Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 29 (1947)

Artikel: Le champ propre et l'interaction des particules de Dirac : suivant l'électrodynamique quantique [suite]

Autor: Pirenne, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742257

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LE CHAMP PROPRE ET L'INTERACTION DES PARTICULES DE DIRAC

suivant l'électrodynamique quantique

PAR

Jean PIRENNE

(suite) [1]

---

§ 3. — L'ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE.

1. *Quantification du champ électromagnétique.*

La modification essentielle apportée par la quantification à la théorie du rayonnement est l'introduction de la notion de photon: toute onde monochromatique de fréquence ν ne peut avoir qu'une énergie égale à un multiple entier de $h\nu$; en d'autres termes, elle ne peut contenier qu'un nombre entier de photons. Pour réaliser cette condition il suffit de remplacer les oscillateurs qui interviennent dans la description du champ transversal par des oscillateurs quantiques et de poser $w_k = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi}$, ce qui entraîne la quantification non seulement du champ de radiation mais également du champ propre transversal des particules. Afin d'observer une uniformité de point de vue et en raison du fait que la décomposition du champ électromagnétique en une partie transversale et une partie longitudinale n'est pas invariante vis-à-vis des transformations

[1] Première partie v. *Archives*, [5], *28*, 233 (1946).

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ GENÈVE

de Lorentz, il convient de quantifier aussi bien l'une que l'autre de ces parties. Nous devons donc sonsidérer maintenant les grandeurs $(p_{\tau\vec{k}}, q_{\tau\vec{k}})$, $(p_{\lambda\vec{k}}, q_{\lambda\vec{k}})$, $(p_{0\vec{k}}, q_{0\vec{k}})$, introduites précédemment [§ 1 (20 a)] comme des opérateurs satisfaisant aux relations de commutation

$$\begin{aligned} p_{\tau\vec{k}}\, q_{\tau\vec{k}} - q_{\tau\vec{k}}\, p_{\tau\vec{k}} &= \frac{h}{2\pi i} \\ p_{\lambda\vec{k}}\, q_{\lambda\vec{k}} - q_{\lambda\vec{k}}\, p_{\lambda\vec{k}} &= \frac{h}{2\pi i} \\ p_{0\vec{k}}\, q_{0\vec{k}} - q_{0\vec{k}}\, p_{0\vec{k}} &= \frac{h}{2\pi i} \end{aligned} \tag{1}$$

Les grandeurs du champ $\vec{A}$, A_0, $\vec{E}$, $\vec{H}$ sont maintenant des opérateurs dont les expressions découlent des formules (9 et 10) § 1, dans lesquelles les $c_{\vec{k}}$ et $\overset{+}{c}_{\vec{k}}$ sont liés aux opérateurs par les relations (20) § 1. Les relations de commutation (1), et celles d'incertitude résultent de celles-ci, entraînent d'autres relations de commutation et d'incertitude pour les grandeurs du champ. Cette conséquence est indispensable puisque tout système mécanique avec lequel on peut mesurer ces grandeurs est lui-même soumis à des règles quantiques et au principe d'incertitude d'Heisenberg.

Il est commode d'utiliser comme variable de chacun des oscillateurs le nombre de quanta qu'il contient et la phase θ. En mécanique classique l'hamiltonien d'un oscillateur peut s'écrire sous la forme

$$H = \frac{1}{2}\omega\,(p^2 + q^2) \tag{2}$$

En appliquant la transformation canonique

$$p = -\sqrt{2P}\sin Q\ ; \qquad q = \sqrt{2P}\cos Q \tag{3}$$

il vient

$$H = P\,\omega \tag{4}$$

La variable d'action P représente l'énergie divisée par la pulsation $\omega = 2\pi\nu$; Q est la phase.

En intégrant les équations canoniques dérivant de (4), on obtient:

$$P = \frac{w}{\omega} = \text{Const.} \; ; \qquad Q = \theta = \omega t + \text{const.}$$

Pour quantifier l'oscillateur posons

$$P = N\frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\theta} \; ; \qquad Q = \theta \; .$$

L'hamiltonien s'écrit alors

$$H = Nw \; , \tag{5}$$

où

$$N = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{6}$$

représente le nombre de quanta et $w = h\nu$ l'énergie d'un quauntum.

L'équation d'onde de l'oscillateur devient

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = H\gamma$$

ou encore

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \omega\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = 0$$

Les fonctions propres et les valeurs propres de l'énergie ont pour expression

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \Gamma_n e^{-\frac{2\pi i}{h} w_n t} \; ; & \Gamma_n &= e^{in\theta} \\ w_n &= nw \; ; & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Les fonctions d'ondes sont normalisées par la condition [1]

$$\int_0^{2\pi} \gamma_n^* \gamma_n \frac{d\theta}{2\pi} = 1 \; .$$

[1] Ceci revient en somme à prendre comme variable indépendante $\theta/2\pi$ plutôt que θ, ce qui a pour avantage de supprimer un facteur de normalisation gênant.

Comme dans la théorie de Dirac, les fonctions d'onde à énergies positive et négative constituent deux représentations conjuguées. On peut choisir l'une ou l'autre arbitrairement. On peut attribuer aux états d'énergie négative les opérateurs conjugués complexes de ceux qui correspondent aux états d'énergie positive. Dans la suite, nous supposerons que l'on a toujours $n \geqslant 0$.

Les opérateurs $\frac{h}{2\pi}\mathrm{N}$ et θ représentant des grandeurs conjuguées satisfont aux relations de commutations:

$$\frac{h}{2\pi}\mathrm{N}\,.\,\theta - \theta\,.\,\frac{h}{2\pi}\mathrm{N} = \frac{h}{2\pi i}$$

ou encore

$$\mathrm{N}\theta - \theta\mathrm{N} = -i\,.$$

On en déduit les formules importantes

$$\mathrm{N}e^{i\theta} - e^{i\theta}\mathrm{N} = e^{i\theta}\ ; \qquad \mathrm{N}e^{-i\theta} - e^{-i\theta}\mathrm{N} = -e^{-i\theta} \tag{8}$$

ainsi que la relation d'incertitude

$$\Delta\mathrm{N}\,.\,\Delta\theta \sim 1$$

qui se rapporte au fait que, si l'oscillateur se trouve dans un état correspondant à un nombre de quanta bien déterminé n, la phase est complètement indéterminée, puisque la densité de probabilité $\frac{1}{2\pi}\left|\Gamma_n(\theta)\right|^2$ est indépendant de θ.

Pour revenir aux variables p et q posons

$$\begin{aligned} p &= -\sqrt{\frac{2\varpi}{\omega}}\,\frac{\sqrt{\mathrm{N}}\,e^{i\theta} - e^{-i\theta}\sqrt{\mathrm{N}}}{2i} \\ q &= \sqrt{\frac{2\varpi}{\omega}}\,\frac{\sqrt{\mathrm{N}}\,e^{i\theta} - e^{-i\theta}\sqrt{\mathrm{N}}}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

avec

$$\sqrt{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{i}}\,\frac{\partial^{1/2}}{\partial\theta^{1/2}}$$

où $\frac{\partial^{1/2}}{\partial \theta^{1/2}}$ représente la dérivée partielle d'ordre ½ définie de telle sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\partial^{1/2} e^{in\theta}}{\partial \theta^{1/2}} = \sqrt{n}\, e^{in\theta}$$

Les opérateurs p et q satisfont à la relation de commutation $pq - qp = h/2\pi i$ en vertu des formules (8). Ils correspondent aux grandeurs classiques p, q puisque (9) se ramène à (3) dans le cas des grands nombres quantiques.

En tenant compte des relations (9), l'hamiltonien (5) s'écrit

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\omega\,(p^2 + q^2) - \frac{1}{2}\omega$$

Cette expression diffère de celle qu'on adopte pour un oscillateur mécanique par le dernier terme dont la présence permet d'éviter qu'en l'absence de photon, le champ ne possède une énergie de zéro. Ceci ne l'empêche pas d'ailleurs de présenter des fluctuations non nulles, même lorsqu'il se trouve dans l'état fondamental. Si l'on choisit q comme variable indépendante, les fonctions d'onde sont celles d'Hermite, $\mathrm{H}_n(q)$, et la distribution de probabilité de l'amplitude q est $\mathrm{H}_n^2(q)$ qui s'écrit, pour $n = 0$,

$$\psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt[4]{\frac{2\pi}{h}}\; e^{-\frac{1}{2}q^2 \cdot \frac{2\pi}{h}}$$

Les formules que nous venons d'indiquer sont directement applicables aux oscillateurs des ondes transversales et longitudinales dont les hamiltoniens sont de la forme (2). Ceux des ondes scalaires au contraire sont de signe opposé, ce qui revient à compter leur énergie négativement.

