Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 27 (1945)

Artikel: Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires [suite]

Autor: Kwal, Bernard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742483

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL[1]

(suite)

QUATRIÈME PARTIE

Résumé.

Des nouvelles équations d'onde sont étudiées, équations applicables en particulier aux corpuscules se mouvant avec la vitesse de la lumière (les limitons chargés ou neutres).

On les obtient, en considérant la formule de transformation relativiste, reliant les valeurs que possède le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie dans un des référentiels possibles à la valeur qu'elle possède dans un référentiel galiléen quelconque par rapport au référentiel propre du corpuscule. On passe en revue les équations primaires et secondaires de corpuscules uniondulatoires de spin $1/2$, 1, $3/2$ et j, et celles, mixtes et mixtes composées du corpuscule biondulatoire de spin 1. Est ensuite examinée la théorie des ondes planes. Enfin, les équations composées de premier rang du corpuscule de spin $1/2$ sont soumises à un examen plus détaillé, qui porte

[1] Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

principalement sur les opérateurs matriciels, générateurs de formes bilinéaires, composantes de divers tenseurs d'espace-temps. Il est démontré que la divergence du tenseur de second rang, qui jour le rôle du flux de probabilité, est nulle lorsqu'on se place dans le cas des ondes planes.

6. Une généralisation relativiste des équations d'onde et la théorie des corpuscules limites.

6.1 *Equations d'onde du corpuscule de spin ½.*

Nous avons vu qu'en vertu du théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste, les équations primaires, sans le terme de masse, et, secondaires avec le terme de masse, qui définissent les états possibles du corpuscule de spin ½, s'établissent, en remplaçant par les opérateurs $-\frac{h}{i}\,\delta_k$ et $\frac{h}{i}\,\delta_t$ les composantes p_k et $\frac{\mathrm{W}}{c}$ du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie dans la formule de transformation relativiste, reliant à la valeur de la masse propre, les valeurs que possède ce quadrivecteur dans un des référentiels possibles du corpuscule. Comment ne pas se demander ce que deviennent les équations d'onde, si au lieu du référentiel privilégié où le corpuscule se trouve au repos nous prendrions appui sur un référentiel galiléen quelconque par rapport au référentiel propre ? Peut-être alors mainte difficulté qui s'attache à la formulation relativiste correcte de la mécanique ondulatoire va-t-elle pouvoir être levée, et, une théorie des corpuscules se mouvant avec la vitesse de la lumière, pour lesquels le référentiel propre n'est pas définissable, pourra-t-elle enfin être édifiée sur des bases solides.

Ecrivons donc, de la manière suivante, la formule de transformation relativiste du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie:

$$\overline{\mathrm{P}}\,\underset{\cdot}{\psi} = \tilde{\underset{\cdot}{\psi}}^{*}\,\overline{\mathrm{P}} \tag{6.1 a}$$

où l'on a posé

$$P = \begin{vmatrix} \frac{W}{c} - p_3 , & p_1 + i p_2 \\ p_1 - i p_2 , & \frac{W}{c} + p_3 \end{vmatrix} , \quad \overline{P} = \begin{vmatrix} \frac{W}{c} + p_3 , & -(p_1 + i p_2) \\ -(p_1 - i p_2) , & \frac{W}{c} - p_3 \end{vmatrix} , \qquad (6.1\,b)$$

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_1 , & \psi_3 \\ \psi_2 , & \psi_4 \end{vmatrix} , \quad \tilde{\psi} = \begin{vmatrix} -\psi_4 , & \psi_2 \\ \psi_3 , & -\psi_1 \end{vmatrix} . \qquad (6.1c)$$

En notation spinorielle l'équation (6.1a) s'écrit

$$P^{\dot{\beta}\alpha}\, \psi_{\alpha}{}^{\delta} = \psi^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}}\, P'^{\dot{\gamma}\delta} \qquad (6.1\,d)$$

Remplaçons-y $\frac{W}{c}$ et p_k par $\frac{h}{i}\, \partial_t$ et $-\frac{h}{i}\, \partial_k$, il vient

$$\Delta\psi = \frac{i}{h}\, \tilde{\Psi}^* \overline{P}' , \qquad \left(D^{\dot{\beta}\alpha}\, \psi_{\alpha}{}^{\delta} = \frac{i}{h}\, \psi^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}}\, P'^{\dot{\gamma}\delta}\right) \qquad (6.1\,e)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial_t - \partial_3 , & \partial_1 + i\partial_2 \\ \partial_1 - i\partial_2 , & \partial_t + \partial_3 \end{vmatrix} . \qquad (6.1f)$$

Explicitons les équations (6.1e):

$$\left.\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_3)\, \psi_1 + (\partial_1 + i\partial_2)\, \psi_2 &= -\frac{i}{h}\left[\left(\frac{W'}{c} + p'_3\right)\psi_4^* + \left(p'_1 - i p'_2\right)\psi_2^*\right] \\
(\partial_1 - i\partial_2)\, \psi_1 + (\partial_t + \partial_3)\, \psi_2 &= \frac{i}{h}\left[\left(\frac{W'}{c} + p'_3\right)\psi_3^* + \left(p'_1 - i p'_2\right)\psi_1^*\right] \\
(\partial_t - \partial_3)\, \psi_3 + (\partial_1 + i\partial_2)\, \psi_4 &= \frac{i}{h}\left[\left(p'_1 + i p'_2\right)\psi_1^* + \left(\frac{W'}{c} - p'_3\right)\psi_2^*\right] \\
(\partial_1 - i\partial_2)\, \psi_3 + (\partial_t + \partial_3)\, \psi_4 &= -\frac{i}{h}\left[\left(p'_1 + i p'_2\right)\psi_4^* + \left(\frac{W'}{c} - p'_3\right)\psi_1^*\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1\,g)$$

Dans le dessein de supplanter les fonctions complexes conjuguées dans les membres de droite des équations (6.1g) par les mêmes fonctions qui figurent dans les membres de gauche, nous allons former les équations composées de premier rang. Soient deux systèmes simultanés d'équations primaires:

$$\Delta\, {}^1\psi = \frac{i}{h}\, {}^1\tilde{\psi}^* \overline{P} , \qquad \Delta\, {}^2\psi = \frac{i}{h}\, {}^2\tilde{\psi}^* \overline{P} \qquad (6.1\,h)$$

et, commençons par poser

$$\psi = {}^1\psi + i\,{}^2\psi\,, \qquad \theta = {}^1\psi - i\,{}^2\psi\,, \tag{6.1 i}$$

on obtient alors

$$\Delta\,\psi = \frac{i}{h}\,\tilde{\theta}^*\,\overline{\mathrm{P}}\,, \qquad \Delta\,\theta = \frac{i}{h}\,\tilde{\psi}^*\,\overline{\mathrm{P}}\,. \tag{6.1 j}$$

