

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 27 (1945)

**Artikel:** Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires [suite]  
**Autor:** Kwal, Bernard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-742479>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

**Bernard KWAL** <sup>1</sup>

(suite)

## TROISIÈME PARTIE

### RÉSUMÉ.

Cette troisième partie de notre travail comporte deux chapitres. Le premier est consacré à l'étude de la variance et de la polyvariance des équations d'onde de la mécanique un- et multiondulatoire. On y démontre en premier lieu, grâce à l'emploi de l'algorithme matriciel, le théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste, et qui s'énonce de la manière suivante :

« Les équations d'onde primaires du corpuscule de spin  $\frac{1}{2}$  s'obtiennent en remplaçant les composantes  $p_k$  et  $\frac{W}{c}$  du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie par les opérateurs  $-\frac{h}{i} \partial_k$  et  $\frac{h}{i} \partial_t$  dans la formule  $P\tilde{\Psi}^* = m_0 c \Psi$ , représentant la transformation de Lorentz, exprimée au moyen des demi-vecteurs, et relative au passage d'un des référentiels possibles au référentiel propre du corpuscule observé. » L'algorithme spinoriel est employé plus spécialement pour écrire les équa-

<sup>1</sup> Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

tions secondaires. On montre à cette occasion que les équations composées de degrés supérieurs jouissent de la propriété de polyvariance, c'est-à-dire qu'elles se laissent écrire en faisant appel aux êtres géométriques à variance relativiste différente. Ainsi, par exemple, les équations composées du septième degré du corpuscule de spin  $\frac{1}{2}$ , qui sont équivalentes aux équations de Whittaker, peuvent-elles s'écrire, soit au moyen des huit spineurs de premier rang, soit au moyen des quatre spineurs de second rang (auxquels, comme l'on sait, on peut faire correspondre des tenseurs complexes de l'espace-temps), soit enfin au moyen de deux spineurs de quatrième rang.

Les équations de la mécanique multiondulatoire sont traitées ensuite. On écrit, en notation spinorielle, les équations mixtes et mixtes composées du corpuscule biondulatoire de spin 1 et de spin  $\frac{3}{2}$ , ainsi que celles du corpuscule triondulatoire de spin  $\frac{3}{2}$ .

Le deuxième chapitre de ce travail fournit quelques indications sur la théorie des ondes planes en mécanique uni- et multiondulatoire. On montre que la solution « onde plane à énergie positive » des équations composées de premier degré (pour  $j = \frac{1}{2}$ ) ou des équations mixtes composées de premier degré (pour  $j \geq 1$ ), s'obtient en adjoignant à une solution « onde plane complète » des équations primaires (pour  $j = \frac{1}{2}$ ) ou des équations secondaires mixtes (pour  $j \geq 1$ ) respectivement, une solution d'un second système d'équations identique au premier, solution caractérisée par la même amplitude, mais déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la première.

#### 4. VARIANCE ET POLYVARIANCE RELATIVISTE DES ÉQUATIONS D'ONDE.

##### 4.1. *L'équation primaire du corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ et le théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste.*

Deux voies s'offrent à nous pour poursuivre l'étude de la variance relativiste des équations d'onde des corpuscules élémen-

taires. L'une est celle de l'algorithme matriciel, l'autre est celle des spineurs. Commençons par la première: elle conduit, en effet, à formuler un théorème important, qui semble devoir être érigé en théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste.

Rappelons donc quelques définitions du calcul matriciel, dans le but surtout d'en fixer l'écriture. Soit  $\Psi$  une matrice à une colonne et à deux lignes. Nous poserons:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \begin{vmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{vmatrix}, \quad \Psi^{-1} = \begin{vmatrix} -\psi_2, \psi_1 \end{vmatrix}. \quad (4.1a)$$

Dans le cas des matrices à deux lignes et à deux colonnes nous écrirons de même:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} & \tilde{A} &= \begin{vmatrix} a_{22}, -a_{21} \\ -a_{12}, a_{11} \end{vmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{vmatrix} a_{22}, -a_{12} \\ -a_{21}, a_{11} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.1b)$$

Rapportons-nous maintenant à ce que nous avons écrit au § 1 au sujet de la représentation des matrices de rang multiple de deux par des matrices planes, et convenons de représenter la multiplication extérieure de matrices de la manière que voici:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \quad (4.1c) \\ &= \left| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & b_{11} & b_{12} & , & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} & b_{22} & , & b_{21} & b_{21} & b_{22} \end{array} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & , & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & , & b_{21} & b_{22} \end{array} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12}, & a_{12}b_{11}, & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21}, & a_{11}b_{22}, & a_{12}b_{21}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{12}, & a_{22}b_{11}, & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21}, & a_{21}b_{22}, & a_{22}b_{21}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Conformément à cette convention, on aura

$$\tilde{\psi}^* \times \tilde{\psi} = \begin{vmatrix} -\varphi_2^* \psi_1 \\ -\varphi_2^* \psi_2 \\ \varphi_1 \psi_1 \\ \varphi_1 \psi_2 \end{vmatrix}. \quad (4.1d)$$