L'équation d'onde s'écrit alors:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \omega \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = 0$$

Les fonctions propres et les énergies propres sont données par les formules

$$\begin{aligned} \gamma_n^- &= \Gamma_n e^{-\frac{2\pi i}{n} w_n t} \; ; \qquad \Gamma_n = e^{in\theta} \\ w_n &= -n w \qquad\qquad ; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{7'}$$

Nous ne considérerons ici que les valeurs $n \geqslant 0$ de façon à compter l'énergie, comme précédemment, avec le même signe qu'en théorie classique, c'est-à-dire négativement dans le cas actuel.

Les formules (9) sont applicables à tous les oscillateurs du du champ. Les coefficients de Fourier des potentiels se déduisent des $p_{\vec{k}}$, $q_{\vec{k}}$ par les relations § 1 (20 *b*). On obtient ainsi les opérateurs

$$\begin{cases} c_{\tau\vec{k}} = e^{-i\theta_{\tau\vec{k}}} \sqrt{N_{\tau\vec{k}}} \\ c^+_{\tau\vec{k}} = \sqrt{N_{\tau\vec{k}}}\, e^{i\theta_{\tau\vec{k}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{\lambda\vec{k}} = e^{-i\theta_{\lambda k}} \sqrt{N_{\lambda\vec{k}}} \\ c^+_{\lambda\vec{k}} = \sqrt{N_{\lambda\vec{k}}}\, e^{i\theta_{\lambda\vec{k}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{0\vec{k}} = -\sqrt{N_{0\vec{k}}}\, e^{i\theta_{0\vec{k}}} \\ c^+_{0\vec{k}} = -e^{i\theta_{0\vec{k}}} \sqrt{N_{0\vec{k}}} \end{cases} \tag{10d}$$

Ils satisfont aux relations de commutation

$$c_{\tau\vec{k}}\, c^+_{\tau\vec{k}} - c^+_{\tau\vec{k}}\, c_{\tau\vec{k}} = 1 \; ; \qquad c_{\lambda\vec{k}}\, c^+_{\lambda\vec{k}} - c^+_{\lambda\vec{k}}\, c_{\lambda\vec{k}} = 1 \; ;$$

$$c_{0\vec{k}}\, c^+_{0\vec{k}} - c^+_{0\vec{k}}\, c_{0\vec{k}} = -1 \; .$$

Leurs éléments de matrice de Schrödinger sont tous nuls, sauf les suivants:

$$\begin{aligned} (c_{\tau\vec{k}})_{n,n+1} &= (c^+_{\tau\vec{k}})_{n+1,n} = \sqrt{n+1} \\ (c_{\lambda\vec{k}})_{n,n+1} &= (c^+_{\lambda\vec{k}})_{n+1,n} = \sqrt{n+1} \\ (c_{0\vec{k}})_{n+1,n} &= (c^+_{0\vec{k}})_{n,n+1} = -\sqrt{n+1} \end{aligned} \tag{10b}$$

Les matrices de deux opérateurs $c_{\vec{k}}$ et $c^+_{\vec{k}}$ correspondants sont donc adjointes l'une à l'autre. C'est pourquoi nous employons le signe $+$ au lieu du symbole *.

D'autre part les opérateurs $e^{i\vec{k}\vec{r}_1}$ et $e^{-i\vec{k}\vec{r}_1}$ sont également adjoints l'un à l'autre puisque

$$\int \psi_j^* \, e^{i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_i \, d\tau_1 = \left[\int \psi_i^* \, e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_j \, d\tau_1\right]^* .$$

Nous sommes ainsi amenés à substituer aux potentiels classiques § 1 (9) les opérateurs suivants:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_\tau &= S \sum_{\vec{k}} (c_{\tau\vec{k}} \vec{A}_{\tau\vec{k}} + c^+_{\tau\vec{k}} \vec{A}^+_{\tau\vec{k}}) \\ \vec{A}_\lambda &= \sum_{\vec{k}} (c_{\lambda\vec{k}} \vec{A}_{\lambda\vec{k}} + c^+_{\lambda\vec{k}} \vec{A}^+_{\lambda\vec{k}}) \\ A_0 &= \sum_{\vec{k}} (c_{0\vec{k}} A_{0\vec{k}} + c^+_{0\vec{k}} A^+_{0\vec{k}}) \end{aligned}\right\} \qquad (11\,a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}_\tau &= -S \sum_{\vec{k}} ik\,(c_{\tau\vec{k}} \vec{A}_{\tau\vec{k}} - c^+_{\tau\vec{k}} \vec{A}^+_{\tau\vec{k}}) \\ \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}_\lambda &= -\sum_{\vec{k}} ik\,(c_{\lambda\vec{k}} \vec{A}_{\lambda\vec{k}} - c^+_{\lambda\vec{k}} \vec{A}^+_{\lambda\vec{k}}) \\ \frac{1}{c}\dot{A}_0 &= -\sum_{\vec{k}} ik\,(c_{0\vec{k}} A_{0\vec{k}} - c^+_{0\vec{k}} A^+_{0\vec{k}}) \end{aligned}\right\} \qquad (11\,b)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_{\tau\vec{k}} &= \vec{a}_{\vec{k}} \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \; ; & \vec{A}^+_{\tau\vec{k}} &= \vec{a}_{\vec{k}} \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \\ \vec{A}_{\lambda\vec{k}} &= \frac{\vec{k}}{k} \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \; ; & A^+_{\lambda\vec{k}} &= \frac{\vec{k}}{k} \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{T^3}} \\ A_{0\vec{k}} &= \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \; ; & A^+_{0\vec{k}} &= \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned}\right\} \qquad (11\,c)$$

Enfin, l'hamiltonien des oscillateurs peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} H^{(ch)} &= \sum_{\vec{k}} (S\, c^+_{\tau\vec{k}} c_{\tau\vec{k}} + c^+_{\lambda\vec{k}} c_{\lambda\vec{k}} - c_{0\vec{k}} c^+_{0\vec{k}})\, \omega_k = \\ &= \sum_{\vec{k}} (S\, N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}})\, \omega_k \qquad (11\,d) \end{aligned}$$

2. *L'équation d'onde de l'électron et du champ.*

Tant qu'il n'est pas nécessaire de considérer la modification du champ due à la présence d'un électron, le mouvement de celui-ci dans un champ extérieur donné, peut être décrit par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}_1, t)$ dépendant seulement de la position de la particule et du temps, et satisfaisant à l'équation de Dirac

$$cp_0 \psi(\vec{r}_1, t) = -\left\{ c\vec{\alpha}\left(\vec{p} + e\frac{\vec{A}(\vec{r}_1)}{c}\right) + \beta mc^2 \right\} \psi(\vec{r}_1, t) .$$

Pour arriver à une théorie plus complète, tenant compte à la fois de l'influence du champ sur l'électron ainsi que de celle de l'électron sur le champ, on doit considérer d'emblée le système global formé par la particule et le champ. L'état de ce système est décrit par une fonction d'onde

$$\Psi(\vec{r}_1 ; \quad \theta_{\tau\vec{k}} ; \quad \theta_{\lambda\vec{k}} ; \quad \theta_{0\vec{k}} ; \quad t) ,$$

dépendant des coordonnées de l'électron, des variables du champ et du temps, et obéissant à l'équation

$$cp_0 \Psi = \mathrm{H}\Psi ,$$

dans laquelle l'hamiltonien H a pour expression

$$\mathrm{H} = -\left\{ c\vec{\alpha}\left(\vec{p} + e\frac{\vec{A}(\vec{r}_1)}{c}\right) + \beta mc^2 \right\} - e\mathrm{A}_0(\vec{r}_1) +$$
$$+ \sum_{\vec{k}} \left(\mathrm{S}\, c^+_{\tau\vec{k}}\, c_{\tau\vec{k}} + c^+_{\lambda\vec{k}}\, c_{\lambda\vec{k}} - c_{0\vec{k}}\, c^+_{0\vec{k}}\right) \omega_k ,$$

les potentiels $\vec{A}$, A_0 et leurs coefficients de Fourier $c_{\vec{k}}$, $c^+_{\vec{k}}$ étant donnés par les formules (10 *a*) et (11 *a*). Sous cette forme, l'hamiltonien quantique correspond terme à terme à l'hamiltonien classique § 1 (29) dans le cas d'une particule [1].

[1] La charge de l'électron est représentée ici par $-e$ tandis qu'au § 1, e_i désigne celle de la i-ème particule avec son signe.