En prenant pour fonction d'onde la matrice

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_3 \\ \psi_2 & \psi_4 \\ \theta_1^* & \theta_3^* \\ \theta_2^* & \theta_4^* \end{vmatrix}\,, \qquad \tilde{\Psi} = \begin{vmatrix} -\theta_4^* & \theta_2^* \\ \theta_3^* & -\theta_1^* \\ \psi_4 & -\psi_2 \\ -\psi_3 & \psi_1 \end{vmatrix}\,, \tag{6.1 k}$$

les équations (6.1 j) prennent la forme que voici:

$$(\partial_t + \alpha_k\,\partial_k)\,\Psi = \frac{i}{h}\,\tilde{\Psi}\,(p_t - \alpha_k\,p_k) \tag{6.1 l}$$

avec

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\,, \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix}\,, \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,. \tag{6.1 m}$$

Nous pouvons aussi écrire ces équations de manière que la fonction d'onde Ψ soit colloquée à droite des opérateurs matriciels. Nous poserons à cette fin:

$$\left.\begin{array}{llll} \Psi_1 = \psi_1 + \theta_4^*\,, & \Psi_3 = \psi_2 + \theta_3^*\,, & \Psi_5 = \psi_3 + \theta_2^*\,, & \Psi_7 = \psi_4 + \theta_1^* \\ \Psi_2 = \psi_1 - \theta_4^*\,, & \Psi_4 = \psi_2 - \theta_3^*\,, & \Psi_6 = \psi_3 - \theta_2^*\,, & \Psi_8 = \psi_4 - \theta_1^* \end{array}\right\} \tag{6.1 n}$$

ce qui conduit aux équations:

$$
\left\{ \partial_t + \left|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
& & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
& 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
& & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right| \partial_1 + \left|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & i & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & i & & 0 & & \\
-i & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & -i & 0 & 0 & & & & \\
\hline
& & & & 0 & 0 & i & 0 \\
& 0 & & & 0 & 0 & 0 & i \\
& & & & -i & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & -i & 0 & 0
\end{array}\right| \partial_2 + \right.
$$

$$
\left|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
\hline
& & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\
& 0 & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
& & & & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right| \partial_3 \Big\} \Psi = \frac{i}{h} \Big\{ \left|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
\hline
& & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\
& 0 & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
& & & & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right| p_t +
$$

$$
+ \left|\begin{array}{cccc|cccc}
& & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
& 0 & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\
& & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & & & &
\end{array}\right| p_1 + \left|\begin{array}{cccc|cccc}
& & & & 0 & i & 0 & 0 \\
& 0 & & & -i & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 0 & 0 & -i \\
& & & & 0 & 0 & i & 0 \\
\hline
0 & i & 0 & 0 & & & & \\
-i & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & -i & & & & \\
0 & 0 & i & 0 & & & &
\end{array}\right| p_2 +
$$

$$
+ \left|\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
\hline
& & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
& & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
& & & & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right| p_3 \Big\} \Psi \qquad (6.1\,o)
$$

Equation dont nous condenserons l'écriture comme suit:

$$(\partial_t + \beta_k \partial_k)\Psi = \frac{i}{h} \gamma_k p_k \Psi \ , \quad (p_4 = i p_t) \qquad (6.1\,o')$$

Les matrices β_k et γ_k vérifient les relations que voici:

$$\left.\begin{array}{ll}
\beta_k \beta_l + \beta_l \beta_k = 2\,\delta_{kl} & k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\
\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 2\,\delta_{kl} & k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\
\beta_k \gamma_l + \gamma_l \beta_k = 0 & k = 1,\ 2,\ 3\ ,\quad l = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ .
\end{array}\right\} \qquad (6.1p)$$

On vérifie que l'on a

$$\left.\begin{aligned} \square\,\Psi &= (\partial_t - \beta_k\,\partial_k)\,(\partial_t + \beta_k\,\partial_k)\,\Psi = \frac{i}{h}\,\gamma_k\,p_k\,(\partial_t + \beta_k\,\partial_k)\,\Psi \\ &= -\,\frac{\mathrm{P}^2}{h^2}\,\Psi\ , \qquad \left(\mathrm{P}^2 = p_t^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\right)\ . \end{aligned}\right\} \quad (6.1\,q)$$

6.2 *Equations d'onde des corpuscules uniondulatoires de spin 1, ³/₂ et* j.

1. *Spin 1.*

(*a*) Premier système.

$$\left.\begin{aligned} [1 \times \Delta]\,\psi &= \frac{i}{h}\,\tilde{\varphi}^*[1 \times \overline{\mathrm{P}}]\ , & D^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} &= \frac{i}{h}\,\psi^{\dot\beta_1\,.}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}\ \mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\ [\Delta \times 1]\,\psi &= \frac{i}{h}\,\varphi\,[\overline{\mathrm{P}} \times 1]\ , & D^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} &= \frac{i}{h}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\,.}{}_{\varepsilon_2}\ \mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \\ [1 \times \Delta]\,\varphi &= \frac{i}{h}\,\tilde{\psi}^*[1 \times \overline{\mathrm{P}}]\ , & D^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\,.}{}_{\gamma_2} &= \frac{i}{h}\,\psi^{\dot\beta_1\,.}{}_{\varepsilon_1}{}^{\dot\beta_2\,.}{}_{\gamma_2}\ \mathrm{P}^{\varepsilon_1\delta_1} \\ [\underline{\Delta} \times 1]\,\varphi &= -\frac{i}{h}\,\psi\,[\mathrm{P} \times 1]\ , & D_{\alpha_2\dot\beta_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\,.}{}_{\gamma_2} &= -\frac{i}{h}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\ \mathrm{P}_{\varepsilon_2\dot\gamma_2} \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,a)$$