Cela étant, les équations primaires du corpuscule de spin  $1/2$  revêtent la forme matricielle suivante:

$$\Delta \psi = i \varkappa \tilde{\psi}^* , \quad \varkappa = \frac{m_0 c}{h} \quad (4.1e)$$

avec

$$\Delta = \Delta_+ = \begin{vmatrix} \partial_t - \partial_3, \partial_1 + i \partial_2 \\ \partial_1 - i \partial_2, \partial_t + \partial_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_- = \begin{vmatrix} \partial_t + \partial_3, -(\partial_1 + i \partial_2) \\ -(\partial_1 - i \partial_2), \partial_t - \partial_3 \end{vmatrix} \quad (4.1f)$$

$$\Delta \Delta = \begin{vmatrix} \square & \circ \\ \circ & \square \end{vmatrix} \quad \square = \partial_t^2 - \partial_3^2 - \partial_2^2 - \partial_1^2. \quad (4.1g)$$

La variance relativiste de l'équation (e2) s'exprime par les relations suivantes, commandées par le groupe demi-vectoriel:

$$\psi = \Lambda \psi' , \quad \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} = 1 \quad (4.1h)$$

$$\Delta_+ = \tilde{\Lambda}^* \Delta' \Lambda_-^{-1} , \quad \Delta_- = \Lambda_- \Delta' \Lambda_-^{*-1}. \quad (4.1i)$$

Nous voyons que  $\Delta$  se transforme comme le produit extérieur  $\tilde{\psi}^* \times \psi^{-1}$  et  $\Delta_-$  comme  $\tilde{\psi} \times \tilde{\psi}^{*-1}$

$$\tilde{\psi}^* \times \psi^{-1} = \begin{vmatrix} \psi_2^* \psi_2, -\psi_2^* \psi_1 \\ -\psi_1^* \psi_2, \psi_1^* \psi_1 \end{vmatrix}, \quad \psi \times \tilde{\psi}^{*-1} = - \begin{vmatrix} \psi_1 \psi_1, \psi_1 \psi_2 \\ \psi_2 \psi_1, \psi_2 \psi_2 \end{vmatrix}. \quad (4.1j)$$

Soit un quadrivecteur  $V$ , des composantes  $V_1, V_2, V_3$  et  $V_4$ , nous lui ferons correspondre la matrice

$$V = \begin{vmatrix} V_4 - V_3, V_1 + i V_2 \\ V_1 - i V_2, V_4 + V_3 \end{vmatrix}, \quad (4.1k)$$

et nous assignerons à  $V$  la variance relativiste de  $\psi \times \tilde{\psi}^{*-1}$ , c'est-à-dire la même que celle de  $\Delta$ . Nous aurons ainsi:

$$V = \Lambda V' \tilde{\Lambda}^{*-1} \quad (4.1 l)$$

$$\Lambda V' = V \tilde{\Lambda}^* \quad (4.1 l')$$

$$\tilde{\Lambda}^* V'^{-1} = V^{-1} \Lambda \quad (4.1 l'')$$

Prenons pour  $V$  le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie  $P(p_1, p_2, p_3, \frac{W}{c})$ . Dans ce cas

$$P^{-1} = \frac{1}{m_0^2 c^2} \begin{vmatrix} \frac{W}{c} + p_3 & - (p_1 + i p_2) \\ - (p_1 - i p_2) & \frac{W}{c} - p_3 \end{vmatrix}. \quad (4.1 m)$$

A la place de la transformation *générale* de Lorentz exprimée par  $(l)$ , considérons la transformation *spéciale* de Lorentz, relative au passage d'un des référentiels possibles au référentiel propre du corpuscule observé. Pour la réaliser, nous devons remplacer dans  $(l)$  la matrice de transformation  $\Lambda$ , à deux lignes et à deux colonnes, par une matrice  $\psi$  à deux lignes et à une colonne

$$V = P, \quad V' = (0, 0, 0, m_0 c), \quad V'^{-1} = \left( 0, 0, 0, \frac{1}{m_0 c} \right) \quad (4.1 n)$$

$$P \tilde{\psi}^* = m_0 c \psi, \quad P^{-1} \psi = \frac{1}{m_0 c} \tilde{\psi}^*. \quad (4.1 o)$$

Comme  $\psi^{-1} \psi = 0$ , il en résulte que

$$\psi^{-1} P \tilde{\psi}^* = 0. \quad (4.1 p)$$

On vérifie que l'expression matricielle, qui figure dans le membre à gauche de l'équation ci-dessus, est équivalente au produit scalaire dans l'espace-temps de deux quadrivecteurs  $\vec{P}$  et  $\overrightarrow{\psi^{-1} \times \tilde{\psi}^*}$ , qui, donc, y sont orthogonaux.

