Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 27 (1945)

Artikel: Sur la mécanique ondulatoire : des corpuscules élémentaires [fin]

Autor: Kwal, Bernard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742485

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL 1

(fin)

RÉSUMÉ.

Nous étendons le principe fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste à toutes les grandeurs physiques, ce qui nous permet d'aborder l'étude des équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement.

Nous formons tout d'abord les équations primaires pour le corpuscule de spin ½, nous passons ensuite au cas du spin 1 et du spin 3/2. Nous écrivons les équations composées pour le spin ½ dans le cas général et les équations primaires et composées pour le corpuscule de Dirac. Nous terminons par les équations composées pour le corpuscule de spin 1.

- 7. LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE RELATIVISTE ET LES ÉQUATIONS D'ONDE ASSOCIÉES AU MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT.
 - 7.0. Le théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste s'exprime de la manière suivante:
- « Les équations primaires, qui définissent les états possibles du corpuscule de spin ½, s'établissent en remplaçant par les
- ¹ Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

Archives. Vol. 27. — Novembre-Décembre 1945.

opérateurs — $\frac{h}{i} \, \delta_k + \frac{e}{c} \, A_k$ et $\frac{h}{i} \, \delta_t + e V$ les composantes p_k et $\frac{W}{c}$ du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, dans la formule de transformation relativiste, reliant à la valeur de ce quadrivecteur dans le référentiel de l'observateur, la valeur que possède ce quadrivecteur dans un des référentiels possibles du corpuscule. »

En plaçant l'observateur dans le système propre du corpuscule, la méthode de composition nous fournit les équations de Dirac et les équations valables pour les corpuscules massifs de spin quelconque. En plaçant l'observateur dans un référentiel galiléen arbitraire, on aboutit aux équations qui sont applicables également aux corpuscules limites, se mouvant avec la vitesse de la lumière.

Le principe, tel qu'il se trouve exprimé plus haut, met en vedette le quadrivecteur-quantité de mouvement-énergie. Il est susceptible d'une extension à toutes les grandeurs physiques, associées au corpuscule, en lui donnant l'énoncé suivant:

« Les équations primaires qui définissent les états propres d'une grandeur physique, associée au corpuscule de spin ½, s'obtiennent, en remplaçant judicieusement par les opérateurs quantiques, les expressions non quantiques correspondantes, dans les formules de transformation relativiste, reliant la valeur que possède la grandeur physique en question dans un des référentiels possibles, à la valeur qu'elle possède dans un référentiel galiléen arbitraire. »

7.1. Les équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement du corpuscule de spin ½.

Illustrons le principe fondamental par un exemple précis, celui du moment de la quantité de mouvement. Considérons deux matrices, la matrice X

$$X = \begin{vmatrix} x_4 - x_3 & , & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & , & x_4 + ix_3 \end{vmatrix}, \quad (x_4 = ct) \quad (7.1 \ a)$$

et la matrice $\overline{P} = P^2 P^{-1}$

$$\widetilde{P} = \begin{vmatrix} \frac{W}{c} + p_3, & -(p_1 + ip_2) \\ -(p_1 - ip_2), & \frac{W}{c} - p_3 \end{vmatrix}$$
(7.1 b)

X et P obéissent aux transformations de Lorentz

$$X = \psi^{-1} X' \tilde{\psi}^* , \qquad \tilde{P} = \tilde{\psi}^{*-1} \tilde{P}' \psi . \qquad (7.1 c)$$

Il en résulte, pour l'expression $M = \overline{XP}$, la transformation

$$\mathbf{M} = \psi^{-1} \,\mathbf{M}' \,\psi \,. \tag{7.1 d}$$

En posant

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{M_1} & \mathbf{M_2} \\ \mathbf{M_3} & \mathbf{M_4} \end{vmatrix} \tag{7.1 e}$$

