Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 27 (1945)

Artikel: Sur la mécanique ondulatoire : des corpuscules élémentaires [fin]
Autor: Kwal, Bernard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742485

1945 Vol. 27 Novembre-Décembre

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL [1]

(fin)

RÉSUMÉ.

Nous étendons le principe fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste à toutes les grandeurs physiques, ce qui nous permet d'aborder l'étude des équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement.

Nous formons tout d'abord les équations primaires pour le corpuscule de spin $1/2$, nous passons ensuite au cas du spin 1 et du spin $3/2$. Nous écrivons les équations composées pour le spin $1/2$ dans le cas général et les équations primaires et composées pour le corpuscule de Dirac. Nous terminons par les équations composées pour le corpuscule de spin 1.

7. Le principe fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste et les équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement.

7.0. *Le théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste s'exprime de la manière suivante :*

« Les équations primaires, qui définissent les états possibles du corpuscule de spin $1/2$, s'établissent en remplaçant par les

[1] Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

opérateurs $-\frac{h}{i}\partial_k + \frac{e}{c}A_k$ et $\frac{h}{i}\partial_t + eV$ les composantes p_k et $\frac{W}{c}$ du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, dans la formule de transformation relativiste, reliant à la valeur de ce quadrivecteur dans le référentiel de l'observateur, la valeur que possède ce quadrivecteur dans un des référentiels possibles du corpuscule. »

En plaçant l'observateur dans le système propre du corpuscule, la méthode de composition nous fournit les équations de Dirac et les équations valables pour les corpuscules massifs de spin quelconque. En plaçant l'observateur dans un référentiel galiléen arbitraire, on aboutit aux équations qui sont applicables également aux corpuscules limites, se mouvant avec la vitesse de la lumière.

Le principe, tel qu'il se trouve exprimé plus haut, met en vedette le quadrivecteur-quantité de mouvement-énergie. Il est susceptible d'une extension à toutes les grandeurs physiques, associées au corpuscule, en lui donnant l'énoncé suivant:

« Les équations primaires qui définissent les états propres d'une grandeur physique, associée au corpuscule de spin $1/2$, s'obtiennent, en remplaçant judicieusement par les opérateurs quantiques, les expressions non quantiques correspondantes, dans les formules de transformation relativiste, reliant la valeur que possède la grandeur physique en question dans un des référentiels possibles, à la valeur qu'elle possède dans un référentiel galiléen arbitraire. »

7.1. *Les équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement du corpuscule de spin $1/2$.*

Illustrons le principe fondamental par un exemple précis, celui du moment de la quantité de mouvement. Considérons deux matrices, la matrice X

$$X = \begin{vmatrix} x_4 - x_3 \ , & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 \ , & x_4 + ix_3 \end{vmatrix}, \qquad (x_4 = ct) \quad (7.1\ a)$$

et la matrice $\overline{P} = P^2 P^{-1}$

$$\overline{P} = \begin{vmatrix} \frac{W}{c} + p_3 \,, & -(p_1 + ip_2) \\ -(p_1 - ip_2) \,, & \frac{W}{c} - p_3 \end{vmatrix} \qquad (7.1\,b)$$

X et $\overline{P}$ obéissent aux transformations de Lorentz

$$X = \psi^{-1} X' \tilde{\psi}^* \,, \qquad \overline{P} = \tilde{\psi}^{*-1} \overline{P}' \psi \,. \qquad (7.1\,c)$$

Il en résulte, pour l'expression $M = X\overline{P}$, la transformation

$$M = \psi^{-1} M' \psi \,. \qquad (7.1\,d)$$

En posant

$$M = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix} \qquad (7.1\,e)$$

nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} M_1 = M_0 + M_{43} + iM_{12} \,, & M_2 = M_{31} - M_{41} - i(M_{23} + M_{42}) \\ M_3 = -(M_{31} + M_{41}) + i(M_{42} - M_{23}) \,, & M_4 = M_0 - M_{43} - iM_{12} \end{array}\right\} \\ M_0 = x_4 \frac{W}{c} - x_3 p_3 - x_2 p_2 - x_1 p_1 \,, \quad M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \end{array}\right] \quad (7.1\,f)$$