En remplaçant dans (o) les composantes  $p_k$  par  $-\frac{h}{i}\partial_k$  et  $\frac{W}{c}$  par  $\frac{h}{i}\partial_t$ , on obtient les équations primaires du corpuscule de spin  $\frac{1}{2}$  et de la relation, qui exprime l'orthogonalité

$$\vec{P} \cdot [\overline{\psi^{-1}} \times \vec{\psi^*}] = 0, \quad (4.1p')$$

l'équation de continuité.

Nous arrivons ainsi au théorème annoncé: « *Les équations d'onde primaires du corpuscule de spin  $\frac{1}{2}$  s'obtiennent en remplaçant les composantes  $p_k$  et  $\frac{W}{c}$  du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, dans la formule  $P\vec{\psi^*} = m_0 c \psi$ , représentant la transformation spéciale de Lorentz, exprimée au moyen des demi-vecteurs, et relative au passage d'un des référentiels possibles au référentiel propre du corpuscule observé* <sup>1</sup>. »

Ce théorème nous paraît avoir une signification plus profonde que celle d'une règle formelle. Toute mesure physique qui porte sur un objet mobile fait intervenir la transformation de Lorentz qui relie le référentiel de l'observateur au référentiel propre de l'objet observé. En théorie quantique l'objet observable est distribué sur l'ensemble de référentiels propres, dans chacun duquel il a une certaine chance de se trouver au moment de la mesure. La théorie relativiste quantifiée nous fournit le moyen de calculer cette distribution, c'est-à-dire de déterminer la collection de référentiels propres et les poids statistiques correspondants.

#### 4.2. *Les équations primaires et secondaires du corpuscule uniondulatoire de spin supérieur à $\frac{1}{2}$ .*

La légitimité relativiste des équations primaires du corpuscule de spin  $> \frac{1}{2}$  sans masse s'établit aisément. Prenons, pour

<sup>1</sup> Cf. le mémoire de l'auteur « Sur la description spatio-temporelle des phénomènes quantiques », paru il y a quelques années dans le *Journal de Physique*, 1937, 8, p. 81. Le même théorème y est démontré pour l'équation de Dirac, grâce à l'emploi des quaternions.

commencer, les équations du corpuscule de spin 1. Le premier système s'écrit:

$$[\mathbf{1} \times \Delta] \psi = 0, \quad [\Delta \times \mathbf{1}] \psi = 0. \quad (4.2 a)$$

Nous poserons:

$$\psi = [\Lambda \times \Lambda] \psi'. \quad (4.2 b)$$

Dans le cas du second système:

$$[\mathbf{1} \times \Delta] \varphi = 0, \quad [\Delta \times \mathbf{1}] \varphi = 0, \quad (4.2 c)$$

nous poserons

$$\varphi = [\tilde{\Lambda}^* \times \Lambda] \varphi'. \quad (4.2 d)$$

Passons au cas général du spin  $j$ . Chacun des  $2^{2j-1}$  systèmes d'équations demande une autre variance pour la fonction d'onde. Ainsi dans le cas du premier système

$$[\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \Delta] \psi = 0, \quad [\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \Delta \times \mathbf{1}] \psi = 0, \\ \dots [\Delta \times \mathbf{1} \times \dots \times \mathbf{1}] \psi = 0 \quad (4.2 e)$$

satisfait-on au groupe de Lorentz en posant

$$\psi = [\Lambda \times \Lambda \times \dots \times \Lambda \times \Lambda] \psi' = \left[ \prod_1^{2j} \Lambda \right] \psi'. \quad (4.2 f)$$

Dans le cas du second système:

$$[\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \Delta] \varphi = 0, \quad [\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \Delta \times \mathbf{1}] \varphi = 0, \\ \dots [\Delta \times \mathbf{1} \times \dots \times \mathbf{1}] \varphi = 0 \quad (4.2 g)$$

on posera

$$\varphi = [\tilde{\Lambda}^* \times \Lambda \times \dots \times \Lambda \times \Lambda] \varphi'. \quad (4.2 h)$$

La loi de formation de la formule de transformation, à laquelle obéit la fonction  $\psi$  dans les autres systèmes, est évidente.

Des grosses difficultés surgissent lorsqu'on essaye de soumettre à la réglementation relativiste les équations primaires pourvues de termes de masse, ainsi que les équations secondaires, non mixtes.

Nous allons ici laisser de côté l'étude de ces difficultés, étant donné d'ailleurs qu'elles ne correspondent guère à une réalité physique.

Les équations mixtes se plient par contre aisément à la formulation relativiste.