Le premier terme représente l'énergie mécanique de l'électron et les deux derniers l'énergie du champ. On peut encore écrire H de la manière suivante:

$$H = H^{(p)} + H^{(i)} + H^{(ch)} \tag{12}$$

avec

$$H^{(p)} = -(c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2) \tag{13 a}$$

$$H^{(i)} = -e\left(A_0(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}.\vec{A}(\vec{r}_1)\right) \tag{13 b}$$

$$H^{(ch)} = \sum_{\vec{k}} \left(S\, c^+_{\tau\vec{k}}\, c_{\tau\vec{k}} + c^+_{\lambda\vec{k}}\, c_{\lambda\vec{k}} - c_{0\vec{k}}\, c^+_{0\vec{k}}\right) \omega_k =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \left(S\, N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}}\right) \omega_k \,. \tag{13 c}$$

$H^{(p)}$ est formellement identique à l'hamiltonien de Dirac d'une particule libre. $H^{(ch)}$ est l'hamiltonien des oscillateurs du champ. Enfin $H^{(i)}$ est un term d'interaction entre l'électron et le champ.

Il est à remarquer que les expressions des potentiels que onus avons utilisées ne sont valables que si l'énergie des oscillateurs du champ est comptée avec le même signe qu'en théorie classique (Cf. § 1.3).

Si nous nous bornons à considérer le cas où cette hypothèse est réalisée, tant pour la particule que pour le champ, l'équation d'onde du système s'écrit, dans le cas d'un électron,

$$\left\{ cp_0 + c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 + e(A_0 + \vec{\alpha}\vec{A}) - \sum_{\vec{k}} \left(S\, N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}}\right) \omega_k \right\} \Psi = 0$$

et dans le cas d'un positron

$$\left\{ cp_0 + c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 - eA_0 + \vec{\alpha}\vec{A}) - \sum_{\vec{k}} \left(S\, N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}}\right) \omega_k \right\} \Phi = 0 \,.$$

Au contraire si l'on désire utiliser une représentation où l'on compte toutes les énergies avec des signes opposés à ceux de la théorie classique, il faut appliquer la transformation qui fait passer d'un spineur à son conjugué (Cf. § 2 (5). Les équations

précédentes s'écrivent alors respectivement, pour le cas de l'électron et celui du positron:

$$\left\{ cp_0 + c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 - e(A_0^* + \vec{\alpha}\vec{A}^*) - \sum_{\vec{k}} (S N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}})\, \omega_k \right\} \Phi = 0$$

$$\left\{ cp_0 + c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 + e(A_0^* + \vec{\alpha}\vec{A}^*) - \sum_{\vec{k}} (S N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}})\, \omega_k \right\} \Psi = 0 \quad .$$

Afin d'étudier un système constitué de plusieurs particules de Dirac en interaction avec le champ, on peut généraliser les équations précédentes en prenant comme hamiltonien du système la somme des hamiltoniens des particules, en interaction avec le champ, et de l'hamiltonien des oscillateurs du champ, comme on le fait en électrodynamique classique (§ 1 (29).

L'hamiltonien ainsi obtenu peut également se décomposer de la façon suivante:

$$H = \sum_j H_j^{(p)} + H^{(i)} + H^{(ch)} \tag{12}$$

avec

$$H_j^{(i)} = -(c\vec{\alpha}_j \vec{p}_j + \beta_j mc^2) \tag{13'a}$$

$$H^{(i)} = \sum_j e_j (A_0(\vec{r}_j) + \vec{\alpha}_j \vec{A}(\vec{r}_j)) \tag{13' b}$$

$$H^{(ch)} = \sum_{\vec{k}} (S N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}})\, \omega_k \quad . \tag{13'c}$$

Toutefois nous devons remarquer qu'à cause de la possibilité d'annihilation et de création de paires, le nombre des particules du système n'est pas constant. En raison des difficultés qui résultent de ce fait, nous reprendrons ce problème ultérieurement.

3. *Les solutions des équations de l'électrodynamique quantique et leur interprétation.*

Considérons d'abord le cas du champ de radiation dans le vide, c'est-à-dire en l'absence de toute particule. Les fonctions propres du système sont alors simplement formées par le produit des fonctions propres de chacun des oscillateurs du champ

transversal. Ceux du champ longitudinal sont tous supposés dans l'état fondamental; leur fonction d'onde, $\Gamma_0 = 1$, ne joue aucun rôle et ils ne donnent lieu qu'à un champ nul. Si l'on construit avec ces fonctions propres la matrice du potentiel vecteur $\vec{A}$ on constate que les éléments diagonaux sont tous nuls, les seuls éléments différents de zéro étant ceux qui correspondent à une variation unitaire du nombre de quanta contenu dans chaque onde (émission ou absorption d'un photon). La valeur moyenne du champ est donc nulle tandis que sa valeur quadratique moyenne est différente de zéro, même si le champ est dans son état fondamental (absence complète de photon). Autrement dit le champ subit des fluctuations autour d'une valeur moyenne nulle.

On aurait pu supposer que les oscillateurs longitudinaux ne sont pas toujours dans leur état fondamental mais qu'ils peuvent se trouver dans des états excités quelconques, à part la restriction que les matrices des opérateurs $c_{\lambda\vec{k}}$; $c^{+}_{\lambda\vec{k}}$; $c_{0\vec{k}}$; $c^{+}_{0\vec{k}}$ doivent satisfaire aux relations

$$c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega} = 0 \; ; \qquad c^{+}_{\lambda\vec{k}} - \frac{\dot{c}^{+}_{0\vec{k}}}{i\omega} = 0 \tag{14}$$

qui correspondent aux relations classiques § 1 (17). On vérifie alors que la matrice du champ électrique longitudinal est identiquement nulle. Le champ de radiation est donc purement transversal en théorie quantique comme en théorie classique.

Passons maintenant au cas d'une particule libre. Nous supposerons que les équations de l'électrodynamique quantique admettent des fonctions propres. Celles-ci doivent être choisies de façon que les relations (14) soient satisfaites par les matrices des coefficients de Fourier $c_{\lambda\vec{k}}$; $c^{+}_{\lambda\vec{k}}$; $c_{0\vec{k}}$; $c^{+}_{0\vec{k}}$. En construisant les matrices des opérateurs $\vec{A}$ et A_0 on s'aperçoit, ainsi que nous le verrons au § 4, que les éléments diagonaux sont maintenant différents de zéro, ainsi que certains éléments non diagnonaux. Le champ subit donc encore des fluctuations, comme dans le cas du vide, mais sa valeur moyenne n'est plus nulle; elle est modifiée par la présence de la particule ce qui corresponds à l'existence du champ propre de celle-ci.

Enfin considérons le cas d'un système de plusieurs particules. On sait par expérience que celui-ci présente un spectre de niveaux qui peut être déterminés de façon très précise, dans le cas des vitesses non relativistes, par une théorie quantique de caractère purement mécanique, telle que celles de Schrödinger et de Pauli, c'est-à-dire dans laquelle le champ des particules ne figure pas explicitement, son action étant représentée dans l'hamiltonien par des termes d'interaction entre particules. La seule modification apportée à ce spectre par l'introduction du rayonnement est un élargissement des niveaux généralement très faible vis-à-vis de leur écart. Notre première tâche consistera donc à montrer que ces théories mécaniques peuvent être déduites, en première approximation, de l'électrodynamique quantique. Ceci constitue l'aspect quantique du problème que nous avons posé de façon générale et précise au § 1,6 où nous en avons étudié l'aspect classique. Nous verrons ainsi que l'électrodynamique quantique permet de justifier les termes d'interaction introduits en mécanique ondulatoire par des considérations de correspondance mais qu'elle fournit également deux termes supplémentaires, dont l'un ne peut être déduit de telles considérations. De plus nous montrerons que, comme en électrodynamique classique, un rapport simple lie ces différents termes aux énergies résultant de la superposition des parties longitudinales et transversales des champs propres des particules.

Jusqu'ici, on n'a réussi à trouver des solutions exactes des équations de l'électrodynamique quantique que dans certains cas particuliers, notamment dans celui d'une particule au repos et de masse infinie [1]. Dans le cas général on se contente de rechercher des solutions approximatives en considérant le terme d'interaction entre les particules et le champ comme une petite perturbation. Avant de nous occuper de l'utilisation de cette méthode dans les problèmes que nous venons d'envisager nous voudrions dire-quelques mots de la théorie quantique du rayonnement qui fut à l'origine du développement de l'électrodynamique quantique et qui lui a fourni un grand nombre d'applica-

[1] G. Beck, *Journal de Physique*, 1939, *10*, p. 200.

