Séance du 5 juillet 1945.

Lucien Féraud. — *Sur la distribution rectangulaire et les nombres de Bernoulli.*

1\. — La distribution rectangulaire que nous écrirons, sous sa forme réduite

$$R = \left\{ \begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix} \right\}_{0,1}$$

admet pour moments, par rapport à l'origine,

$$M_k = \frac{1}{k+1}$$

et pour semi-invariants

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{2k+1} = 0, \quad \lambda_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}}{2k},$$

B_2, B_3, B_4, ... étant la suite des nombres de Bernoulli écrite dans la notation selon laquelle tous les nombres d'indice impair sont nuls.

On sait que les moments et les semi-invariants d'une distribution satisfont à un système de relations simples qui peut être résolu par rapport aux uns ou aux autres.

Par ailleurs, le développement

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{2\,!}x^2 - \ldots \qquad + (-1)^{k+1}\frac{B_{2k}}{2k\,!}x^{2k} + \ldots \tag{1}$$

à partir duquel on définit souvent la suite des B, conduit à

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{x}{1\,!} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{k+1}\frac{x^k}{k!} + \ldots} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{2\,!}x^2 - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{B_{2k}}{2k\,!}x^{2k} + \ldots . \tag{2}$$

On arrive ainsi à un deuxième système de relations simples entre la suite des B et la suite

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \ldots \quad \frac{1}{k+1};$$

on voit immédiatement qu'il ne se confond pas avec le premier. L'existence de deux systèmes de relations simples entre les deux mêmes suites de nombres paraît curieuse, à première vue, et appelle une explication et, tout au moins, la confrontation des deux systèmes.

2. — L'une et l'autre découlent aisément d'une remarque sur les nombres de Bernoulli.

En posant formellement,

$$1 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots} \tag{3}$$

$$1 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \ldots = e^{s_1 x + \frac{s_2}{2} x^2 + \frac{s_3}{3} x^3 + \ldots} \tag{4}$$

on définit un système de relations entre deux quelconques des trois suites de nombres, h, a, s [1].

Dans le cas particulier où la suite des h est la suivante:

$$h_1 = \frac{1}{2\,!}, \quad h_2 = \frac{1}{3\,!}, \ldots \quad h_k = \frac{1}{(k+1)\,!}$$

les relations entre les a et les s se réduisent aux identités $a_k = s_k$.

[1] Lorsque

$$1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots + (-1)^n a_n x^n =$$
$$= (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \ldots (1 - \alpha_n x)$$

les a sont les fonctions symétriques fondamentales des α, les s les sommes de puissances semblables et les h les sommes de produits homogènes.

En effet, en vertu de (1) et (2), la relation (3) s'écrit

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots$$

dont le second membre converge pour $|x| < 2\pi$. On en tire

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + 1 = 1 - a_1 + a_2 x - a_3 x^2 + \ldots$$

et en intégrant

$$\log \frac{e^x - 1}{x} = (1 - a_1)\, x + \frac{a_2}{2} x^2 - \frac{a_3}{3} x^3 + \ldots$$

De plus, en vertu de (1)

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_{2k+1} = 0\,.$$

En comparant avec (4)

$$s_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad s_{2k+1} = 0\,, \qquad s_{2k} = a_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}}{2k\,!}\,.$$

La suite des s coïncide bien avec celle des a. Ainsi s'explique l'existence de deux systèmes de relations simples entre les a et les h, lorsque les h ont les valeurs particulières d'où nous sommes partis. Ces deux systèmes sont condensés dans

$$\frac{1}{1 + \dfrac{x}{2\,!} + \dfrac{x^2}{3\,!} + \dfrac{x^3}{4\,!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k+1\,!} + \ldots} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_2}{2\,!} x^2 - \frac{B^4}{4\,!} x^4 + \ldots (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}}{2k\,!} x^{2k} + \ldots =$$

$$= e^{-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{B_2}{2\,!}x^2 + \frac{1}{4}\frac{B_4}{4\,!}x^4 - \ldots (-1)^k \frac{1}{2k}\frac{B_{2k}}{2k\,!}x^{2k} + \ldots} \qquad (5)$$

Il en résulte des relations de récurrence entre les nombres de Bernoulli et des expressions explicites de ceux-ci. En élevant à une puissance quelconque, on obtient de nouvelles relations de récurrence et de nouvelles expressions explicites.