nous avons

$$\begin{split} \mathbf{M_1} &= \mathbf{M_0} + \mathbf{M_{43}} + i \, \mathbf{M_{12}} &, \quad \mathbf{M_2} &= \mathbf{M_{31}} - \mathbf{M_{41}} - i \, (\mathbf{M_{23}} + \mathbf{M_{42}}) \\ \mathbf{M_3} &= - \left(\mathbf{M_{31}} + \mathbf{M_{41}} \right) + i \, (\mathbf{M_{42}} - \mathbf{M_{23}}) \,, \quad \mathbf{M_4} &= \mathbf{M_0} - \mathbf{M_{43}} - i \, \mathbf{M_{12}} \\ \mathbf{M_0} &= x_4 \frac{\mathbf{W}}{c} - x_3 \, p_3 - x_2 \, p_2 - x_1 \, p_1 \,, \quad \mathbf{M_{ik}} = x_i \, p_k - x_k \, p_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \end{split}$$

Nous allons quantifier l'équation (d) en l'écrivant tout d'abord comme suit:

$$\mathbf{M}' \psi = \psi \mathbf{M} \tag{7.1 d'}$$

et en posant ensuite:

$$p_{h} = -\frac{h}{i} \delta_{h} , \qquad p'_{4} = \frac{W'}{c} = \frac{h}{i} \delta_{t} , \qquad (7.1 \text{ g})$$

ce qui nous conduit à « l'équation d'ondes primaire, associée à l'opérateur moment de la quantité de mouvement, relatif au corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ »:

En explicitant cette équation, il vient:

$$M_{1} \psi_{1} + M_{2} \psi_{2} = i/h (\psi_{1} M_{1} + \psi_{3} M_{3})$$

$$M_{3} \psi_{1} + M_{4} \psi_{2} = i/h (\psi_{2} M_{1} + \psi_{4} M_{3})$$

$$M_{1} \psi_{3} + M_{2} \psi_{4} = i/h (\psi_{1} M_{2} + \psi_{3} M_{4})$$

$$M_{3} \psi_{3} + M_{4} \psi_{4} = i/h (\psi_{2} M_{2} + \psi_{4} M_{4})$$

$$(7.1 i)$$

7.2. Les équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement du corpuscule uniondulatoire de spin 1 et $^3/_2$.

Comme dans le cas des équations, associées au quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, nous avons deux systèmes d'équations primaires pour le spin 1, quatre pour le spin $^{3}/_{2}$, etc.

SPIN 1.

Premier système.

$$\begin{bmatrix}
1 \times M \end{bmatrix} \psi = i/h \psi \begin{bmatrix} 1 \times M \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad M_1^1 \psi = i/h \psi M_1^1 \\
[M \times 1] \psi = i/h \psi [M \times 1] \quad \text{ou} \quad M_2^1 \psi = i/h \psi M_2^1
\end{bmatrix} (7.2 a)$$

Nous allons écrire également ces équations en notation spinorielle:

$$\begin{array}{l} M_0 \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} + \, M_{\alpha_1}^{\ \ \, \epsilon_1} \, \psi_{\epsilon_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} = \, i/h \left[\psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \epsilon_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} \, \mathbf{M}_{\epsilon_1}^{\ \ \, \delta_1} + \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} \, \mathbf{M}_0 \right] \, \right) \quad \widehat{\mathbf{g}} \\ M_0 \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} + \, M_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \epsilon_2}^{\ \ \, \delta_2} = \, i/h \left[\psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \epsilon_2} \, \mathbf{M}_{\epsilon_2}^{\ \ \, \delta_2} + \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\ \ \, \alpha_2}^{\ \ \, \delta_2} \, \mathbf{M}_0 \right] \, \right) \quad \widehat{\mathbf{g}} \\ \widehat{\mathbf{g}}$$

Deuxième système.

$$[1 \times M^*] \psi = -i/h \psi [1 \times M^*]$$
 ou $M^{*_1}_1 \psi = -i/h \psi M^{*_1}_1$ $\geqslant 2$ $(M \times 1) \psi = i/h \psi [M \times 1]$ ou $M^1_2 \psi = i/h \psi M^1_2$