(*b*) Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned} [1 \times \Delta]\,\psi &= \frac{i}{h}\,\varphi\,[1 \times \overline{\mathrm{P}}]\ , & D^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} &= \frac{i}{h}\,\psi^{\dot\beta_1\,.}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}\ \mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\ [\Delta \times 1[\ \psi &= \frac{i}{h}\,\tilde{\varphi}^*[\overline{\mathrm{P}} \times 1]\ , & D^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2} &= \frac{i}{h}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\,.}{}_{\varepsilon_2}\ \mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \\ [1 \times \underline{\Delta}]\,\varphi &= -\frac{i}{h}\,\psi\,[1 \times \mathrm{P}]\ , & D_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi^{\dot\beta_1\,.}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2} &= -\frac{i}{h}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\ \mathrm{P}_{\varepsilon_1\dot\gamma_1} \\ [\Delta \times 1]\,\varphi &= \frac{i}{h}\,\tilde{\psi}^*[\overline{\mathrm{P}} \times 1]\ , & D^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi^{\dot\beta_1\,.}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2} &= \frac{i}{h}\,\psi^{\dot\beta_1\,.}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\,.}{}_{\varepsilon_2}\ \mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,b)$$

Attendu que l'on a les relations, faciles à établir:

$$\tilde{\psi} = [\sigma \times \sigma]\,\psi\,[\sigma \times \sigma]\ , \qquad (6.2\,c)$$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{c} + p^{1/2}\ , \qquad \overline{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{W}}{c} - p^{1/2} \qquad (6.2\,d)$$

$$p^{1/2} = \begin{vmatrix} -p_3\ , & p_1 + i\,p_2 \\ p_1 - i\,p_2\ , & p_3 \end{vmatrix} \qquad (6.2\,e)$$

$$\mathrm{P}^* = \sigma\,\overline{\mathrm{P}}\,\sigma\ , \qquad (6.2\,f)$$

la première des équations (6.2 a) s'écrit

$$\left(\delta_t + S_1^1\right) \psi = \frac{i}{h}[\sigma \times \sigma]\, \varphi^* [\sigma \times \sigma][1 \times \overline{P}] \qquad (6.2\,g)$$

et les autres équations, d'une manière analogue.

Pour obtenir les équations composées, nous écrirons pour chaque système une double série d'équations; l'une faisant intervenir les fonctions $^1\psi$ et $^1\varphi$ et, l'autre, identique à la première, avec les fonctions $^2\psi$ et $^2\varphi$. Posons alors

$$\left.\begin{aligned} {}^1\Psi &= {}^1\psi + i\,{}^2\psi\,, & {}^3\Psi &= [\sigma \times \sigma]\,({}^1\varphi^* + i\,{}^2\varphi^*)\,[\sigma \times \sigma] \\ {}^2\Psi &= {}^1\psi + i\,{}^2\varphi\,, & {}^4\Psi &= [\sigma \times \sigma]\,({}^1\psi^* + i\,{}^2\psi^*)\,[\sigma \times \sigma] \end{aligned}\right\} \qquad (6.2\,h)$$

Il vient:

Premier système.

$$\left.\begin{aligned} \left\{\partial_t + [\sigma_3 \times 1 \times S_1^1]\right\}\Psi &= \frac{i}{h}\Psi[\sigma_1 \times 1 \times 1 \times 1]\left\{[\sigma_3 \times 1 \times 1 \times 1]\frac{W}{c} - [1 \times 1 \times p_1^1]\right\} \\ \left\{\partial_t + [1 \times \sigma_3 \times S_2^1]\right\}\Psi &= \frac{i}{h}\Psi[1 \times \sigma_1 \times 1 \times 1]\left\{[1 \times \sigma_3 \times 1 \times 1]\frac{W}{c} - [1 \times 1 \times p_2^1]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,i)$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned} \left\{\partial_t + [1 \times \sigma_3 \times S_1^1]\right\}\Psi' &= \frac{i}{h}\Psi'[1 \times \sigma_1 \times 1 \times 1]\left\{[1 \times \sigma_3 \times 1 \times 1]\frac{W}{c} - [1 \times 1 \times p_1^1]\right\} \\ \left\{\partial_t + [\sigma_3 \times 1 \times S_2^1]\right\}\Psi' &= \frac{i}{h}\Psi'[\sigma_1 \times 1 \times 1 \times 1]\left\{[\sigma_3 \times 1 \times 1 \times 1]\frac{W}{c} - [1 \times 1 \times p_2^1]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,j)$$

avec

$$p_1^1 = [1 \times p^{1/2}] \qquad p_2^1 = [p^{1/2} \times 1] \qquad (6.2\,k)$$

La transformation définie par la matrice unitaire

$$U = \tfrac{1}{2}\left\{[1 \times 1] + [\sigma_1 \times \sigma_1] + [\sigma \times \sigma] + [\sigma_3 \times \sigma_3]\right\} \times [1 \times 1] \qquad (6.2\,l)$$

montre l'équivalence de (i) et de (j).

2. *Spin* ³/₂.

Premier système.

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{k}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,P^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2 .}{}_{\varepsilon_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,P^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3 .}{}_{\varepsilon_3}\,P^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,m')$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\varepsilon_1}{}^{\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3}\,P^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3}\,P_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}\\
D_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,P_{\varepsilon_3\dot\gamma_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,m'')$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3}\,P_{\varepsilon_1\dot\gamma_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2 .}{}_{\varepsilon_2}{}^{\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3}\,P^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\alpha_3\dot\beta_3}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3 .}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1\alpha .}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,P_{\varepsilon_3\dot\gamma_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,m''')$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1\dot\beta .}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,P_{\varepsilon_1\dot\gamma_1}\\
D_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,P_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2 .}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3 .}{}_{\varepsilon_3}\,P^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,m^{\text{IV}})$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1 .}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,P^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2 .}{}_{\varepsilon_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,P^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3 .}{}_{\varepsilon_3}\,P^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,n')$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}\\
D_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_3\dot\gamma_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,n'')$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,n''')$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_3\dot\gamma_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,n^{\mathrm{IV}})$$

Troisième système.

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_2}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,o')$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_1\dot\gamma_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,o'')$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\mathrm{P}_{\varepsilon_1\dot\gamma_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_2\cdot}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\mathrm{P}_{\varepsilon_3\dot\gamma_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,o''')$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\gamma_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\varepsilon_3}\mathrm{P}_{\varepsilon_3\dot\gamma_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,o^{\mathrm{IV}})$$

Quatrième système.