Nous allons quantifier l'équation (*d*) en l'écrivant tout d'abord comme suit:

$$M' \psi = \psi M \qquad (7.1\,d')$$

et en posant ensuite:

$$p_k = -\frac{h}{i} \partial_k \,, \qquad p_4' = \frac{W'}{c} = \frac{h}{i} \partial_t \,, \qquad (7.1\,g)$$

ce qui nous conduit à « l'équation d'ondes primaire, associée à l'opérateur moment de la quantité de mouvement, relatif au corpuscule de spin ½ »:

$$\left.\begin{array}{ll} M\psi = i/h\,\psi M & \left(M_0 \psi_\alpha{}^\delta + M_\alpha{}^\beta \psi_\beta{}^\delta = i/h\left[\psi_\alpha{}^\delta M_0 + \psi_\alpha{}^\varepsilon M_\varepsilon{}^\delta\right]\right) \\ M = X\Delta & \left(M_\alpha{}^\beta = X_{\alpha\dot{\varepsilon}} D^{\dot{\varepsilon}\beta} \,, \quad M_0 = X_{\varepsilon_1\dot{\varepsilon}_2} D^{\dot{\varepsilon}_2\varepsilon_1}\right) \end{array}\right\} \quad (7.1\,h)$$

En explicitant cette équation, il vient:

$$\left.\begin{aligned} M_1\psi_1 + M_2\psi_2 &= i/h\,(\psi_1 \mathrm{M}_1 + \psi_3 \mathrm{M}_3) \\ M_3\psi_1 + M_4\psi_2 &= i/h\,(\psi_2 \mathrm{M}_1 + \psi_4 \mathrm{M}_3) \\ M_1\psi_3 + M_2\psi_4 &= i/h\,(\psi_1 \mathrm{M}_2 + \psi_3 \mathrm{M}_4) \\ M_3\psi_3 + M_4\psi_4 &= i/h\,(\psi_2 \mathrm{M}_2 + \psi_4 \mathrm{M}_4) \end{aligned}\right\} \quad (7.1\,i)$$

7.2. *Les équations d'onde associées au moment de la quantité de mouvement du corpuscule uniondulatoire de spin 1 et $^3/_2$.*

Comme dans le cas des équations, associées au quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, nous avons deux systèmes d'équations primaires pour le spin 1, quatre pour le spin $^3/_2$, etc.

Spin 1.

Premier système.

$$\left.\begin{aligned} [1 \times M]\psi &= i/h\,\psi[1 \times \mathrm{M}] \quad \text{ou} \quad M_1^1\psi = i/h\,\psi \mathrm{M}_1^1 \\ [M \times 1]\psi &= i/h\,\psi[\mathrm{M} \times 1] \quad \text{ou} \quad M_2^1\psi = i/h\,\psi \mathrm{M}_2^1 \end{aligned}\right\} \quad (7.2\,a)$$

Nous allons écrire également ces équations en notation spinorielle:

$$\left.\begin{aligned} M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,\psi_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} &= i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \\ M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} &= i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \end{aligned}\right\} \quad (7.2\,a')$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned} [1 \times M^*]\psi &= -\,i/h\,\psi[1 \times \mathrm{M}^*] \quad \text{ou} \quad M^{*1}_1\psi = -\,i/h\,\psi \mathrm{M}^{*1}_1 \\ [M \times 1]\psi &= i/h\,\psi[\mathrm{M} \times 1\,] \quad \text{ou} \quad M_2^1\psi = i/h\,\psi \mathrm{M}_2^1 \end{aligned}\right\} \quad (7.2\,b)$$

$$\left.\begin{aligned} M_0\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\dot\beta_1}{}^{\dot\varepsilon_1}\,\psi_{\dot\varepsilon_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} &= -\,i/h\left[\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_{\dot\varepsilon_1}{}^{\dot\gamma} + \psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \\ M_0\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} &= i/h\left[\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + \psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \end{aligned}\right\} \quad (7.2\,b')$$

SPIN $^3/_2$.

Premier système.

$$M^{3/2}_{1}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}^{3/2}_{1}\,, \quad M^{3/2}_{2}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}^{3/2}_{2}\,, \quad M^{3/2}_{3}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}^{3/2}_{3} \tag{7.2 c}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,\psi_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\varepsilon_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_3}{}^{\delta_3} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.2 c'}$$

Deuxième système.

$$M^{*\,3/2}_{1}\,\psi = -\,i/h\,\psi\,\mathrm{M}^{*\,3/2}_{1}\,, \quad M^{3/2}_{2}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}^{3/2}_{2}\,, \quad M^{3/2}_{3}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}^{3/2}_{3} \tag{7.2 d}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\dot\beta_1}{}^{\dot\varepsilon_1}\,\psi_{\dot\varepsilon_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = -\,i/h\left[\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_{\dot\varepsilon_1}{}^{\dot\gamma_1} + \psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + \psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\varepsilon_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_3}{}^{\delta_3} + \psi_{\dot\beta_1}{}^{\dot\gamma_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.2 d'}$$