$$\begin{array}{c} M_0 \, \psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\alpha_2} ^{\delta_2} + \, M_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\epsilon_1} \, \psi_{\dot{\epsilon}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\alpha_2} ^{\delta_2} = - \, i/h \left[\psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\epsilon_1}_{\alpha_2} ^{\delta_2} \, M_{\dot{\epsilon}_1} \overset{\cdot}{\gamma} \, + \, \psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\alpha_2} ^{\delta_2} \, M_0 \right] \\ M_0 \, \psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\alpha_2} ^{\delta_2} + \, M_{\alpha_2} \overset{\epsilon_2}{\epsilon_2} \, \psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\epsilon_2} ^{\delta_2} = \, - \, i/h \left[\psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\alpha_2} ^{\epsilon_2} \, M_{\epsilon_2} \overset{\delta_2}{\epsilon_2} + \, \psi_{\dot{\beta}_1} \overset{\cdot}{\gamma_1}_{\alpha_2} ^{\delta_2} \, M_0 \right] \end{array} \right) \quad \stackrel{\stackrel{\cdot}{\epsilon_1}}{\simeq} \\ \overset{\cdot}{\simeq} M_0 \overset{\cdot}{\downarrow} \overset{\cdot$$

SPIN $^{3}/_{2}$.

Premier système.

$$M_{_{1}}^{^{3/2}}\,\psi=\,i/h\,\psi\,M_{_{1}}^{^{3/2}}\,,\quad M_{_{2}}^{^{3/2}}\,\psi=\,i/h\,\psi\,M_{_{2}}^{^{3/2}}\,,\quad M_{_{3}}^{^{3/2}}\,\psi=\,i/h\,\psi\,M_{_{3}}^{^{3/2}}$$
 (7.2 c)

$$\begin{split} M_0 \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} + M_{\alpha_1}^{\ \ \, \epsilon_1} \, \psi_{\epsilon_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} = \\ & = i/h \left[\psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \epsilon_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} \, M_{\epsilon_1}^{\ \ \, \delta_1} + \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} \, M_0 \right] \\ M_0 \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} + M_{\alpha_2}^{\ \ \, \epsilon_2} \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\epsilon_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} = \\ & = i/h \left[\psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \epsilon_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} + \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} \, M_0 \right] \\ M_0 \, \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} + M_{\alpha_3}^{\ \ \, \epsilon_3} \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\epsilon_3}^{\ \ \, \delta_3} = \\ & = i/h \left[\psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \epsilon_3} \, M_{\epsilon_3}^{\ \ \, \delta_3} + \psi_{\alpha_1}^{\ \ \, \delta_1}_{\alpha_2}^{\ \ \, \delta_2}_{\alpha_3}^{\ \ \, \delta_3} \, M_0 \right] \end{split}$$

Deuxième système.

$$\begin{split} M_{1}^{*\,3/2}\,\psi &= -i/h\,\psi\,M_{1}^{*\,3/2}\,,\quad M_{2}^{3/2}\,\psi = i/h\,\psi\,M_{2}^{3/2}\,,\quad M_{3}^{3/2}\,\psi = i/h\,\psi\,M_{3}^{3/2}\,\\ &\qquad \qquad (7.2\,d) \end{split}$$

$$M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\epsilon}_{1}}\,\psi_{\dot{\epsilon}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ &= -i/h\left[\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\epsilon}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,M_{\dot{\epsilon}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,+\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,M_{0}\right]\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{2}}\,^{\epsilon_{2}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\epsilon_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ &= i/h\left[\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\epsilon_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,M_{\dot{\epsilon}_{2}}\,^{\delta_{2}}\,+\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,M_{0}\right]\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\epsilon_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\epsilon_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\epsilon_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\epsilon_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\epsilon_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\epsilon_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{2}}\,_{\alpha_{3}}\,^{\delta_{3}}\,+\,M_{\alpha_{3}}\,^{\epsilon_{3}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\delta_{3}}\,^{\delta_{3}}\,=\\ M_{0}\,\psi_{\dot{\beta}_{1}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\dot{\gamma}_{2}}\,^{\dot{\gamma}_{1}}\,_{\alpha_{2}}\,^{\dot{\gamma}_{2}}\,^{\dot$$