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,p')$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\mathrm{P}_{\varepsilon_1\dot\gamma_1}\\
D^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\varepsilon_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_2\delta_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,p'')$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\varepsilon_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_1\delta_1}\\
D_{\alpha_2\dot\beta_2}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,p''')$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_1\dot\gamma_1}\\
D_{\alpha_2\dot\beta_2}\,\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= -\frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\,\mathrm{P}_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}\\
D^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3} &= \frac{i}{h}\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\varepsilon_3}\,\mathrm{P}^{\dot\varepsilon_3\delta_3}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,p^{\mathrm{IV}})$$

En se servant des matrices à huit lignes et à huit colonnes: $\psi^{(1)}\left(\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\right)$, $\psi^{(2)}\left(\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\dot\gamma_3}\right)$, $\psi^{(3)}\left(\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1\alpha_2}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\dot\gamma_3}\right)$, et $\psi^{(4)}\left(\psi^{\dot\beta_1\cdot}{}_{\dot\gamma_1}{}^{\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\right)$ dans le cas du premier système ; $\psi'^{(1)}\left(\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\delta_2}{}_{\alpha_3}{}^{\delta_3}\right)$, $\psi'^{(2)}\left(\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2}{}^{\dot\beta_3\cdot}{}_{\dot\gamma_3}\right)$, $\psi'^{(3)}\left(\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1\dot\beta_2\cdot}{}_{\dot\gamma_2\alpha_3}{}^{\delta_3}\right)$ et $\psi'^{(4)}\left(\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\alpha_1}{}^{\delta_2\dot\beta_3\cdot}{}_{\dot\gamma_3}\right)$ dans le cas du second système; etc., les équations (6.2 *m*, *n*, *o* et *p*) peuvent s'écrire de la manière suivante :

Premier système.

$$\left.\begin{aligned}
\left(\partial_t+\left[\sigma_3\times 1\times S_1^{3/2}\right]\right)\psi &= \frac{i}{h}[1\times 1\times[\sigma]^3]\,\psi^*[1\times\sigma_1\times[\sigma]^3]\\
&\qquad\left\{[\sigma_3\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_1^{3/2}\right]\right\}\\
\left(\partial_t+\left[1\times\sigma_3\times S_2^{3/2}\right]\right)\psi &= \frac{i}{h}[1\times 1\times[\sigma]^3]\,\psi^*[\sigma_1\times 1\times[\sigma]^3]\\
&\qquad\left\{[1\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_2^{3/2}\right]\right\}\\
\left(\partial_t+\left[\sigma_3\times\sigma_3\times S_3^{3/2}\right]\right)\psi &= \frac{i}{h}[1\times 1\times[\sigma]^3]\,\psi^*[\sigma_1\times\sigma_1\times[\sigma]^3]\\
&\qquad\left\{[\sigma_3\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_3^{3/2}\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,q)$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_t+\left[1\times 1\times S_1^{3/2}\right]\right)\psi' = \frac{i}{h}[1\times 1\times[\sigma]^3]\,\psi'^*[1\times\sigma_1\times[\sigma]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[1\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_1^{3/2}\right]\right\}\\
&\left(\partial_t+\left[\sigma_3\times\sigma_3\times S_2^{3/2}\right]\right)\psi' = \frac{i}{h}\,\psi'[1\times\sigma_1\times[1]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[\sigma_3\times\sigma_3\times[1]^3\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_2^{3/2}\right]\right\}\\
&\left(\partial_t+\left[1\times\sigma_3\times S_3^{3/2}\right]\right)\psi' = \frac{i}{h}\,\psi'[\sigma_1\times\sigma_1\times[1]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[1\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_3^{3/2}\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,r)$$

Troisième système.

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_t+\left[\sigma_3\times\sigma_3\times S_1^{3/2}\right]\right)\psi'' = \frac{i}{h}\,\psi''[1\times\sigma_1\times[1]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[\sigma_3\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_1^{3/2}\right]\right\}\\
&\left(\partial_t+\left[1\times 1\times S_2^{3/2}\right]\right)\psi'' = \frac{i}{h}[1\times 1\times[\sigma]^3]\,\psi''^*[\sigma_1\times 1\times[\sigma]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[1\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_2^{3/2}\right]\right\}\\
&\left(\partial_t+\left[\sigma_3\times 1\times S_3^{3/2}\right]\right)\psi'' = \frac{i}{h}\,\psi''[\sigma_1\times\sigma_1\times[1]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[\sigma_3\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_3^{3/2}\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,s)$$

Quatrième système.

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_t+\left[1\times\sigma_3\times S_1^{3/2}\right]\right)\psi''' = \frac{i}{h}\,\psi'''[1\times\sigma_1\times[1]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[1\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_1^{3/2}\right]\right\}\\
&\left(\partial_t+\left[\sigma_3\times 1\times S_2^{3/2}\right]\right)\psi''' = \frac{i}{h}\,\psi'''[\sigma_1\times 1\times[1]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[\sigma_3\times 1\times[1]^3\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_2^{3/2}\right]\right\}\\
&\left(\partial_t+\left[1\times 1\times S_3^{3/2}\right]\right)\psi''' = \frac{i}{h}[1\times 1\times[\sigma]^3]\,\psi'''^*[\sigma_1\times\sigma_1\times[\sigma]^3]\\
&\qquad\qquad\left\{[1\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c}-\left[1\times 1\times p_3^{3/2}\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(6.2\,t)$$

où l'on a posé

$$\left.\begin{aligned} p_1^{3/2} = \left[1\times 1\times p^{1/2}\right], \quad p_2^{3/2} = \left[1\times p^{1/2}\times 1\right], \quad p_3^{3/2} = \left[p^{1/2}\times 1\times 1\right] \\ [1]^3 = [1\times 1\times 1], \quad [\sigma]^3 = [\sigma\times\sigma\times\sigma]\ . \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,u)$$

Ecrivons les équations composées de premier degré pour le premier et le second système, en posant

$$\left.\begin{aligned} {}^1\Psi &= {}^1\psi^{(1)} + i\,{}^2\psi^{(1)}, & {}^5\Psi &= [\sigma]^3\left({}^1\psi^{(2)*} + i\,{}^2\psi^{(2)*}\right)[\sigma]^3 \\ {}^2\Psi &= {}^1\psi^{(2)} + i\,{}^2\psi^{(2)}, & {}^6\Psi &= [\sigma]^3\left({}^1\psi^{(1)*} + i\,{}^2\psi^{(1)*}\right)[\sigma]^3 \\ {}^3\Psi &= {}^1\psi^{(3)} + i\,{}^2\psi^{(3)}, & {}^7\Psi &= [\sigma]^3\left({}^1\psi^{(4)*} + i\,{}^2\psi^{(4)*}\right)[\sigma]^3 \\ {}^4\Psi &= {}^1\psi^{(4)} + i\,{}^2\psi^{(4)}, & {}^8\Psi &= [\sigma]^3\left({}^1\psi^{(3)*} + i\,{}^2\psi^{(3)*}\right)[\sigma]^3 \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,v)$$

dans le cas du premier système et des relations identiques en ψ' dans le cas du second:

Premier système.

