total:

$$\psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\varphi_{ji}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

Nous allons montrer, qu'il en est de même dans le cas général. A cette fin, nous devons considérer le cas où le champ extérieur

n'est plus nul, ainsi que nous l'avions admis jusqu'ici. En désignant par — U et + U les interactions de l'électron et du positron avec ce champ, les équations du système électron-positron deviennent:

$$\begin{aligned} &\left\{ H_1 + H_2 + V - U_1(\vec{r_1}) + U_2(\vec{r_2}) \right\}\psi - V_\alpha \varphi = E\psi \\ &\left\{ H_1 + H_2 + V + U_1(\vec{r_1}) - U_2(\vec{r_2}) \right\}\varphi - V_\alpha \psi = E\varphi \end{aligned} \tag{29}$$

Ces équations admettent deux espèces de solutions, symétriques et antisymétriques au total, $\psi_{ij}(\vec{r_1}, \vec{r_2}) = \pm \varphi_{ji}(\vec{r_2}, \vec{r_1})$, mais cette symétrie globale ne se décompose plus en général en trois symétries partielles, d'espace, de spin et de caractère.

D'autre part, l'interaction avec le champ extérieur est symétrique au total, mais antisymétrique par rapport aux coordonnées et aux spins. Il ne se produira donc jamais de transitions entre états de symétries totales différentes, mais la symétrie d'espace et de spin est susceptible de changer. Il en résulte que le système doit nécessairement se trouver dans un état antisymétrique au total, sinon, en faisant agir un champ extérieur convenable, nous pourrions l'amener dans un état symétrique séparément d'espace, de spin et de caractère, ce qui serait en contradiction avec ce qui précède.

On montrerait de façon analogue que le système électron-positron se trouverait obligatoirement dans un état symétrique au total si l'on adoptait le signe supérieur dans les équations (27).

Nous choisissons ici le signe inférieur de façon à pouvoir étendre le principe d'exclusion de Pauli au cas de deux particules de Dirac de signes quelconques. Les équations (27) se généralisent alors d'elles-mêmes dans le cas d'un système constitué d'un nombre quelconque d'électrons et de positrons. Au contraire, cette généralisation, se heurterait à de sérieuses difficultés, si nous adoptions l'autre signe.

Il nous reste à voir maintenant si V_α doit être considéré ou non comme une interaction d'échange. Il importe tout d'abord de remarquer que dans les applications les deux points de vue conduisent toujours à des résultats identiques, même lorsque le système est plongé dans un champ extérieur. En

effet, puisque dans l'hypothèse de l'échange, nous n'utilisons que les fonctions d'onde antisymétriques, les équations (29) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &\{ H_1 + H_2 + V - U_1(\vec{r_1}) + U_2(\vec{r_2}) \} \psi(\vec{r_1}\vec{r_2}) + V_\alpha \tilde{\psi}(\vec{r_2}\vec{r_1}) = E\psi(\vec{r_1}\vec{r_2}) \\ &\{ H_1 + H_2 + V + U_1(\vec{r_1}) - U_2(\vec{r_2}) \} \varphi(\vec{r_2}\vec{r_2}) + V_\alpha \tilde{\varphi}(\vec{r_2}\vec{r_1}) = E\varphi(\vec{r_1}\vec{r_2}) \end{aligned} \tag{30}$$

En les comparant sous cette forme aux équations (26), qui se rapportent à l'hypothèse où il n'y a pas d'échange, on voit immédiatement que la fonction d'interaction V_α conduit dans les deux cas aux mêmes éléments de matrice. Ceci résulte de ce que V_α contient la fonction $\delta(\vec{r_1} - \vec{r_2})$ et du fait que

$$\left\{ 1 + \frac{1 + (\vec{\sigma_1} \cdot \vec{\sigma_2})}{2} \right\} \psi = \psi + \tilde{\psi} \, .$$

Cependant il semble plus logique de considérer V_α comme une interaction d'échange. En effet les équations (29) sont mathématiquement équivalentes, dans le cas non-relativiste, à celles de la théorie des lacunes, en ce sens qu'il existe une correspondance biunivoque entre les solutions de même symétrie des unes et des autres. Au contraire, si l'on suppose que l'interaction V_α n'a pas le caractère d'échange, on est conduit aux équations (26) qui n'admettent aucune solution correspondant aux solutions symétriques des équations de la théorie des lacunes. On pourrait penser qu'il est plus satisfaisant d'écrire ainsi les équations du problème électron-positron de façon qu'elles ne possèdent que des solutions ayant un sens physique, plutôt que d'employer un principe d'exclusion. Toutefois le problème de deux particules de Dirac de même signe ne se présente pas sous cet aspect, tout au moins dans le formalisme actuel, et l'application du principe de Pauli reste nécessaire.

Par conséquent, si nous n'attribuions pas à V_α un caractère d'échange, nous serions conduits, dans le cas du problème général de n particules de Dirac de signes quelconques, à un mélange peu satisfaisant des deux points de vue. Une partie seulement des solutions symétriques des équations de la théorie des lacunes n'aurait aucun correspondant dans notre

théorie à énergie positive tandis que les autres solutions symétriques subsisteraient et devraient être écartées par l'application du principe de Pauli.

Il est particulièrement intéressant de remarquer que si l'on considère V_α comme une interaction d'échange, celle-ci est du même type que celles qui ont été introduites de façon phénoménologique dans l'étude du problème proton-neutron. En effet, l'interaction due à l'annihilation et à la création virtuelle, peut s'écrire symboliquement sous la forme:

$$-PV_\alpha = -\left\{ P + P\frac{1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{2} \right\} 4\pi\mu^2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

où P est l'opérateur de permutation d'Heisenberg qui échange les caractères des deux particules mais conserve leurs spins, autrement dit, qui remplace $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ par $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ et vice versa. D'autre part

$$P\frac{1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{2}$$

est l'opérateur de Majorana, qui permute les caractères et les spins des deux corpuscules. Enfin, les interactions de Coulomb, et de spin, sont analogues à celles de Wigner et de Bartlett. Ainsi la simple application de l'électrodynamique quantique fait intervenir de façon bien déterminée, dans le problème électron-positron, les quatre types d'interaction utilisés plus ou moins arbitrairement en physique nucléaire.

(à suivre)