tions. Pour traiter celles-ci on fait une hypothèse phénoménologique justifiée par la petitesse de l'influence des phénomènes radiatifs sur le mouvement d'un système de particules. Cette hypothèse consiste à supposer qu'en première approximation, il est possible de considérer séparément l'état du champ de radiation et celui du système de particules: le premier correspond à une fonction propre $\Gamma_{\mathrm{I}}(\theta_{\tau\vec{k}}; t)$ de l'hamiltonien $\mathrm{H}_{\tau}^{(\mathrm{ch})}$ des oscillateurs des ondes transversales et le second à une fonction propre $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; t)$ de l'hamiltonien $\mathrm{H}^{(m)}$ représentant l'énergie du système matériel dans une théorie purement mécanique (voir plus haut). On introduit alors l'interaction

$$\mathrm{H}_{\tau}^{(i)} = \sum_j e_j \vec{\alpha}_j \,.\, \vec{\mathrm{A}}_{\tau}(\vec{r}_j) \tag{15}$$

entre les particules et le champ transversal comme une petite perturbation, prenant naissance brusquement à l'instant initial $t = 0$, et l'on recherche, par la méthode de variation des constantes, une solution de l'équation

$$(\mathrm{H}^{(m)} + \mathrm{H}^{(\mathrm{ch})} + \mathrm{H}^{(i)})\,\Psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{16}$$

qui se réduise à $\psi_i \Gamma_{\mathrm{I}}$ pour $t = 0$. A un instant ultérieur t, cette solution s'écrit

$$\Psi = \psi_i \Gamma_{\mathrm{I}} + \Sigma c_{i,\mathrm{I};f,\mathrm{F}}(t)\,\psi_f \Gamma_{\mathrm{F}} \;. \tag{17}$$

$|\, c_{i\mathrm{I};f,\mathrm{F}}(t)\,|^2$ est la probabilité de trouver le système matériel dans l'état f et le champ dans l'état F si l'on supprime brusquement la perturbation à l'instant t. Si l'un des états (f, F) a la même énergie que l'état (i, I) cette probabilité devient divergente. Comme on suppose que l'un au moins des états (i, I) ou (f, F) appartient toujours à un spectre continu, on considère que toutes les transitions infiniment voisines, du point de vue mathématique, sont pratiquement équivalentes, du point de vue physique; on sait que la somme des probabilités relatives à toutes ces transitions est convergente et croît proportionnellement au temps (pendant les premiers instants)

ce qui permet de déterminer la probabilité par unité de temps de la transition physique considérée. L'enclenchement et la suppression brusque de la perturbation aux instants initial et final signifie que l'on considère comme négligeable l'interaction entre le système matériel et le champ de radiation avant et après la transition. Les calculs sont conduits de façon à ne tenir compte de l'influence de $H_\tau^{(i)}$ qu'en ce qui concerne les phénomènes radiatifs, sa contribution à l'interaction mutuelle des particules étant déjà contenue dans $H^{(m)}$.

Revenons maintenant au calcul des fonctions propres d'une particule libre par la méthode des perturbations. Le terme perturbateur, constitué ici par l'interaction $H^{(i)}$ [formule (13 *b*)] de la particule avec les parties longitudinales et transversales du champ, est considéré cette fois-ci comme constant; il n'est plus question de le supprimer à un instant donné. Pour déterminer une fonction propre perturbée, nous supposerons que la partie non perturbée de celle-ci est formée par le produit d'une fonction propre de Dirac de la particule et de la fonction d'onde $\Gamma_0 = 1$ représentant l'état fondamental du champ. Ce choix assure la validité des conditions (14) ainsi que nous le verrons. La fonction propre perturbée est obtenue sous forme d'un développement en série suivant les fonctions non perturbées,

$$\Psi = \psi_i \Gamma_0 + \Sigma c_{i,0;f,\mathrm{F}} \psi_f \Gamma_\mathrm{F} , \tag{18}$$

dont les coefficients de Fourier sont cette fois-ci indépendants du temps.

L'existence de termes pour lesquels $\Gamma_f \neq \Gamma_0$ indique que le champ ne se trouve plus dans l'état fondamental du vide, mais qu'il est modifié par la présence de la particule. Celle-ci possède donc un champ propre en rapport étroit avec les coefficients $c_{i,0;f,\mathrm{F}}$. Nous le calculerons au § 4.

Cela n'aurait actuellement aucun sens de supprimer l'interaction $H^{(i)}$ puisque celle-ci est liée à l'existence du champ propre des particules de Dirac et par conséquent à celle des particules elles-mêmes. On ne peut donc interpréter la présence des états excités du champ dans la série (18) comme indiquant la possibilité de transitions réelles. On a coutume

de dire qu'elle correspond à une émission de photons virtuels par la particule. Ce langage emprunté à la théorie de la radiation ne permet pas de comparer directement l'électrodynamique quantique à l'électrodynamique classique sous sa forme habituelle. Il a pourtant l'avantage d'associer aux termes fournis par la méthode des perturbations une image qui permet parfois d'en saisir intuitivement la signification. C'est ainsi que l'interaction mutuelle de deux particules, qui sera étudiée en détail ultérieurement, apparaît, à ce point de vue, comme un échange d'impulsion s'effectuant par l'intermédiaire de photons virtuels longitudinaux et transversaux émis par l'une des particules et absorbés par l'autre.

Ainsi que nous l'avons déjà dit à la fin du §1,3, les notions quantiques de photons réels et virtuels (ou liés) correspondent, en électromagnétisme classique, à celles de composantes de Fourier du champ de radiation et du champ propre des particules. C'est pourquoi, les photons virtuels peuvent aussi bien être longitudinaux que transversaux alors que les photons réels sont nécessairement transversaux, ainsi que nous l'avons remarqué au début de ce paragraphe.

§ 4. — Le champ propre de l'électron.

1. *Les coefficients de Fourier du champ propre d'un électron libre.*

Nous considérons ici le cas d'un électron qui n'est soumis à aucun champ extérieur. Nous allons calculer, par la méthode des pertubations, la fonction d'onde de la particule et du champ. L'hamiltonien du système étant mis sous la forme § 3 (12), le terme perturbateur est constitué par l'interaction

$$H^{(i)} = -e\left\{A_0(\vec{r}_1) + \vec{\alpha}.\vec{A}(\vec{r}_1)\right\} \qquad \S\,3\ (13\,b)$$

entre la particule et le champ.

Nous désignerons par

$$\psi_i = \psi_i^0(\vec{r}_1)\, e^{-\frac{2\pi i}{h} w_i t} \qquad (1\,a)$$

les fonctions propres de l'hamiltonien de Dirac et par

$$\Psi_i = \Psi_i^0(\vec{r}_1\,;\,\theta)\,e^{-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W}_i t} \qquad (1\,b)$$

les fonctions propres perturbées qui se ramènent, pour $\mathrm{H}^{(i)} \longrightarrow 0$, aux ψ_i de même indice (multipliées par la fonction d'onde $\Gamma_0 = 1$ représentant l'état fondamental du champ). Pour éviter les difficultés relatives au spectre continu, nous supposerons que les ψ_i sont des ondes planes de Dirac qui satisfont aux mêmes conditions de périodicité que les potentiels du champ à la surface du cube L^3. Ces ondes forment un système orthogonal complet, à condition de considérer aussi bien celles à énergie négative que celles à énergies positive

Les calculs de perturbation seront développés jusqu'aux termes du premier ordre inclus. Il en résulte tout d'abord que

$$\mathrm{W}_i = w_i\ . \qquad (2)$$

Il n'en serait plus de même si on considérait les termes du second ordre, car l'énergie de perturbation cesserait alors d'être nulle pour devenir même divergente. Toutefois il n'est pas certain qu'il faille tenir compte de celle-ci puisque

$$w_i = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$$

représente par définition l'énergie totale de l'électron, quel que soit la nature de celle-ci. Nous reviendrons ultérieurement sur cette question qui n'intervient pas pour l'instant.

D'autre part, la perturbation du premier ordre de Ψ ne fait intervenir que les états du champ différant de l'état fondamental uniquement par le fait que l'un des oscillateurs se trouve dans le premier état excité. A ce degré d'approximation, le développement en série de la fonction d'onde s'écrit donc:

$$\Psi_i^0(\vec{r}_1\,;\,\theta) = \psi_i^0(\vec{r}_1) + \Sigma c_{i;j,\tau\vec{k}}\,\psi_j^0(\vec{r}_1)\,\Gamma_1(\theta_{\tau\vec{k}}) + \\ + \Sigma c_{i;j,\lambda\vec{k}}\,\psi_j^0(\vec{r}_1)\,\Gamma_1^0(\theta_{\lambda\vec{k}}) + \Sigma c_{i;j,0\vec{k}}\,\psi_j^0(\vec{r}_1)\,\Gamma_1^0(\theta_{0\vec{k}}) \qquad (3)$$

Les coefficients de Fourier sont de la forme bien connue

$$c_{i;f} = \frac{\mathrm{H}_{fi}^{(i)}}{\mathrm{E}_i - \mathrm{E}_f}\ ,$$

$H_{fi}^{(i)}$ étant l'élément de matrice relatif à la transition virtuelle entre l'état initial i et l'état final f dont les énergies sont respectivement E_i et E_f. On calcule aisément $H_{fi}^{(i)}$ en tenant compte des expressions § 3 (11) des potentiels et des relations § 3 (10). Pour évaluer le dénominateur on se rappellera que l'énergie des oscillateurs du potentiel scalaire sont comptées négativement, à la différence de celles du potentiel vecteur qui sont regardées comme positives.