Troisième système.

$$M_1^{3/2}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}_1^{3/2}\,,\quad M_2^{*\,3/2}\,\psi = -\,i/h\,\psi\,\mathrm{M}_2^{*\,3/2}\,,\quad M_3^{3/2}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}_3^{3/2} \tag{7.2 e}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,\psi_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\dot\beta_2}{}^{\dot\varepsilon_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\varepsilon_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = -\,i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_{\dot\varepsilon_2}{}^{\dot\gamma_2} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} + M_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\varepsilon_3}{}^{\delta_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_3}{}^{\delta_3} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\dot\beta_2}{}^{\dot\gamma_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.2 e'}$$

Quatrième système.

$$M_1^{3/2}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}_1^{3/2}\,,\quad M_2^{3/2}\,\psi = i/h\,\psi\,\mathrm{M}_2^{3/2}\,,\quad M_3^{*\,3/2}\,\psi = -\,i/h\,\psi\,\mathrm{M}_3^{*\,3/2} \tag{7.2 f}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,\psi_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3} = \\
&\qquad = i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3} + M_{\dot\beta_3}{}^{\dot\varepsilon_3}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\varepsilon_3}{}^{\dot\gamma_3} = \\
&\qquad = -\,i/h\left[\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\varepsilon_3}\,\mathrm{M}_{\dot\varepsilon_3}{}^{\dot\gamma_3} + \psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\dot\beta_3}{}^{\dot\gamma_3}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.2 f'}$$

7.3. *Equations composées et mixtes composées.*

Afin d'obtenir les équations composées, relatives au spin ½, nous prendrons deux systèmes simultanés d'équations primaires avec des fonctions d'onde ${}^1\psi$ et ${}^2\psi$ respectivement, et nous poserons:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\Psi_1 = {}^1\psi_1 + i\,{}^2\psi_1 + {}^1\psi_4^* + i\,{}^2\psi_4^* & \Psi_5 = {}^1\psi_3 + i\,{}^2\psi_3 + {}^1\psi_2^* + i\,{}^2\psi_2^* \\
\Psi_2 = {}^1\psi_1 + i\,{}^2\psi_1 - {}^1\psi_4^* - i\,{}^2\psi_4^* & \Psi_6 = {}^1\psi_3 + i\,{}^2\psi_3 - {}^1\psi_2^* - i\,{}^2\psi_2^* \\
\Psi_3 = {}^1\psi_2 + i\,{}^2\psi_2 + {}^1\psi_3^* + i\,{}^2\psi_3^* & \Psi_7 = {}^1\psi_4 + i\,{}^2\psi_4 + {}^1\psi_1^* + i\,{}^2\psi_1^* \\
\Psi_4 = {}^1\psi_2 + i\,{}^2\psi_2 - {}^1\psi_3^* - i\,{}^2\psi_3^* & \Psi_8 = {}^1\psi_4 + i\,{}^2\psi_4 - {}^1\psi_1^* - i\,{}^2\psi_1^* ,
\end{array}\right\} \quad (7.3\,a)$$

on obtient

$$\left.\begin{array}{l}
\big[M_0 + i\big(M_1^2\beta_4^3 + M_2^3\beta_4^1 + M_3^1\beta_4^2\big) + \\
\qquad\qquad + M_4^1\alpha_1^4 + M_4^2\alpha_2^4 + M_4^3\alpha_3^4\big]\Psi = \\
= i/h\big[\beta_4^4 \mathrm{M}_0 + i\big(\mathrm{M}_1^2\alpha_3^4 + \mathrm{M}_2^3\alpha_1^4 + \mathrm{M}_3^1\alpha_2^4\big) + \\
\qquad\qquad + M_4^1\beta_1^4 + M_4^2\beta_4^2 + M_4^3\beta_4^3\big]\Psi .
\end{array}\right\} \quad (7.3\,b)$$