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_t + \left[\sigma_3\times\sigma\times 1\times S_1^{3/2}\right]\right)\Psi &= \frac{i}{h}\Psi[\sigma_1\times 1\times\sigma_1\times[1]^3] \\ &\quad \left\{[\sigma_3\times\sigma_3\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c} - [1]^3\,p_1^{3/2}\right\} \\ \left(\partial_t + \left[1\times 1\times\sigma_3\times S_2^{3/2}\right]\right)\Psi &= \frac{i}{h}\Psi[\sigma_1\times\sigma_1\times 1\times[1]^3] \\ &\quad \left\{[1\times 1\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c} - [1]^3\,p_2^{3/2}\right\} \\ \left(\partial_t + \left[1\times\sigma_3\times\sigma_3\times S_3^{3/2}\right]\right)\Psi &= \frac{i}{h}\Psi[\sigma_1\times\sigma_1\times\sigma_1\times[1]^3] \\ &\quad \left\{[1\times\sigma_3\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c} - [1]^3\,p_3^{3/2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,w')$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_t + \left[\sigma_3\times 1\times 1\times S_1^{3/2}\right]\right)\Psi' &= \frac{i}{h}\Psi'[\sigma_1\times 1\times\sigma_1\times[1]^3] \\ &\quad \left\{[\sigma_3\times 1\times 1\times[1]^3]\frac{W}{c} - [1]^3\,p_1^{3/2}\right\} \\ \left(\partial_t + \left[1\times\sigma_3\times\sigma_3\times S_2^{3/2}\right]\right)\Psi' &= \frac{i}{h}\Psi'[\sigma_1\times\sigma_1\times 1\times[1]^3] \\ &\quad \left\{[1\times\sigma_3\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c} - [1]^3\,p_2^{3/2}\right\} \\ \left(\partial_t + \left[1\times 1\times\sigma_3\times S_3^{3/2}\right]\right)\Psi' &= \frac{i}{h}\Psi'[\sigma_1\times\sigma_1\times\sigma_1\times[1]^3] \\ &\quad \left\{[1\times 1\times\sigma_3\times[1]^3]\frac{W}{c} - [1]^3\,p_3^{3/2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,w'')$$

La transformation V définie par le produit $V = UU'$ avec

$$\left.\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}\left[1\times\left([1\times 1]+[\sigma_1\times\sigma_1]+[\sigma\times\sigma]+[\sigma_3\times\sigma_3]\right)\right]\times[1]^3 \\ U' &= \tfrac{1}{2}\left([1\times 1\times 1]+[1\times\sigma_3\times 1]+[\sigma_1\times 1\times\sigma_1]+[\sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_1]\right)\times[1]^3 \end{aligned}\right\} \quad (6.2\,x)$$

permet de prouver l'équivalence du système (6.2q) et du système (6.2r). Par un procédé analogue on démontrera l'équivalence de tous les quatre systèmes (6.2q, r, s et t). Par conséquence il n'existe qu'un seul système indépendant d'équations composées de premier degré.

Dans le cas général du corpuscule de spin j, les équations mixtes s'obtiennent en prenant celles écrites dans le paragraphe 4.3, en y dédoublant les indices de chaque fonction d'onde. Ainsi, par exemple, à la place de $\psi_{\alpha_1 \ldots}{}^{\dot\beta l_{m_1} \ldots \dot\beta l_{m_s}}{}_{\ldots \alpha_{2j}}$ écrirons-nous

$$\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}{}_{\ldots}{}^{\dot\beta f_{m_1}}{}_{\dot\gamma l_{m_1}}{}^{\ldots \dot\beta l_{m_s}}{}_{\dot\gamma l_{m_s} \ldots \alpha_{2j}}{}^{\delta_{2j}}$$

En outre, les termes de masse doivent être remplacés:

a) Par les produits $\frac{i}{h}\Psi_{\ldots}{}^{\dot\beta_k}{}_{\dot\varepsilon_k \ldots}\, P^{\dot\varepsilon_k \delta_k}$, dans le cas du groupe d'équations correspondant à l'opérateur $D^{\dot\beta_k \alpha_k}$;

b) Par les produits $-\frac{i}{h}\Psi_{\ldots \alpha_k}{}^{\dot\varepsilon_k}{}_{\ldots}\, P_{\varepsilon_k \dot\gamma_k}$, dans le cas du groupe d'équations à opérateur $D_{\alpha_k \dot\beta_k}$.

6.3 *Equations mixtes et mixtes composées du corpuscule biondulatoire de spin 1.*

a) *Equations mixtes.*

Premier système.

$$\left.\begin{aligned}
\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right) {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} &= \frac{i}{h}\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1}\, P^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\
\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right) {}^2\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\gamma_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} &= \frac{i}{h}\, {}^2\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\gamma_2}\, {}^1\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1}\, P^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\
\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right) {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} &= \frac{i}{h}\, {}^2\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\, P^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \\
\left({}^2D_{\alpha_2\dot\beta_2} - {}^1D_{\alpha_2\dot\beta_2}\right) {}^2\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\gamma_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} &= -\frac{i}{h}\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\varepsilon_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\, P_{\varepsilon_2\dot\gamma_2}
\end{aligned}\right\} \quad (6.3\,a')$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned}
&\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} = \frac{i}{h}\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1}\, P^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\
&\left({}^2D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^1D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right)\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} = -\frac{i}{h}\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\, P_{\varepsilon_1\dot\gamma_1} \\
&\left({}^2D^{\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} = \frac{i}{h}\, {}^2\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^1\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\, P^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \\
&\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\, {}^2\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^1\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} = \frac{i}{h}\, {}^2\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^1\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\, P^{\dot\varepsilon_2\delta_2}
\end{aligned}\right\}\quad (6.3\,a'')$$

b) *Equations mixtes composées.*

Nous avons à distinguer deux types d'équations d'onde, selon que nous déclarons admissibles les équations de la forme

$$Op\,[{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (6.3\,b)$$

ou de la forme

$$\left.\begin{aligned}
&Op\;[{}^2\dot\psi \times {}^1\psi] = 0 \\
&Op'\,[{}^2\psi^* \times {}^1\psi] = 0\;,
\end{aligned}\right\}\qquad (6.3\,c)$$

attendu que nous n'avons trouvé actuellement aucune raison pour prédilectionner une forme plutôt que l'autre.