On obtient ainsi les formules:

$$\begin{aligned} c_{i;j,\tau\vec{k}} &= \frac{(\psi_j^{0*}\, e\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}}\,\psi_i^0)}{w_k + w_j - w_i} \\ c_{i;j,\lambda\vec{k}} &= \frac{(\psi_j^{0*}\, e\vec{\alpha}\,.\,\vec{A}^{+}_{\lambda\vec{k}}\,\psi_i^0)}{w_k + w_j - w_i} \\ c_{i;j,0\vec{k}} &= -\frac{(\psi_j^{0*}\, e\vec{A}^{+}_{0\vec{k}}\,\psi_i^0)}{-w_k + w_j - w_i}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

dans lesquelles est utilisée la notation

$$(\psi_j^{0*}\,\mathrm{V}\,\psi_i^0) = \int \psi_j^{0*}\,\mathrm{V}\,\psi_i\, d\tau_1\ .$$

Calculons maintenant les éléments de matrice des coefficients de Fourier du champ

$$(c_{\vec{k}})_{ji} = \int \Psi_j^*\, c_{\vec{k}}\, \Psi_i\, d\tau_1\, \frac{d\theta_{\vec{k}}}{2\pi}\ .$$

En appliquant les formules § 3 (11 *a*) on trouve qu'ils sont liés aux coefficients de Fourier des fonctions propres Ψ_i du système par les importantes relations

$$\begin{aligned} (c_{\tau\vec{k}})_{ji} &= c_{i;j,\tau\vec{k}}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_j-w_i)t}\ ; & (c^{+}_{\tau\vec{k}})_{ji} &= c^{*}_{j;i,\tau\vec{k}}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_j-w_i)t} \\ (c_{\lambda\vec{k}})_{ji} &= c_{i;j,\lambda\vec{k}}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_j-w_i)t}\ ; & (c^{+}_{\tau\vec{k}})_{ji} &= c^{*}_{j;i,\lambda\vec{k}}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_j-w_i)t} \\ (c_{0\vec{k}})_{ji} &= -\, c^{*}_{j;i,0\vec{k}}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_j-w_i)t}\ ; & (c^{+}_{0\vec{k}})_{ji} &= -\, c_{i;j,0\vec{k}}\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(w_j-w_i)t} \end{aligned} \tag{5}$$

que l'on peut encore écrire, en tenant compte de (4) et (1 *a*), sous la forme plus explicite

$$
\begin{aligned}
(c_{\tau\vec{k}})_{ji} &= \frac{(\psi_j^* \, e\vec{\alpha}\vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}} \, \psi_i)}{\varpi_k + \varpi_j - \varpi_i} \; ; \qquad (\overset{+}{c}_{\tau\vec{k}})_{ji} = (c_{\tau\vec{k}})^*_{ij} \\
(c_{\lambda\vec{k}})_{ji} &= \frac{(\psi_j^* \, e\vec{\alpha}\vec{A}^{+}_{\lambda\vec{k}} \, \psi_i)}{\varpi_k + \varpi_j - \varpi_i} \; ; \qquad (\overset{+}{c}_{\lambda\vec{k}})_{ji} = (c_{\lambda\vec{k}})^*_{ij} \qquad (6) \\
(c_{0\vec{k}})_{ji} &= -\frac{(\psi_j^* \, e A^{+}_{0\vec{k}} \, \psi_i)}{\varpi_k + \varpi_j - \varpi_i} \; ; \qquad (\overset{+}{c}_{0\vec{k}})_{ji} = (c_{0\vec{k}})^*_{ij} \, .
\end{aligned}
$$

On voit que les matrices de deux opérateurs $c_{\vec{k}}$ et $\overset{+}{c}_{\vec{k}}$ correspondants sont adjointes l'une à l'autre, ce qui justifie à un nouveau point de vue le fait d'affecter l'un d'eux du symbole † de l'adjonction.

D'autre part on déduit des formules (6) les équations suivantes et leurs adjointes

$$
\begin{aligned}
\left(c_{\tau\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\tau\vec{k}}}{i\omega}\right)_{ji} \varpi_k &= (\psi_j^* \, e\vec{\alpha} \, . \, \vec{A}^{+}_{\tau\vec{k}} \, \psi_i) \\
\left(c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\lambda\vec{k}}}{i\omega}\right)_{ji} \varpi_k &= (\psi_j^* \, e\vec{\alpha} \, . \, \vec{A}^{+}_{\lambda\vec{k}} \, \psi_i) \qquad (7) \\
\left(c_{0\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega}\right)_{ji} \varpi_k &= -(\psi_j^* \, e \; A^{+}_{0\vec{k}} \; \psi_i)
\end{aligned}
$$

$$
\left(c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega}\right)_{ji} \varpi_k = 0 \qquad (8)
$$

La vérification des premières est immédiate; celle de la dernière s'effectue en partant de l'identité

$$
\vec{A}_{\lambda\vec{k}} = \frac{1}{ik} \operatorname{grad} A_{0\vec{k}}
$$

et en intégrant par partie le numérateur de $(c_{\lambda\vec{k}})_{ji}$. L'intégrale de surface disparait en raison des conditions de périodicité

imposées aux fonctions d'onde et aux potentiels à la frontière du cube L^3. On obtient ainsi successivement:

$$(\psi_j^* \vec{\alpha} \vec{A}^+_{\lambda \vec{k}} \psi_i) = -\frac{1}{ik} \int \{ \psi_j^* \vec{\alpha} \vec{A}^+_{0\vec{k}} \operatorname{grad} \psi_i + \operatorname{grad} \psi_j^* \cdot \vec{\alpha} \vec{A}^+_{0\vec{k}} \psi_i) \, d\tau$$

$$= -\frac{1}{i\omega} \frac{2\pi i}{h} \int \{ \psi_j^* \vec{A}^+_{0\vec{k}} (c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2) \psi_i$$

$$- \psi_i A^+_{0\vec{k}} (c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2)^* \psi_j^* \} d\tau$$

$$= \frac{1}{i\omega} \frac{2\pi i}{h} (w_i - w_j) (\psi_j^* \vec{A}^+_{0\vec{k}} \psi_i) = -\frac{1}{i\omega} \frac{d}{dt} (\psi_j^* A^+_{0\vec{k}} \psi_i)$$

D'où la relation (8).

Les équations (7) et (8) constituent l'approximation du premier ordre des équations rigoureuses

$$\left(c_{\tau\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\tau\vec{k}}}{i\omega}\right) w_k = e\vec{\alpha} \vec{A}^+_{\tau\vec{k}} (\vec{r}_1)$$

$$\left(c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\lambda\vec{k}}}{i\omega}\right) w_k = e\vec{\alpha} \vec{A}^+_{\lambda\vec{k}} (\vec{r}_1) \qquad (7')$$

$$\left(c_{0\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega}\right) w_k = -e A^+_{0\vec{k}} (\vec{r}_1)$$

$$c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega} = 0 \qquad (8')$$

qui résultent de la forme même de l'hamiltonien du système et de la condition

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0$$

et qui correspondent aux équations classiques § 1 (19 et 17).

2. *Le champ propre de l'électron libre.*

Les éléments de matrice des potentiels ont pour expression

$$(\vec{A}_\tau)_{ji} = S \sum_{\vec{k}} \{ (c_{\tau\vec{k}})_{ji} \vec{A}_{\tau\vec{k}} (\vec{r}) + (c^+_{\tau\vec{k}})_{ji} \vec{A}^+_{\tau\vec{k}} (\vec{r}) \}$$

$$(\vec{A}_\lambda)_{ji} = \sum_{\vec{k}} \{ (c_{\lambda\vec{k}})_{ji} \vec{A}_{\lambda\vec{k}} (\vec{r}) + (c^+_{\lambda\vec{k}})_{ji} \vec{A}^+_{\lambda\vec{k}} (\vec{r}) \} \qquad (9)$$

$$(A_0)_{ji} = \sum_{\vec{k}} \{ (c_{0\vec{k}})_{ji} \vec{A}_{0\vec{k}} (\vec{r}) + (c^+_{0\vec{k}})_{ji} A_{0\vec{k}} (\vec{r}) \}$$

En comparant les formules (9) et les équations (7) et (8) aux formules § 1 (9 *a*) et aux équations § 1 (16) et (17) on constate que les éléments de matrice $(\vec{A}_\tau)_{ji} + (\vec{A}_\lambda)_{ji}$ et $(A_0)_{ji}$, correspondant à deux indices i, j déterminés, sont les potentiels d'un champ électromagnétique obéissant aux équations de Maxwell et créés par les densités de courant et de charge que l'on associe, en théorie de Dirac, à la transition $i \longrightarrow j$.