 $= \mathit{i/h} \left[\psi_{\dot{\beta}_{1}}^{\dot{\gamma}_{1}} {}^{\delta_{2}}_{\alpha_{2}} {}^{\epsilon_{3}} \, \mathrm{M}_{\epsilon_{3}}^{\delta_{3}} + \psi_{\dot{\beta}_{1}}^{\dot{\gamma}_{1}} {}^{\delta_{2}}_{\alpha_{2}} {}^{\delta_{3}} \, \mathrm{M}_{0} \right]$

Troisième système.

$$\begin{split} M_{1}^{3/2} \, \psi &= i/h \, \psi \, M_{1}^{3/2} \, , \quad M_{2}^{*\, 3/2} \, \psi = -i/h \, \psi \, M_{2}^{*\, 3/2} \, , \quad M_{3}^{3/2} \, \psi = i/h \, \psi \, M_{3}^{3/2} \\ & \qquad \qquad (7.2 \, e) \end{split}$$

$$M_{0} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, + \, M_{\alpha_{1}}^{\, \, \epsilon_{1}} \, \psi_{\epsilon_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, = \\ &= i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \epsilon_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, M_{\epsilon_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, M_{0} \right] \\ M_{0} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, + \, M_{\dot{\beta}_{2}}^{\, \, \epsilon_{2}} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\epsilon}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, = \\ &= -i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\epsilon}_{2}} \, \alpha_{3}^{\, \, \delta_{3}} \, M_{\dot{\epsilon}_{2}}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, M_{0} \right] \\ M_{0} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, + \, M_{\alpha_{3}}^{\, \, \epsilon_{3}} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, = \\ &= i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \alpha_{3}^{\, \, \delta_{3}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\, \, \, \delta_{1}} \, \dot{\beta}_{2}^{\, \, \dot{\gamma}_{2}} \, \delta_{3} \, M_{0} \right] \end{split}$$

Quatrième système.

$$\begin{split} M_{1}^{3/2} \psi &= i/h \, \psi \, M_{1}^{3/2} \, , \quad M_{2}^{3/2} \, \psi = i/h \, \psi \, M_{2}^{3/2} \, , \quad M_{3}^{*\, 3/2} \, \psi = -i/h \, \psi \, M_{3}^{*\, 3/2} \\ &\qquad \qquad (7.2 \, f) \end{split}$$

$$M_{0} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, M_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \epsilon_{1}} \, \psi_{\epsilon_{1}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, = \\ &= i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \epsilon_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{\epsilon_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{0} \right] \\ M_{0} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, M_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \epsilon_{2}} \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{0} \right] \\ = i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \epsilon_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{\epsilon_{2}}^{\dot{\delta}_{2}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\gamma}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{0} \right] \\ = -i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\epsilon}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{\dot{\epsilon}_{2}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\gamma}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{0} \right] \\ = -i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\epsilon}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{\dot{\epsilon}_{2}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\gamma}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{0} \right] \\ = -i/h \, \left[\psi_{\alpha_{1}}^{\ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\ \, \delta_{2}} \, {}_{\dot{\epsilon}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\dot{\delta}_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\dot{\delta}_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, + \, \psi_{\alpha_{1}}^{\ \, \delta_{1}} \, {}_{\alpha_{2}}^{\dot{\delta}_{2}} \, {}_{\dot{\beta}_{3}}^{\dot{\gamma}_{3}} \, M_{0} \right]$$

7.3. Equations composées et mixtes composées.

Afin d'obtenir les équations composées, relatives au spin ½, nous prendrons deux systèmes simultanés d'équations primaires

avec des fonctions d'onde $^1\psi$ et $^2\psi$ respectivement, et nous poserons:

on obtient

$$\begin{bmatrix} M_0 \, + \, i \left(M_1^2 \, \beta_4^3 \, + \, M_2^3 \, \beta_4^1 \, + \, M_3^1 \, \beta_4^2 \right) \, + \\ \\ + \, M_4^1 \, \alpha_1^4 \, + \, M_4^2 \, \alpha_2^4 \, + \, M_4^3 \, \alpha_3^4 \right] \Psi \, = \\ \\ = \, i / h \left[\beta_4^4 \, \mathrm{M}_0 \, + \, i \left(\mathrm{M}_1^2 \, \alpha_3^4 \, + \, \mathrm{M}_2^3 \, \alpha_1^4 \, + \, \mathrm{M}_3^1 \, \alpha_2^4 \right) \, + \\ \\ + \, M_4^1 \, \beta_1^4 \, + \, M_4^2 \, \beta_4^2 \, + \, M_4^3 \, \beta_4^3 \right] \Psi \; . \end{cases}$$