Dans le premier cas, voici comment nous écrirons les équations:

$$\left.\begin{aligned}
&\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(1)2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\right] = \\
&\qquad = \frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\, {}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\, {}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1}\right] P^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\
&\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\right] = \\
&\qquad = \frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} - {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\right] P^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \\
&\left({}^2D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^1D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\delta_1}\right] = \\
&\qquad = -\frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\right] P_{\varepsilon_1\dot\gamma_1} \\
&\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\, {}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\right] = \\
&\qquad = \frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} - {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\, {}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\right] P^{\dot\varepsilon_2\delta_2}
\end{aligned}\right\}\quad (3.3\,d')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\beta_1}{}^{\delta_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\right] = \\
&\qquad = \frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1}\right]P^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \\
&\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\right] = \\
&\qquad = \frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} + {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\right]P^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \\
&\left({}^2D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^1D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\right] = \\
&\qquad = -\frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\right]P_{\varepsilon_1\dot\gamma_1} \\
&\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\right] = \\
&\qquad = \frac{i}{h}\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} + {}^{2)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\right]P^{\dot\varepsilon_2\delta_2}
\end{aligned}\right\} \quad (6.3\,d'')$$

Et, dans le deuxième cas:

$$\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right){}^{(k)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(l)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} = \frac{i}{h}\,{}^{(k)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(l)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\varepsilon_1}\,P^{\dot\varepsilon_1\delta_1} \quad (6.3\,e')$$

$$\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right){}^{(k)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(l)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} = \frac{i}{h}\,{}^{(k)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\,{}^{(l)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1}\,P^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \quad (6.3\,e'')$$

$$\left({}^2D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^1D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right){}^{(k)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(l)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} = -\frac{i}{h}\,{}^{(k)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(l)1}\psi_{\alpha_1}{}^{\varepsilon_1}\,P_{\varepsilon_1\dot\gamma_1} \quad (6.3\,e''')$$

$$\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right){}^{(k)2}\psi_{\alpha_2}{}^{\delta_2}\,{}^{(l)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1} = \frac{i}{h}\,{}^{(k)2}\psi^{\dot\beta_2}{}_{\dot\varepsilon_2}\,{}^{(l)1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\dot\gamma_1}\,P^{\dot\varepsilon_2\delta_2} \quad (6.3\,e^{\mathrm{IV}})$$

Où

$$k\,,\ l = 1\,,\ 2\begin{pmatrix} k = 1\,, & l = 1\,; & k = 1\,, & l = 2\,; \\ k = 2\,, & l = 1\,; & k = 2\,, & l = 2\,. \end{pmatrix}$$

Pour ce qui est des équations du corpuscule multiondulatoire de spin j, on partira des équations, développées au chapitre 3, en faisant état de la remarque placée à la fin du paragraphe 6.2, ainsi que de l'étude que nous venons de faire dans le cas du spin 1.

6.4 *Les ondes planes.*

La théorie des ondes planes va se dérouler comme au chapitre 5, et rien d'essentiellement nouveau ne sera dit dans ce qui suit.

6.41 *Le corpuscule de spin ½.*

Commençons par les équations primaires et posons-y

$$\psi_\alpha^{\ \delta} = a_\alpha^{\ \delta}\, e^{iS} + b_\alpha^{\ \delta}\, e^{-iS} \tag{6.41 a}$$

$$S = \frac{i}{h}\left(W' t - p'_1 x_1 - p'_2 x_2 - p'_3 x_3\right) \tag{6.41 b}$$

$$\left.\begin{array}{llll} a^1_1 = a_1\,, & a^1_2 = a_2\,, & a^2_1 = a_3\,, & a^2_2 = a_4 \\ b^1_1 = b_1\,, & b^1_2 = b_2\,, & b^2_1 = b_3\,, & b^2_2 = b_4 \end{array}\right\} . \tag{6.41c}$$

Il vient le système linéaire suivant:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{W'}{c} + p'_3\right) a_1 - \left(p'_1 + ip'_2\right) a_2 &= -\left[\left(\frac{W}{c} + p_3\right) b^*_4 + \left(p_1 - ip_2\right) b^*_2\right] \\
-\left(p'_1 - ip'_2\right) a_1 + \left(\frac{W'}{c} - p'_3\right) a_2 &= \left[\left(\frac{W}{c} + p_3\right) b^*_3 + \left(p_1 - ip_2\right) b^*_1\right] \\
\left(\frac{W'}{c} + p'_3\right) a_3 - \left(p'_1 + ip\right) a_4 &= \left[\left(p_1 + ip_2\right) b^*_4 + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) b^*_2\right] \\
-\left(p'_1 - ip'_2\right) a_3 + \left(\frac{W'}{c} - p'_3\right) a_4 &= -\left[\left(p_1 + ip_2\right) b^*_3 + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) b^*_1\right]
\end{aligned}\right\} \tag{6.41 d}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{W'}{c} + p'_3\right) b^*_1 - \left(p'_1 - ip'_3\right) b^*_2 &= -\left[\left(\frac{W}{c} + p_3\right) a_4 + \left(p_1 + ip_2\right) a_2\right] \\
-\left(p'_1 + ip'_2\right) b^*_1 + \left(\frac{W'}{c} - p'_3\right) b^*_2 &= \left[\left(\frac{W}{c} + p_3\right) a_3 + \left(p_1 + ip_2\right) a_1\right] \\
\left(\frac{W'}{c} + p'_2\right) b^*_3 - \left(p'_1 - ip'_2\right) b^*_4 &= \left[\left(p_1 - ip_2\right) a_4 + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) a_2\right] \\
-\left(p'_1 + ip'_2\right) b^*_3 + \left(\frac{W'}{c} - p'_3\right) b^*_4 &= -\left[\left(p_1 - ip_2\right) a_3 + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) a_1\right]
\end{aligned}\right\} \tag{6.41 e}$$