D'autre part, on peut mettre ces éléments de matrice sous la forme

$$\begin{aligned}
(\vec{A}_\tau(\vec{r}, t))_{ji} &= \int \psi_j^*(\vec{r}_1, t)\, \vec{A}_\tau(\vec{r} - \vec{r}_1)\, \psi_i(\vec{r}_1, t)\, d\tau_1 \\
(A_\lambda(\vec{r}, t))_{ji} &= \int \psi_j^*(\vec{r}_1, t)\, \vec{A}_\lambda(\vec{r} - \vec{r}_1)\, \psi_i(\vec{r}_1, t)\, d\tau_1 \qquad (10) \\
(A_0(\vec{r}, t))_{ji} &= \int \psi_j^*(r_1, t)\, A_0(\vec{r} - \vec{r}_1)\, \psi_i(r_1, t)\, d\tau_1
\end{aligned}$$

Les opérateurs $\vec{A}_\tau$, $\vec{A}_\lambda$ et A_0 sont ainsi parfaitement définis puisque les ψ_i forment un système orthogonal complet. D'ailleurs chacune des fonctions propres Ψ_i que nous avons calculées décrit, en électrodynamique quantique, le même état de la particule que la fonction ψ_i correspondante en mécanique ondulatoire. On peut notamment vérifier que Ψ_i et ψ_i correspondent à la même valeur propre de l'opérateur d'impulsion qui s'écrit respectivement dans le premier et le second cas

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \frac{h}{2\pi i}\,\mathrm{grad} + \sum_{\vec{k}} (S N_{\tau\vec{k}} + N_{\lambda\vec{k}} - N_{0\vec{k}})\, \frac{h}{2\pi}\, \vec{k} \\
\vec{p} &= \frac{h}{2\pi i}\,\mathrm{grad}
\end{aligned} \qquad (11)$$

Les fonctions Ψ_i forment un système orthogonal comme les ψ_i mais celui-ci n'est pas complet, car il ne comprend pas les fonctions d'onde relatives au cas où l'électron est plongé dans le champ d'une onde lumineuse (photons réels). Toutefois si nous ne tenons pas compte des phénomènes radiatifs, les deux systèmes orthogonaux sont équivalents au point de vue de la description du mouvement seul. Par conséquent, on peut également dire que le champ propre de l'électron est représenté de façons équivalentes par les potentiels $\vec{A}_\tau(\vec{r} - \vec{r}_1)$, $\vec{A}_\lambda(\vec{r} - \vec{r}_1)$,

$A_0(\vec{r} - \vec{r}_1)$, en mécanique ondulatoire, et par les opérateurs généraux $\vec{A}_\tau(\vec{r}, \theta_{\tau\vec{k}})$, $\vec{A}_\lambda(\vec{r}, \theta_{\lambda\vec{k}})$, $A_0(\vec{r}, \theta_{0\vec{k}})$, en électrodynamique quantique, tant qu'on peut négliger l'influence du rayonnement.

Remarquons que si l'on utilise ces derniers opérateurs pour calculer les éléments de matrice des potentiels il faut intégrer non seulement sur tout l'espace, mais encore sur les phases des oscillateurs du champ; au contraire, si l'on emploie les premiers, la seconde intégration a disparu. $\vec{A}_\tau(\vec{r} - \vec{r}_1)$, $\vec{A}_\lambda(\vec{r} - \vec{r}_1)$ et $A_0(\vec{r} - \vec{r}_1)$ résultent donc d'une opération de moyenne effectuée sur les fluctuations essentielles du champ. Ces fluctuations, qui existaient déjà dans le cas du vide, ne doivent d'ailleurs pas être confondues avec les fluctuations mécaniques correspondant à la présence d'éléments de matrice (10) non diagonaux. Elles se rapportent au contraire aux éléments de matrice relatifs aux transitions entre les états que nous considérons ici et ceux qui interviennent dans les phénomènes radiatifs (champ excité par la présence des photons réels).

3. *Calcul des potentiels.*

Occupons nous maintenant de la détermination effective des opérateurs $\vec{A}_\tau(\vec{r} - \vec{r}_1)$, $\vec{A}_\lambda(\vec{r} - \vec{r}_1)$, $A_0(\vec{r} - \vec{r}_1)$. Observons tout d'abord que les ψ_i étant des ondes planes, les éléments de matrice $(c_{\tau\vec{k}})_{ji}$, $(c_{\lambda\vec{k}})_{ji}$, $(c_{0\vec{k}})_{ji}$ ainsi que $(c^+_{\tau\vec{k}'})_{ji}$, $(c^+_{\lambda\vec{k}'})_{ji}$, $(c^+_{0\vec{k}'})_{ji}$ sont nuls, sauf si l'on a

$$-\frac{h}{2\pi}\vec{k} = \vec{p}_j - \vec{p}_i \tag{12 a}$$

$$-\frac{h}{2\pi}\vec{k}' = -(\vec{p}_j - \vec{p}_i) = +\frac{h}{2\pi}\vec{k}\ . \tag{12 b}$$

En d'autres termes, l'émission ou l'absorption d'un photon virtuel ne peut se faire que s'il y a conservation de l'impulsion. On peut encore dire que, pour un état initial déterminé, chaque composante $A_{\tau\vec{k}}$, $A_{\lambda\vec{k}}$, $A_{0\vec{k}}$, $A^+_{\tau\vec{k}}$, $A^+_{\lambda\vec{k}}$, $A^+_{0\vec{k}}$ n'intervient que dans les transitions vers les seuls états dont l'impulsion est

déterminée par les relations (12). Celles-ci ne fixent d'ailleurs l'énergie w_ℓ qu'au signe près.

a) *Transitions entre états d'énergie de même signe.*

Supposons, pour commencer, que l'on ne considère que des états d'énergie positive.

On peut alors écrire les formules (9) sous la forme (10) en posant

$$\vec{A}_\tau = S \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{(e\vec{\alpha}\vec{A}^+_{\tau\vec{k}}(r_1))\vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r})}{w_k + w_j - w_i} + \frac{(e\vec{\alpha}\vec{A}_{\tau,-\vec{k}}(\vec{r}_1))\vec{A}^+_{\tau,-\vec{k}}(\vec{r})}{w_k - w_j + w_i} \right\} =$$

$$= S \sum_{\vec{k}} \frac{(e\vec{\alpha}\vec{A}^+_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1))\vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}) + (e\vec{\alpha}\vec{A}_{\tau,\vec{k}}(r_1))\vec{A}^+_{\tau\vec{k}}(\vec{r})}{w_k\left[1 - \left(\frac{w_j - w_i}{w_k}\right)^2\right]}$$

$$\vec{A}_\lambda = \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{(e\vec{\alpha}\vec{A}^+_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1))\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r})}{w_k + w_j - w_i} + \frac{(e\vec{\alpha}\vec{A}_{\lambda,-\vec{k}}(\vec{r}_1))\vec{A}^+_{\lambda,-\vec{k}}(\vec{r})}{w_k - w_j + w_i} \right\} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \frac{(e\vec{\alpha}A^+_{\lambda|\vec{k}}(\vec{r}_1))A_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}) + (e\vec{\alpha}\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1))\vec{A}^+_{\lambda\vec{k}}(\vec{r})}{w_k\left[1 - \left(\frac{w_j - w_i}{w_k}\right)^2\right]} \tag{13}$$

$$A_0 = \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{e A^+_{0\vec{k}}(\vec{r}_1) A_{0\vec{k}}(\vec{r})}{w_k + w_j - w_i} + \frac{(e A_{0,-\vec{k}}(\vec{r}_1) A^+_{0,-\vec{k}}(\vec{r})}{w_k - w_j + w_i} \right\} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \frac{e A^+_{0\vec{k}}(\vec{r}_1) A_{0\vec{k}}(\vec{r}) + e A_{0\vec{k}}(\vec{r}_1) A^+_{0\vec{k}}(\vec{r})}{w_k\left[1 - \left(\frac{w_j - w_i}{w_k}\right)^2\right]}$$

Les opérateurs ainsi obtenus ne conviennent que pour les transitions entre états d'énergie positive. Ils correspondent formellement aux potentiels classiques § 1 (24) dont ils diffèrent seulement par le remplacement, aux dénominateurs, de l'expression $-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\frac{\vec{k}}{k}$ par $\frac{w_j - w_i}{w_k}$. D'ailleurs si

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_j - \vec{p}_i \ll \vec{p} = \frac{\vec{p}_j + \vec{p}_i}{2}$$

on a, quelque soit v/c:

$$\frac{\varpi_j - \varpi_i}{\varpi_k} = \frac{\Delta \varpi}{\varpi_k} = \frac{\vec{v} \cdot \Delta \vec{p}}{\varpi_k} = -\frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k}$$

Cette approximation permettrait aisément de montrer que si l'on représente le mouvement d'un électron libre relativiste par celui d'un paquet d'ondes à énergie positive, dont l'impulsion est connue avec une précision relative $\Delta p/p \ll 1$, le champ moyen calculé avec les opérateurs (13) est le même qu'en théorie classique à grande distance du paquet d'ondes. D'ailleurs, en raison des relations d'incertitude de Heisenberg et de la condition $\Delta p/p \ll 1$, les dimensions du paquet d'ondes sont nécessairement grandes vis-à-vis de la longueur d'onde de Compton, $\Lambda = \frac{h}{2\pi mc}$, si on les mesure dans le système de référence où l'électron est au repos. Λ apparaît donc, à ce point de vue, comme une limite inférieure imposée par la théorie quantique à la validité de la loi de Coulomb pour l'électron, limite d'ailleurs beaucoup plus élevée que le rayon classique de cette particule, $r_0 = e^2/mc^2$, puisque $\Lambda = 137\, r_0$.