Or les opérateurs $\beta_i^{\,n}$ correspondent aux composantes du tenseur $\beta_i^{\,jkl}$, antisymétrique gauche en trois derniers indices:

$$\beta_i^{\,1} \longrightarrow \beta_i^{\,234}\,,\quad \beta_i^{\,2} \longrightarrow \beta_i^{\,314}\,,\quad \beta_i^{\,3} \longrightarrow \beta_i^{\,124} \quad \text{et} \quad \beta_i^{\,4} \longrightarrow \beta_i^{\,123} \qquad (7.3\,c)$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire les équations précédentes de la manière que voici:

$$\left.\begin{array}{l}
\big[M_0\,\alpha_4^{\;4} + i/_2\big(M_{nm}\,\beta^{nm4}{}_4\big) + M^4{}_n\,\alpha_n{}^4\big]\Psi = \\
= h/i\,\varepsilon^{nmk,4}\big[{}^1/_6\,\mathrm{M}_0\,\beta_{n,m,k,4} + i/_2\,\mathrm{M}_{nm}\,\alpha_{k4} + \mathrm{M}_{ik}\,\beta_{nm4}{}^i\big]\Psi
\end{array}\right\} \quad (7.3\,d)$$

ou, d'une manière plus générale:

$$\left.\begin{array}{l}
\big[\alpha^l{}_j\,M_0 + i/_2\,M_{nm}\,\beta^{nml}{}_j + M^l{}_n\,\alpha^n{}_j\big]\Psi = \\
= h/i\,\varepsilon^{nmk,l}\big[{}^1/_6\,\mathrm{M}_0\,\beta_{nmk,j} + i/_2\,\mathrm{M}_{nm}\,\alpha_{kj} + \mathrm{M}_{ik}\,\beta_{nmj}{}^i\big]\Psi\ ;
\end{array}\right\} \quad (7.3\,e)$$

le tenseur $\varepsilon^{nmkl} = 0$, si deux des nombres n, m, k, l sont égaux et $= \pm 1$ suivant que ces nombres forment une permutation paire ou impaire par rapport à 1, 2, 3 et 4.

7.4. *Retour au corpuscule de spin ½ de Dirac.*

Nous avons montré que les équations de Dirac sont des équations composées de premier rang du corpuscule de spin ½, dans le cas où les équations primaires correspondent à la transformation de Lorentz entre le référentiel, où le corpuscule est au repos, et un référentiel possible. Ecrivons les équations de Dirac sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_i \partial_i \psi = \alpha \frac{i}{h} m_0 c \psi , \qquad \text{avec} \\
&\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} , \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \\
&\alpha_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} , \quad \alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .
\end{aligned}\right\} \tag{7.4 a}$$

Quelle forme prendrons dans ce cas les équations d'onde associées à l'opérateur du moment de la quantité de mouvement ? Dans le système propre nous avons:

$$\mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{23} = \mathrm{M}_{31} = 0 , \qquad \mathrm{M}_{4i} = - x_i m_0 c , \qquad \mathrm{M}_0 = x_4 m_0 c . \tag{7.4 b}$$

L'équation primaire, associée au moment de la quantité de mouvement, s'écrira donc:

$$M \psi = i/h \, m_0 c \, \mathrm{X} \, \tilde{\psi}^* \qquad \text{avec} \qquad \psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} \tag{7.4 c}$$

ou, en notation spinorielle:

$$M_0 \psi_\alpha + M_\alpha{}^\varepsilon \psi_\varepsilon = i/h \, m_0 c \, x_{\alpha\dot{\varepsilon}} \, \psi^{\dot{\varepsilon}} . \tag{7.4 c'}$$

En explicitant, nous avons:

$$\left.\begin{aligned}&[M_0 - M_{43} - i M_{12}]\psi_1 + \left[-(M_{31} - M_{41}) + i(M_{23} + M_{42})\right]\psi_2 = \\ &\qquad = i\frac{m_0 c}{h}\left[-(x_4 - x_3)\psi_2^* + (x_1 + i x_2)\psi_1^*\right] \\ &\left[M_{31} + M_{41} - i(M_{42} - M_{23})\right]\psi_1 + [M_0 + M_{43} + i M_{12}]\psi_2 = \\ &\qquad = i\frac{m_0 c}{h}\left[+(x_4 + x_3)\psi_1^* - (x_1 - i x_2)\psi_2^*\right].\end{aligned}\right\} \quad (7.4\,c'')$$

Pour obtenir les équations composées, nous allons écrire une deuxième équation primaire:

$$M\,{}^2\psi = i/h\, m_0\, c\, X\,{}^2\tilde{\psi}^* \qquad (7.4\,d)$$

et nous allons poser:

$$\left.\begin{aligned}&\psi = {}^1\psi + i\,{}^2\psi\,, \quad \theta = {}^1\psi - i\,{}^2\psi \\ &\Psi_1 = \psi_1 + i\theta_2^*\,, \quad \Psi_2 = \psi_1 - i\theta_2^*\,, \quad \Psi_3 = \psi_2 + i\theta_1^*\,, \quad \Psi_4 = \psi_2 - i\theta_1^*\,,\end{aligned}\right\} \quad (7.4\,e)$$