Pour les corpuscules à masse ($m_0 \neq 0$), si l'on se fixe les coefficients a_i, les b_i se trouvent déterminés par les relations que voici:

$$\left.\begin{aligned}
b_1^* &= {}^1/\mathrm{P}^2\Big\{-\Big(\frac{\mathrm{W}}{c}+p_3\Big)\Big[-(p_1'-ip_2')\,a_3+\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}-p_3'\Big)a_4\Big]-\\
&\qquad -(p_1+ip_2)\Big[-(p_1'-ip_2')\,a_1+\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}-p_3'\Big)a_2\Big]\Big\}\\
b_2^* &= {}^1/\mathrm{P}^2\Big\{(p_1+ip_2)\Big[\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}+p_3'\Big)a_1-(p_1'+ip_2')\,a_2\Big]+\\
&\qquad +\Big(\frac{\mathrm{W}}{c}+p_3\Big)\Big[-(p_1'+ip_2')\,a_4+\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}+p_3'\Big)a_3\Big]\Big\}\\
b_3^* &= {}^1/\mathrm{P}^2\Big\{\Big(\frac{\mathrm{W}}{c}-p_3\Big)\Big[-(p_1'-ip_2')\,a_1+\Big(\frac{\mathrm{W}}{c}-p_3\Big)a_2\Big]+\\
&\qquad +(p_1-ip_2)\Big[-(p_1'-ip_2')\,a_3+\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}-p_3'\Big)a_4\Big]\Big\}\\
b_4^* &= {}^1/\mathrm{P}^2\Big\{-(p_1-ip_2)\Big[\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}+p_3'\Big)a_3-(p_1'+ip_2')\,a_4\Big]-\\
&\qquad -\Big(\frac{\mathrm{W}}{c}-p_3\Big)\Big[\Big(\frac{\mathrm{W}'}{c}+p_3'\Big)a_1-(p_1'+ip_2')\,a_2\Big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (6.41\,f)$$

avec

$$\mathrm{P}^2 = \frac{\mathrm{W}^2}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \qquad (6.41\,g)$$

Pour les corpuscules limites $\mathrm{P}^2 = 0$ et, dans ce cas, $b_1^* : b_2^* : b_3^* : b_4^*$ = rapport des dénominateurs correspondants dans les expressions (6.41 *f*).

Occupons-nous maintenant des équations composées dans le cadre desquelles on peut définir les ondes planes à énergie positive (ou négative). Posons

$$\left.\begin{aligned}
{}^1\psi_l &= a_l\,e^{i\mathrm{S}} + b_l\,e^{-i\mathrm{S}}\\
{}^2\psi_l &= a_l\,e^{i\left(\mathrm{S}-\frac{\pi}{2}\right)} + b_l\,e^{-i\left(\mathrm{S}-\frac{\pi}{2}\right)} = -\,i a_l\,e^{i\mathrm{S}} + i b_l\,e^{-i\mathrm{S}}
\end{aligned}\right\} \quad (6.41\,h)$$

$$\psi_l = \tfrac{1}{2}({}^1\psi_l + i\,{}^2\psi_l) = a_l\,e^{i\mathrm{S}}\,, \qquad \theta_l = \tfrac{1}{2}({}^1\psi_l - i\,{}^2\psi_l) = b_l\,e^{i\mathrm{S}} \qquad (6.41\,i)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_1 = \psi_1 + \theta_4^* = A_1 e^{iS}, \quad \Psi_2 = \psi_1 - \theta_4^* = A_2 e^{iS}, \quad \Psi_3 = \psi_2 + \theta_3^* = A_3 e^{iS}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Psi_4 = \psi_2 - \theta_3^* = A_4 e^{iS} \\
&\Psi_5 = \psi_3 + \theta_2^* = A_5 e^{iS}, \quad \Psi_6 = \psi_3 - \theta_2^* = A_6 e^{iS}, \quad \Psi_7 = \psi_4 + \theta_1^* = A_7 e^{iS}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Psi_8 = \psi_4 - \theta_1^* = A_8 e^{iS}
\end{aligned}\right\} \quad (6.41\,j)$$

Les coefficients A_1, A_4, A_5, A_8 peuvent être exprimés en fonction de A_2, A_3, A_5 et A_7

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left(\frac{W}{c} - p_3'\right) A_2 + \left(p_1' + ip_2'\right) A_3 + \left(p_1 + ip_2\right) A_6}{\frac{W'}{c} + p_3}, \\
A_4 &= \frac{\left(\frac{W}{c} + p_3'\right) A_3 + \left(p_1' - ip_2'\right) A_2 + \left(p_1 + ip_2\right) A_7}{\frac{W'}{c} + p_3}, \\
A_5 &= \frac{-\left(\frac{W}{c} + p_3'\right) A_6 + \left(p_1' + ip_2'\right) A_7 - \left(p_1 - ip_2\right) A_2}{\frac{W'}{c} + p_3}, \\
A_8 &= \frac{-\left(\frac{W}{c} - p_3'\right) A_7 + \left(p_1' - ip_2'\right) A_6 - \left(p_1 - ip_2\right) A_3}{\frac{W'}{c} + p_3}.
\end{aligned}\right\} \quad (6.41\,k)$$

6.42 *Corpuscule biondulatoire de spin 1.*

a) *Equations mixtes.*

Posons

$$ {}^l\psi_{\alpha_1}{}^{\delta_1} = {}^l a_{\alpha_1}{}^{\delta_1} e^{i^l S} + {}^l b_{\alpha_1}{}^{\delta_1} e^{-i^l S}, \qquad l = 1 \text{ ou } 2 \qquad (6.42\,a)$$

Pour les corpuscules à masse

$$\left.\begin{aligned}
{}^l b_1^* = {}^1/\mathrm{P}^2 \Big\{ &- \left(\frac{W}{c} + p_3\right) \left[- \left(p_1' - ip_2'\right) {}^l a_3 + \left(\frac{W'}{c} - p_3'\right) {}^l a_4 \right] - \\
&- \left(p_1 + ip_2\right) \left[- \left(p_1' - ip_2'\right) {}^l a_1 + \left(\frac{W'}{c} - p_3'\right) {}^l a_2 \right] \Big\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (6.42\,b)$$

$$p_i' = {}^2p_i' - {}^1p_i', \qquad W_i' = {}^2W_i' - {}^1W_i'. \qquad (6.43\,c)$$

b) *Equations mixtes composées.*

Posons

$$ {}^{(m)l}\psi_\alpha{}^\delta = {}^{(m)l}a_\alpha{}^\delta \, e^{i^l S} + {}^{(m)l}b_\alpha{}^\delta \, e^{-i^l S} \, . \tag{6.43 d} $$

Dans le premier cas [équations (6.3 *d*)] :

$$ \left. \begin{aligned} {}^{(1)l}b_1^* \pm i\,{}^{(2)l}b_1^* = {}^1/\mathrm{P}^2 \Big\{ & -\left(\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)\Big[-\left(p_1' - ip_2'\right)\left({}^{(1)l}a_3 \pm i\,{}^{(2)}a_3^l\right) + \\ & + \left(\frac{\mathrm{W}'}{c} - p_3'\right)\left({}^{(1)l}a_4 \pm {}^{(2)l}a_4\right)\Big] - \\ & - \left(p_1 + ip_2\right)\Big[-\left(p_1' - ip_2'\right)\left({}^{(1)l}a_1 \pm i\,{}^{(2)l}a_1\right) + \\ & + \left(\frac{\mathrm{W}'}{c} - p_3'\right)\left({}^{(1)l}a_2 \pm i\,{}^{(2)l}a_2\right)\Big]\Big\} \, . \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} \tag{6.43 e} $$

Dans le deuxième cas, on retrouve les relations (6.42 *a*).