Si l'électron est soumis au champ d'autres particules, ces opérateurs cessent d'être applicables dans le cas relativiste ou lorsque le système comprend simultanément des électrons et des positrons. Ils ne pourraient, par exemple, être utilisés pour les électrons des couches profondes d'un atome lourd. On sait en effet que si l'on décompose leur fonction d'onde en série d'ondes planes, la contribution des états d'énergie négative est de l'ordre de grandeur de v^2/c^2, soit environ 30% pour les électrons K de l'atome d'uranium, par exemple. Quant à la présence de paires elle ferait jouer un rôle important aux transitions d'annihilation et de création liées, suivant la théorie des lacunes, aux transitions entre états d'énergies positive et négative. Au contraire, si l'on ne considère que des électrons animés de vitesses non relativistes, comme c'est le cas dans un atome léger, les opérateurs (13) peuvent être pratiquement confondus avec ceux qui sont définis par les formules (10).

Pour mettre en évidence le magnétisme propre de l'électron nous décomposerons, suivant les formules § 2 (8), les densités de courant et de charge; nous calculerons ensuite leurs coefficients de Fourier, lesquels déterminent ceux du champ (Cf. (6)). Nous obtenons ainsi

$$e(\psi_j^* \vec{\alpha}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_i) = e\left(\psi_j^* \beta \frac{\vec{p}\, e^{-ikr_1} + e^{-ikr_1} \vec{p}}{2mc} \psi_i\right) -$$

$$- \mu \left[\psi_j^* \vec{\sigma} \beta e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_i,\ i\vec{k}\right] - \frac{w_j - w_i}{2mc^2} e(\psi_j^* \vec{\alpha} \beta e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_i) \qquad (14\,a)$$

$$- e(\psi_j^* \quad e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_i) = e \frac{w_i + w_j}{2mc^2} (\psi_j^* \beta e^{-ikr_1} \psi_i)$$

$$+ \mu (\psi_j^* i \vec{\alpha} \beta e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} \psi_i) \qquad (14\,b)$$

Comme nous supposons que les états i et j sont non-relativistes le dernier terme de ces formules est v^2/c^2 fois plus petit que le terme principal et par conséquent négligeable. De plus nous pouvons remplacer w_i et w_j par mc^2. Enfin nous supprimerons, au dénominateur de (6), $\left(\frac{w_j - w_i}{w_k}\right)$ vis-à-vis de 1 puisque

$$\frac{w_j - w_i}{w_k} = \frac{1}{w_k} \frac{p_j^2 + p_i^2}{2m} = \frac{1}{w_k} \frac{(\vec{p}_j - \vec{p}_i)(\vec{p}_j + \vec{p}_i)}{2m} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{v}_i}{c} + \frac{\vec{v}_j}{c}\right)\frac{\vec{k}}{k} \ll 1$$

En utilisant les expressions ainsi décomposées et simplifiées des éléments de matrice de $c_{\tau\vec{k}}$, $c_{\lambda\vec{k}}$, $c_{0\vec{k}}$, $c^+_{\tau\vec{k}}$, $c^+_{\lambda\vec{k}}$, $c^+_{0\vec{k}}$ ainsi que celles de $\vec{A}_{\tau\vec{k}}$, $\vec{A}_{\lambda\vec{k}}$, $A_{0\vec{k}}$, $\vec{A}^+_{\tau\vec{k}}$, $\vec{A}^+_{\lambda\vec{k}}$, $A^+_{0\vec{k}}$ [§ 3 (11 c)], les formules (10) et (13) se trouvent remplacées par les suivantes:

$$(\vec{A}_\tau)_{ji} = \int \psi_j^* (\vec{A}_{c\tau} + \vec{A}_\sigma) \psi_i \, d\tau_1$$

$$(\vec{A}_\lambda)_{ji} = \int \psi_j^* \vec{A}_{c\lambda} \psi_i \, d\tau_1 \qquad (15)$$

$$(A_0)_{ji} = \int \psi_j^* A_{c0} \psi_i \, d\tau_1$$

avec

$$\vec{A}_{c\tau} = e\beta \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} S \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{2} \left\{ (\vec{p} \,.\, \vec{a}_{\vec{k}}) \vec{a}_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} (\vec{p} \,.\, \vec{a}_{\vec{k}}) \vec{a}_{\vec{k}} \right\} \qquad (16\,a)$$

$$\vec{A}_{c\lambda} = e\beta \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{2} \left\{ \left(\vec{p} \,.\, \frac{\vec{k}}{k}\right) \frac{\vec{k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \left(\vec{p} \,.\, \frac{\vec{k}}{k}\right) \frac{\vec{k}}{k} \right\} \qquad (16\,b)$$

$$A_{c0} = -e \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \qquad (16\,c)$$

$$A_\sigma = \mu \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{[\vec{\sigma}\beta,\, i\vec{k}]}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \qquad (16\,d)$$

ou encore, d'après les formules de sommation § 1 (12 et 13) et en remplaçant $\vec{r} - \vec{r}_1$ par $\vec{r}$, pour la simplicité de l'écriture,

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{A}_c &= e\beta \frac{1}{2} \left\{ \frac{\vec{p}}{mc} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\vec{p}}{mc} \right\} && (17\,a) \\ A_{c0} &= -e \frac{1}{r} && (17\,b) \end{aligned} \right.$$

$$\vec{A}_\sigma = \mu \frac{[\vec{\sigma}\beta,\, \vec{r}]}{r^3} \,. \qquad (18)$$

A_{c0} et $\vec{A}_c$ sont les potentiels du champ électrique de Coulomb et du champ magnétique de Laplace produit par le déplacement du premier à la vitesse $\vec{v} = c\frac{\vec{p}}{p}$ tandis que le potentiel vecteur $\vec{A}_\sigma$ se rapporte au champ magnétique du spin.

Les calculs se développent de la même façon pour les transitions entre états d'énergie négative; on trouve ainsi que les potentiels (17) et (18) restent applicables sans aucune modification de signe. Ils ne correspondent donc pas au champ du positron, ainsi qu'on aurait pu s'y attendre. Nous reviendrons sur cette difficulté.

b) *Transitions entre états d'énergies de signes opposés.*

Considérons maintenant les transitions entre états d'énergies positive et négative. Les formules (13) définissent alors les potentiels d'un nouveau champ que nous appellerons champ α.

Celui-ci est lié au phénomène d'annihilation et de création de paires. Dans le cas non relativiste, que nous envisageons seul ici, il n'intervient de façon appréciable que lorsque l'électron se trouve en présence d'un positron. Sa signification apparaîtra plus clairement lors de l'étude de l'interaction de ces deux particules.

Pour évaluer les séries (13) nous pouvons maintenant remplacer $|w_i - w_j|$ par $2\,mc^2$ et négliger au dénominateur w_k^2 vis-à-vis de $(w_i - w_j)^2$. Les formules de décomposition (14) n'apporteraient ici aucune simplification; elles montreraient seulement que la majeure partie des densités de courant et de charge résultent de la densité de moment électrique (Cf. § 2.3). On trouve ainsi, au lieu de (15), (17) et (19),

$$\begin{aligned}
(\vec{A}_\tau)_{ji} &= \int \psi_j^* \vec{A}_{\alpha\tau} \psi_i \, d\tau \\
(\vec{A}_\lambda)_{ji} &= \int \psi_j^* \vec{A}_{\alpha\lambda} \psi_i \, d\tau \qquad (19) \\
(A_0)_j &= \int \psi_j^* A_{\alpha 0} \psi_i \, d\tau
\end{aligned}$$

avec

$$\vec{A}_{\alpha\tau} = e \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} S \sum_{\vec{k}} \left(\frac{w_k}{2mc^2}\right)^2 \frac{1}{k^2} (\vec{\alpha} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}) \vec{a}_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \qquad (20\,a)$$

$$\vec{A}_{\alpha\lambda} = e \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{w_k}{2mc^2}\right)^2 \frac{1}{k^2} \left(\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{k}}{k}\right) \frac{\vec{k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \qquad (20\,b)$$

$$A_{\alpha 0} = e \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{w_k}{2mc^2}\right)^2 \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \,. \qquad (20\,c)$$

En remarquant que

$$\frac{w_k}{mc^2} \frac{1}{k} = \frac{h}{2\pi\, mc} = \Lambda$$

et en effectuant les sommations, on obtient finalement les potentiels du champ α:

$$\vec{A}_\alpha = 4\pi e \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 \vec{\alpha}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \tag{21 a}$$

$$A_{\alpha 0} = 4\pi e \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \ . \tag{21 b}$$

Rappelons que les coefficients de Fourier des potentiels (17), (18) et (21) ont été établis en considérant des transitions entre états que nous avons supposés non-relativistes, lesquelles correspondent aux petites valeurs de k, c'est-à-dire à $k \ll \frac{1}{\Lambda}$. Il en résulte que ces coefficients ne sont corrects que pour les grandes distances ($|\vec{r} - \vec{r}_1| \gg \Lambda$) ou, ce qui revient au même, qu'ils ne doivent être appliqués que dans le cas de particules animées de faibles vitesses ($v/c \ll 1$).