Or les opérateurs β_i^n correspondent aux composantes du tenseur β_i^{jkl} , antisymétrique gauche en trois derniers indices:

$$\beta_i^1 \longrightarrow \beta_i^{234}$$
, $\beta_i^2 \longrightarrow \beta_i^{314}$, $\beta_i^3 \longrightarrow \beta_i^{124}$ et $\beta_i^4 \longrightarrow \beta_i^{123}$ (7.3 c)

Il s'ensuit que l'on peut écrire les équations précédentes de la manière que voici:

ou, d'une manière plus générale:

le tenseur $\varepsilon^{nmkl} = 0$, si deux des nombres n, m, k, l sont égaux et $= \pm 1$ suivant que ces nombres forment une permutation paire ou impaire par rapport à 1, 2, 3 et 4.

7.4. Retour au corpuscule de spin ½ de Dirac.

Nous avons montré que les équations de Dirac sont des équations composées de premier rang du corpuscule de spin ½, dans le cas où les équations primaires correspondent à la transformation de Lorentz entre le référentiel, où le corpuscule est au repos, et un référentiel possible. Ecrivons les équations de Dirac sous la forme suivante:

$$\alpha_{i} \partial_{i} \psi = \alpha \frac{i}{h} m_{0} c \psi , \quad \text{avec}$$

$$\alpha_{1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha_{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha_{3} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_{4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Quelle forme prendrons dans ce cas les équations d'onde associées à l'opérateur du moment de la quantité de mouvement? Dans le système propre nous avons:

L'équation primaire, associée au moment de la quantité de mouvement, s'écrira donc:

$$M \psi = i/h m_0 c X \tilde{\psi}^*$$
 avec $\psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix}$ (7.4 c)

ou, en notation spinorielle:

$$M_0 \psi_{\alpha} + M_{\alpha}^{\epsilon} \psi_{\epsilon} = i/h \, m_0 \, c \, x_{\alpha \epsilon} \, \psi^{\epsilon} . \qquad (7.4 \, c')$$

En explicitant, nous avons:

$$[M_{0} - M_{43} - i M_{12}] \psi_{1} + [-(M_{31} - M_{41}) + i (M_{23} + M_{42})] \psi_{2} =$$

$$= i \frac{m_{0} c}{h} [-(x_{4} - x_{3}) \psi_{2}^{*} + (x_{1} + i x_{2}) \psi_{1}^{*}]$$

$$[M_{31} + M_{41} - i (M_{42} - M_{23})] \psi_{1} + [M_{0} + M_{43} + i M_{12}] \psi_{2} =$$

$$= i \frac{m_{0} c}{h} [+(x_{4} + x_{3}) \psi_{1}^{*} - (x_{1} - i x_{2}) \psi_{2}^{*}] .$$

Pour obtenir les équations composées, nous allons écrire une deuxième équation primaire:

$$M^2 \psi = i/h \, m_0 \, c \, X^2 \tilde{\psi}^*$$
 (7.4 d)

et nous allons poser:

Il vient alors:

$$\left[M_{0} + i M_{12} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + i M_{23} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + i M_{31} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + M_{41} \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + M_{42} \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} + M_{43} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right] \Psi =$$

$$= \frac{i m_{0} c}{h} \left[x_{4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + i x_{3} \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix} + i x_{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + i x_{1} \begin{vmatrix} 0 & 0 - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] \Psi .$$

$$+ i x_{1} \begin{vmatrix} 0 & 0 - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 - i & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] \Psi .$$