6.5 *Etude plus détaillée des équations composées de premier rang du corpuscule de spin ½.*

Nous devons reprendre l'étude des équations composées de premier rang du corpuscule de spin ½ dans le dessein d'établir le tableau des opérateurs matriciels, générateurs de formes bilinéaires, en attribuant à ces opérateurs, comme en théorie de Dirac, la variance relativiste des formes bilinéaires correspondantes. Attendu que la fonction d'onde de l'équation primaire est un spineur de second rang du type $\psi_\alpha{}^\delta$, les formes bilinéaires sont de la forme $\psi_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma}\,\psi_\alpha{}^\delta \pm \theta_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma}\,\theta_\alpha{}^\delta$, $\theta_\alpha{}^\varepsilon\,\psi_\varepsilon{}^\delta$ et $\theta_{\dot\beta}{}^{\dot\varepsilon}\,\theta_{\dot\varepsilon}{}^{\dot\gamma}$. Il leur correspond dans l'espace-temps les tenseurs réels $\mathrm{A}_j{}^k$, $\mathrm{B}_j{}^{klm}$ (antisymétrique en trois derniers indices) et $\mathrm{G}_j{}^k = -\mathrm{G}_k^j$. Les équations d'onde peuvent s'écrire:

$$ \left[\alpha_j{}^k\,\partial_k - \frac{i}{h}\left(i\,\gamma\,\mathrm{P}_j + \gamma_j{}^k\,\mathrm{P}_k\right)\right]\psi = 0 $$

où les matrices α_j^k, γ et γ_j^k sont celles du tableau suivant:

$$\alpha^{1} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right|, \quad \alpha_4^2 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right|,$$

$$\alpha_4^3 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right|, \quad \alpha_4^4 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

$$\alpha_3^1 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right|, \quad \alpha_3^2 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right|,$$

$$\alpha_3^3 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right|, \quad \alpha_3^4 = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right|$$

$$\alpha_2^1 = \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \quad \alpha_2^2 = \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|,$$

$$\alpha_2^3 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \quad \alpha_2^4 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{matrix} & 0 \end{array}\right|$$

$$\alpha_1^1 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \quad \alpha_1^2 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|,$$

$$\alpha_1^3 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \quad \alpha_1^4 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|$$

$$\gamma_1^4 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \quad \gamma_2^4 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|,$$

$$\gamma_3^4 = \left|\begin{array}{c:c} \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right| \quad \gamma_3^2 = \left|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{matrix} & 0 \end{array}\right|,$$

$$\gamma_1^3 = \left|\begin{array}{cccc|cccc} & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \end{array}\right| , \quad \gamma_2^1 = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -i & 0 & 0 & & & & \\ i & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & i & & & & \\ 0 & 0 & -i & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & -i & 0 & 0 \\ & 0 & & & i & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & i \\ & & & & 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right|$$

$$\gamma = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & i & 0 & 0 & & & & \\ -i & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -i & & & & \\ 0 & 0 & i & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & -i & 0 & 0 \\ & 0 & & & i & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & i \\ & & & & 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right| , \quad \delta = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| .$$

Les matrices génératrices des formes bilinéaires, qui fournissent les composantes du tenseur de spin B_i^{jkl}, peuvent s'obtenir de la manière que voici:

$$\beta_i{}^n = -i\gamma\delta\alpha_i{}^n$$

avec la correspondance suivante:

$$\beta_i^1 \longrightarrow \beta_i^{234} , \quad \beta_i^2 \longrightarrow \beta_i^{314} , \quad \beta_i^3 \longrightarrow \beta_i^{124} \quad \text{et} \quad \beta_i^4 \longrightarrow \beta_i^{123} .$$

On a du reste:

$$\left.\begin{array}{c} \beta_i^1 = -i\alpha_i^2\alpha_i^3\alpha_i^4 , \quad \beta_i^2 = -i\alpha_i^3\alpha_i^1\alpha_i^4 , \quad \beta_i^3 = -i\alpha_i^1\alpha_i^2\alpha_i^4 , \\ \beta_i^4 = -i\alpha_i^1\alpha_i^2\alpha_i^3\alpha_i^4 . \end{array}\right\}$$

On vérifie aisément que les quantités

$$\mathfrak{M}_{ik} + \tfrac{1}{2} h B_{4,4ik}$$

sont des intégrales premières au sens de la mécanique ondulatoire.

Indiquons encore un théorème important. Formons la divergence quadridimensionnelle du tenseur B_i^k. Nous trouvons

$$\partial_k B_i^k = -{}^1/h\, P^k G$$

avec

$$G = \Psi^* \gamma \Psi \ .$$

Plaçons-nous dans le cas de la solution « onde plane monochromatique ». En tenant compte des relations (6.4k) on a $G \equiv 0$, donc $\partial_k B_i^k = 0$, dans ce cas.

Remarque: En mécanique quantique non relativiste les équations d'onde (équations de Schrödinger) peuvent s'obtenir de deux manières: 1° La méthode opérationnelle de Born et Wigner, où l'on remplace p_k par $-\partial_k$ et p_t par ∂_t, dans l'expression de l'énergie. Ce procédé est étendu ici à la mécanique relativiste, en considérant la transformation de Lorentz, que subit le quadri-vecteur quantité de mouvement-énergie.
2° La méthode matricielle des transformations canoniques qui rendent diagonale la matrice d'énergie H. Les équations étudiées dans le présent travail se prêtent à la même interprétation, à condition de considérer, dans l'équation $\psi_n^{-1} P \psi_n = P_n$, toutes les grandeurs comme grandeurs hypercomplexes.

(A suivre.)