Il vient alors:

$$\left.\begin{aligned}&\left[M_0 + i M_{12}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} + i M_{23}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} + i M_{31}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} + \right.\\ &\left. + M_{41}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix} + M_{42}\begin{vmatrix}0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ -i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\end{vmatrix} + M_{43}\begin{vmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\right]\Psi = \\ &= \frac{i m_0 c}{h}\left[x_4\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix} + i x_3\begin{vmatrix}0 & i & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & -i & 0\end{vmatrix} + i x_2\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix} + \right.\\ &\left.\qquad + i x_1\begin{vmatrix}0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\end{vmatrix}\right]\Psi\,.\end{aligned}\right\} \quad (7.4\,f)$$

Equations qui s'écrivent d'une manière condensée au moyen des matrices de la théorie de Dirac:

$$[\alpha_4 M_0 + M_{4k}\alpha^k + iM_{kl}\,\alpha_4^{kl}]\Psi = im_0 c/h[-\alpha x_4 + i x_k\,\alpha_4^k]\Psi \tag{7.4 g}$$

ou, d'une manière plus générale:

$$[\alpha_j M_0 + M_{jk}\alpha^k + iM_{kl}\,\alpha_j^{kl}]\Psi = im_0 c/h[-\alpha x_j + i x_k\,\alpha^k{}_j]\Psi \tag{7.4 h}$$

α_j^k et α_j^{kl} sont les opérateurs-tenseurs à deux indices (densité de moment magnétique et électrique) et à trois indices, antisymétrique gauche (pseudo-quadrivecteur de spin).

7.5. *Les équations d'onde associées au moment de la quantité du mouvement du corpuscule de spin 1.*

Nous aurons affaire ici à deux fonctions de la forme ${}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}$ et ${}^2\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}$ et à deux fonctions de la forme ${}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2}{}_{\dot\gamma_2}$ et ${}^2\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}$, et les équations seront représentées par le système simultané suivant:

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,{}^{(1)}\psi_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} = \\
&\qquad = i/h\left[{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + {}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} = \\
&\qquad = i/h\left[{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + {}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.5 a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,{}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,{}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} = \\
&\qquad = i/h\left[{}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + {}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,{}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} + M_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,{}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} = \\
&\qquad = i/h\left[{}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + {}^{(2)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.5 b}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\gamma_2} + M_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,{}^{(1)}\psi_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\gamma_2} = \\
&\qquad = i/h\left[{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\gamma_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_1}{}^{\delta_1} + {}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\gamma_2}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\gamma_2} + M^{\dot{\varepsilon}_2 .}{}_{\gamma_2}\,{}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\varepsilon_2} = \\
&\qquad = -\, i/h\left[{}^{(1)}\psi_{\alpha}{}^{\delta_1\dot{\varepsilon}_2 .}{}_{\gamma_2}\,\mathrm{M}^{\,.}_{\varepsilon_2}{}^{\dot{\beta}_2} + {}^{(1)}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot{\beta}_2 .}{}_{\gamma_2}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\}\quad (7.5\,c)$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_0\,{}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2} + M^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\varepsilon_1}\,{}^{(2)}\psi^{\dot{\varepsilon}_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2} = \\
&\qquad = -\, i/h\left[{}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}^{\dot{\varepsilon}_1 .}{}_{\gamma_1} + {}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right] \\
&M_0\,{}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2} + M^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_2}\,{}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\gamma_1\varepsilon_2}{}^{\delta_2} = \\
&\qquad = i/h\left[{}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\,\mathrm{M}_{\varepsilon_2}{}^{\delta_2} + {}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}\,\mathrm{M}_0\right]
\end{aligned}\right\}\quad (7.5\,d)$$

Le présent travail a été effectué au cours de longues années de captivité en Allemagne. Je remercie vivement le Comité international de la Croix-Rouge, ainsi que les hommes de confiance du Stalag IIA (Neubrandenburg i. Meckl.), grâce auxquels les parties successives de ce mémoire ont pu être transmises en Suisse. Je tiens à exprimer également toute ma gratitude envers M. le professeur E. C. G. Stueckelberg, de l'Institut de physique de l'Université de Genève, qui, non seulement a obtenu pour mon travail l'hospitalité des *Archives des Sciences physiques et naturelles*, mais s'est chargé, en outre, de la tâche ingrate de la correction des épreuves.

Paris, le 18 juin 1945.