En ce qui concerne le champ α, ceci signifie qu'il est nul partout, sauf dans un domaine très réduit dont les dimensions sont au plus de l'ordre de grandeur de Λ et où il atteint des valeurs considérables. Lorsqu'il s'agit de calculer, dans le cas non-relativiste, les éléments de matrice des potentiels, ce domaine peut être considéré comme ponctuel vis-à-vis du domaine d'intégration dont les dimensions sont supérieures à la longueur d'onde λ de la particule: la structure du champ α peut être ignorée, il suffit de connaître sa valeur moyenne ce qui se traduit par l'introduction de la fonction δ.

Enfin remarquons que les éléments de matrice des coefficients de Fourier de $\vec{A}_\alpha$ et de $\vec{A}_\sigma$ sont du même ordre de grandeur. Ceci nous laisse pressentir que le champ α pourra jouer un rôle comparable à celui du champ de spin dans l'interaction entre l'électron et le positron. Toutefois la présence de la fonction δ nous montre déjà que le premier champ ne pourra pas donner lieu à des phénomènes macroscopiques analogues au ferromagnétisme.

4. *Les parties longitudinales et transversales du champ.*

Chacun des potentiels (17), (18) et (21) ne constitue que le premier terme d'un développement en série suivant les puissan-

ces de v/c. Comme le champ électrique de Coulomb est de beaucoup le plus considérable, la précision avec laquelle il est décrit par les potentiels (17) est insuffisante comparativement à la faible importance des autres champs. On peut améliorer facilement cette précision en représentant les parties longitudinales et transversales du champ propre par les potentiels $\vec{A}_0'$ $\vec{A}'$ (Cf. I. § 1.1).

Les coefficients de Fourier de A_0' sont $c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}$ et $c^+_{0\vec{k}} - c^+_{\lambda\vec{k}}$ ainsi qu'on peut s'en rendre compte en calculant $\vec{E}_\lambda$.

Des équations (7) et (8) on tire d'ailleurs

$$c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}} = -\frac{(\psi_j^* \, e A^+_{0\vec{k}} \, \psi_i)}{w_k} \; ; \qquad c^+_{0\vec{k}} - c^+_{\lambda\vec{k}} = -\frac{(\psi_j^* \, e A_{0\vec{k}} \, \psi_i)}{w_k}$$

Par suite, les éléments de matrice de A_0' peuvent s'écrire sous la forme

$$(A_0'(\vec{r}))_{ji} = \int \psi_j^*(\vec{r}_1) \, A_0'(\vec{r} - \vec{r}_1) \, \psi_i(\vec{r}_1) \, d\tau_1 \tag{22}$$

avec

$$A_0'(\vec{r} - \vec{r}_1) = -\sum_{\vec{k}} \frac{e A^+_{0\vec{k}}(\vec{r}) \, A_{0\vec{k}}(\vec{r}) + e A_{0\vec{k}}(\vec{r}_1) \, A_0^+(\vec{r}_1)}{w_k} \, . \tag{23}$$

Ce calcul peut aussi bien s'effectuer au moyen des formules matricielles exactes (7′) et (8′) de sorte que l'opérateur précédent s'applique rigoureusement à toutes les transitions.

Quant aux potentiels de la partie transversale du champ, ils sont donnés, suivant que w_i et w_j sont de même signe ou de signes contraires, par les formules (16 *a*), (16 *d*) et (20 *a*) qui s'écrivent, après sommation,

$$\vec{A}_c' = e\beta \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{p}}{mc} + \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{p}}{mc} \right) \vec{r} \right\} \tag{24}$$

$$\vec{A}_\sigma' = \mu \frac{[\vec{\sigma}\,\beta, \vec{r}]}{r^3} \tag{25}$$

$$\vec{A}_\alpha' = e \left(\frac{\Lambda}{2} \right)^2 \vec{\alpha} \left\{ 4\pi\,\delta(\vec{r}) - \operatorname{grad} \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \right\} . \tag{26}$$

Ils représentent des champs d'importance comparable ainsi que nous l'avons remarqué. Toutefois, si nous utilisons dans le premier cas les potentiels qui se rapportent aux second et réciproquement, nous obtiendrons des champs qui n'auraient aucun sens, mais qui seraient v/c fois plus petits et par conséquent négligeables. Par suite l'opérateur

$$\vec{A}' = \vec{A}'_c + \vec{A}_\sigma + \vec{A}'_\alpha \tag{27}$$

peut être employé en première approximation quels que soient les signes de w_i et w_j.

Le champ propre de l'électron apparaît ainsi comme la superposition de trois champs: celui de Coulomb, celui de spin et le champ α. Ses parties longitudinales et transversales sont décrites par les potentiels (23) et (27), le premier applicable sans restriction, et le second pour $\frac{v}{c} \ll 1$ et $|\vec{r} - \vec{r}_1| \gg \Lambda$.

C'est à peu près sous cette forme que G. Beck [1] écrit les potentiels du champ propre de l'électron. Il les déduit de l'électrodynamique quantique alors qu'on s'était servi jusque là de considérations de correspondance, ce qui permet seulement de déterminer les champs de Coulomb et de spin. Le champ α n'avait pas été mis en évidence auparavant, mais son influence avait déjà été prise en considération dans certains problèmes tels que la diffusion des positrons par les électrons (voir plus loin, II § 3). La méthode suivie par G. Beck est basée comme la nôtre sur la théorie des perturbations, mais les calculs sont développés d'une façon assez différente et la définition des opérateurs potentiels n'est pas la même que celle que nous adoptons. Il en résulte diverses modifications en ce qui concerne le champ α: notamment la fonction δ est remplacée par $1/r^2$ de sorte qu'il paraît assez surprenant que ce champ donne lieu, dans le problème électron-positron, à une interaction V_α contenant elle aussi la fonction δ (Cf. II, § 3).

[1] G. Beck, *Comptes rendus*, 1941, *212*, p. 850; *Cahiers de Physique*, 1941, n° 4, p. 1.

5. *Le champ propre du positron.*

Le calcul du champ propre de l'électron s'applique intégralement au cas du positron si l'on représente celui-ci par une fonction d'onde à énergie positive. Il suffit simplement de changer $-e$, $-\mu$ en $+e$, $+\mu$.

D'autre part on sait que les états d'énergie négative de l'électron peuvent être considérés en théorie de Dirac comme représentant le positron. Cependant le formalisme que nous avons utilisé ne conduit pas à attribuer à ces états le champ de cette particule. C'est ainsi, par exemple, que la formule $A_0' = -e/r$ leur reste applicable. A première vue, ceci paraît dû simplement au fait que l'on compte, dans ce cas, l'énergie des oscillateurs du champ avec le même signe qu'en théorie classique et celle de la particule avec le signe opposé. En réalité la raison de ce résultat est plus profonde; elle provient de ce que nous avons considéré la détermination du champ propre de l'électron comme le problème d'un seu lcorps. En effet, si nous développons la fonction d'onde de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène suivant un système orthogonal d'ondes planes, le principe de la conservation de la charge ne se confond avec l'invariance de la probabilité totale, dans l'hypothèse d'une particule unique, que si l'opérateur $A_0' = -\frac{e}{r}$ est valable aussi bien pour les états d'énergie négative que pour ceux d'énergie positive.

La difficulté est donc entièrement liée à l'existence des phénomènes de création et d'annihilation de paires. On pourrait espérer la lever en employant la théorie des lacunes mais on n'arriverait pas dans ce cas à des opérateurs dépendant des coordonnées du positron puisque celles-ci ne figurent pas dans la fonction d'onde. Aussi est-il difficile de dire si l'emploi de cette théorie en électrodynamique est justifiée à ce point de vue.

(à suivre)