Equations qui s'écrivent d'une manière condensée au moyen des matrices de la théorie de Dirac:

$$\left[\alpha_{4} M_{0} + M_{4k} \alpha^{k} + i M_{kl} \alpha_{4}^{kl}\right] \Psi = i m_{0} c / h \left[--\alpha x_{4} + i x_{k} \alpha_{4}^{k}\right] \Psi$$
(7.4 g)

ou, d'une manière plus générale:

$$\left[\alpha_{j} M_{0} + M_{jk} \alpha^{k} + i M_{kl} \alpha_{j}^{kl}\right] \Psi = i m_{0} c/h \left[-\alpha x_{j} + i x_{k} \alpha^{k}_{j}\right] \Psi$$

$$(7.4 h)$$

 $\alpha_j^{\ k}$ et $\alpha_j^{\ kl}$ sont les opérateurs-tenseurs à deux indices (densité de moment magnétique et électrique) et à trois indices, antisymétrique gauche (pseudo-quadrivecteur de spin).

7.5. Les équations d'onde associées au moment de la quantité du mouvement du corpuscule de spin 1.

Nous aurons affaire ici à deux fonctions de la forme ${}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}$ et ${}^2\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}$ et à deux fonctions de la forme ${}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2}{}_{\dot{\gamma}_2}$ et ${}^2\psi_{\gamma_1}{}^{\dot{\beta}_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}$, et les équations seront représentées par le système simultané suivant:

$$\begin{split} M_{0}\,^{(1)}\psi_{\alpha_{1}}\,^{\delta_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,+\,M_{\alpha_{1}}^{\quad\,\,\epsilon_{1}\,(1)}\psi_{\epsilon_{1}}\,^{\delta_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,=\\ &=\,i/h\left[^{(1)}\psi_{\alpha_{1}}^{\quad\,\,\epsilon_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,\mathrm{M}_{\epsilon_{1}}^{\quad\,\,\delta_{1}}\,+\,^{(1)}\psi_{\alpha_{1}}^{\quad\,\,\delta_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,\mathrm{M}_{0}\right]\\ M_{0}\,^{(1)}\psi_{\alpha_{1}}^{\quad\,\,\delta_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,+\,M^{\dot{\epsilon}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,^{(1)}\psi_{\alpha_{1}}^{\quad\,\,\delta_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\epsilon}_{2}\,=\\ &=\,-\,i/h\left[^{(1)}\psi_{\alpha}^{\quad\,\,\,\delta_{1}\dot{\epsilon}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,\mathrm{M}_{\dot{\epsilon}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,\mathrm{M}_{\dot{\epsilon}_{2}}\dot{\beta}_{2}\,+\,^{(1)}\psi_{\alpha_{1}}^{\quad\,\,\,\,\delta_{1}\dot{\beta}_{2}}\dot{\gamma}_{2}\,\mathrm{M}_{0}\right] \end{split}$$

$$\begin{split} M_0 \, {}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\delta_2} \, + \, M^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\epsilon}_1} \, {}^{(2)} \psi^{\dot{\epsilon}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\delta_2} = \\ & = \, - \, i / h \, \big[{}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\epsilon}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\delta_2} \, M^{\dot{\epsilon}_1} {}_{\dot{\gamma}_1} \, + \, {}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\delta_2} \, M_0 \big] & \\ M_0 \, {}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\delta_2} \, + \, M^{\varepsilon_2}_{ \ \ \, \alpha_2} \, {}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \varepsilon_2} \, {}^{\delta_2} = \\ & = \, i / h \, \big[{}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\varepsilon_2} \, M_{\varepsilon_2} \, {}^{\delta_2} \, + \, {}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}_1} {}_{\dot{\gamma}_1 \, \alpha_2} \, {}^{\delta_2} \, M_0 \big] & \end{split}$$

Le présent travail a été effectué au cours de longues années de captivité en Allemagne. Je remercie vivement le Comité international de la Croix-Rouge, ainsi que les hommes de confiance du Stalag IIA (Neubrandenburg i. Meckl.), grâce auxquels les parties successives de ce mémoire ont pu être transmises en Suisse. Je tiens à exprimer également toute ma gratitude envers M. le professeur E. C. G. Stueckelberg, de l'Institut de physique de l'Université de Genève, qui, non seulement a obtenu pour mon travail l'hospitalité des Archives des Sciences physiques et naturelles, mais s'est chargé, en outre, de la tâche ingrate de la correction des épreuves.

Paris, le 18 juin 1945.