3. — La distribution rectangulaire conduit précisément au cas particulier que nous venons d'envisager. Il suffit de poser

$$h_k = \frac{M_k}{k\,!} = \frac{1}{(k+1)\,!}$$

$$a_{2k} = \frac{\lambda_{2k}}{(2k-1)\,!} = (-1)^{k+1}\,\frac{B_{2k}}{2k\,!}$$

pour déduire des deux systèmes de relations simples entre les a et les h, deux systèmes de relations simples entre les M et les λ.

4. — La distribution que l'on obtient en composant n distributions rectangulaires R admet pour semi-invariants

$$\Lambda_1 = \frac{n}{2}\,, \qquad \Lambda_{2k+1} = 0\,, \qquad \Lambda_{2k} = (-1)^{k+1}\,n\,\frac{B_{2k}}{2k}\,.$$

Cette distribution est symétrique par rapport à sa moyenne $\frac{n}{2}$. Par rapport à cette moyenne, ses moments d'ordre impair sont nuls et ses moments d'ordre pair donnés par la formule

$$\frac{M_{2k}}{2k\,!} = \sum (-1)^{\Sigma' p}\, n^{\Sigma p}\, \frac{\left(\frac{B_2}{2\,!}\right)^{p_2}\left(\frac{B_4}{4\,!}\right)^{p_4}\cdots\left(\frac{B_{2k}}{2k\,!}\right)^{p_{2k}}}{2^{p_2}\,4^{p_4}\,\ldots\,(2k)^{p_{2k}}\,.\,p_2\,!\;p_4\,!\,\ldots\,p_{2k}\,!} \tag{6}$$

la sommation étant prise pour toutes les valeurs des p entières, positives, qui satisfont à

$$2p_2 + 4p_4 + \ldots + 2k\,p_{2k} = 2k$$

avec

$$\Sigma p = p_2 + p_4 + \ldots + p_{2k}$$

$$\Sigma' p = p_4 + p_8 + \ldots + p_{4j} \quad \text{où} \quad 2j \leqslant k\,.$$

En vertu d'une des relations de récurrence que l'on tire de (5) elle coïncide avec l'expression donnée par Philip Hall (*Biometrika*, vol. XIX, déc. 1927, p. 243):

$$\frac{M_{2k}}{2k\,!} = \frac{1}{2^{2k}} \sum \frac{1}{(2q_1+1)\,!\,(2q_2+1)\,!\,\ldots\,(2q_n+1)\,!} \tag{7}$$

où la sommation est prise sur toutes les valeurs entières et positives des q qui satisfont à

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = k \ .$$

La formule (6) donne le résultat ordonné par rapport à n. Les premiers moments sont

$$M_2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{n}{3}$$

$$M_4 = \frac{1}{2^4}\left(\frac{n^2}{3} - \frac{2n}{15}\right)$$

$$M_6 = \frac{1}{2^6}\left(\frac{5n^3}{9} - \frac{2n^2}{3} + \frac{16n}{63}\right)$$

$$M_8 = \frac{1}{2^8}\left(\frac{35n^4}{27} - \frac{28n^3}{9} + \frac{404n^2}{135} - \frac{16n}{15}\right) .$$

Michel-A. Besso. — *Le danger de panmixie dans les associations d'être vivants à reproduction indépendante et les dispositifs par lesquels ce danger est évité.*

La notion de panmixie, introduite par Weissmann lorsque l'hérédité des caractères acquis devenait improbable, pour expliquer la régression organique d'espèces parasitaires, ainsi que l'adaptation d'animaux cavernicoles à l'obscurité totale, explique, suivant l'auteur, ces faits: il s'agit de l'absence de sélection, du mélange sans préférences. En effet, on doit s'attendre à ce que les mutations soient indépendantes soit des exigences du milieu, soit des conditions d'harmonie interne, et par là presque toujours léthales ou alors régressives. Si la descendance de telles mutantes n'est pas éliminée, la régression va s'étendre en raison des lois de l'hérédité. Un niveau élevé d'adaptation est donc obtenu et conservé *de haute lutte* contre une dégringolade toujours menaçante, l'abondance normale de la reproduction fournissant le matériel à la sélection.

Le danger de panmixie guette ainsi toute association d'êtres vivants, les individus biologiquement inférieurs étant protégés comme les faibles qui sont tels, soit en raison du stade de déve-