Plaçons-nous dans le cas du spin 1. Nous avons:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{1} \times \Delta] \psi &= \boldsymbol{\alpha} [\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma}] \varphi^* , & [\Delta \times \mathbf{1}] \psi &= i \boldsymbol{\alpha} [\mathbf{1} \times \mathbf{1}] \varphi \\ [\mathbf{1} \times \Delta] \varphi &= - \boldsymbol{\alpha} [\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma}] \psi^* , & [\Delta \times \mathbf{1}] \varphi &= i \boldsymbol{\alpha} [\mathbf{1} \times \mathbf{1}] \psi \end{aligned} \right\} \quad (4.2i)$$

La légitimité relativiste de ces équations résulte de leur compatibilité avec les formules de transformation suivantes:

$$\psi = [\Lambda \times \Lambda] \psi' , \quad \varphi = [\tilde{\Lambda}^* \times \Lambda] \varphi' . \quad (4.2j)$$

Quant au cas général du spin  $j$ , nous nous contenterons de le traiter un peu plus loin, lorsque nous étudierons l'emploi de l'algorithme spinoriel.

#### 4.3. *Emploi de l'algorithme spinoriel.*

*Équations secondaires composées et leur polyvariance.*

Les équations primaires du corpuscule de spin  $1/2$  s'écrivent:

$$\mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha} \psi_\alpha = \boldsymbol{\alpha} \psi^{\dot{\beta}} . \quad (4.3a)$$

Les équations composées de degré 1, ou équations de Dirac, s'obtiennent en considérant le double système suivant:

$$\mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha} (1) \psi_\alpha = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \psi^{\dot{\beta}} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha} (2) \psi_\alpha = \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \psi^{\dot{\beta}} \quad (4.3b)$$

ou, en posant

$$\psi = (1) \psi + i (2) \psi , \quad \varphi = (1) \psi - i (2) \psi , \quad (4.3c)$$

le système que voici:

$$\mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha} \psi_\alpha = \boldsymbol{\alpha} \varphi^{\dot{\beta}} , \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha} \varphi_\alpha = \boldsymbol{\alpha} \psi^{\dot{\beta}} . \quad (4.3d)$$

Considérons de même les équations composées du troisième degré, c'est-à-dire l'ensemble de quatre systèmes primaires, et appliquons leur le procédé ci-dessus, ce qui donne

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha(1)}\psi_{\alpha} = \kappa^{(1)}\varphi^{\dot{\beta}} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha(2)}\psi_{\alpha} = \kappa^{(2)}\varphi^{\dot{\beta}} \\ \mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha(1)}\varphi_{\alpha} = \kappa^{(1)}\psi^{\dot{\beta}} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}\alpha(2)}\varphi_{\alpha} = \kappa^{(2)}\psi^{\dot{\beta}} \end{array} \right\} \quad (4.3e)$$

On ne change rien à la nature de ces équations, exception faite du point de vue relativiste, si l'on remplace le couple de spineurs  ${}^{(1)}\psi_{\alpha}$  et  ${}^{(2)}\psi_{\alpha}$  d'une part, et le couple  ${}^{(1)}\varphi^{\dot{\beta}1}$  et  ${}^{(2)}\varphi^{\dot{\beta}2}$  d'autre part, par des spineurs de second rang,  $\psi_{\alpha_1\alpha_2}$  et  $\varphi^{\dot{\beta}1\alpha_2}$ , respectivement, ce qui conduit à écrire les équations (4.3e) de la manière que voici:

$$\mathcal{D}^{\dot{\beta}1\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \kappa\varphi^{\dot{\beta}1}_{\alpha_2}, \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}1\alpha_1}\varphi_{\alpha_1\dot{\beta}2} = \kappa\psi^{\dot{\beta}1\dot{\beta}2}. \quad (4.3f)$$

Nous dirons que les équations jouissent de la propriété de *polyvariance* si elles se laissent écrire avec des êtres géométriques à variance relativiste différente. Les équations (4.3f), lorsqu'on y sépare les grandeurs réelles des grandeurs imaginaires sont équivalentes aux équations de Whittaker où figurent les grandeurs tensorielles réelles (deux vecteurs, un tenseur antisymétrique gauche, un scalaire et un pseudo-scalaire). En prenant un double système (4.3f), c'est-à-dire un quadruple système (4.3d) ou octuple système (4.3a), on obtient les équations composées du septième degré, équivalentes aux équations de Whittaker entre les grandeurs tensorielles complexes (les mêmes que celles énumérées précédemment, mais complexes). La polyvariance dont jouissent ces équations se traduit par le fait qu'elles peuvent s'écrire soit au moyen de huit spineurs de premier rang, soit au moyen de quatre spineurs de deuxième rang, soit enfin au moyen de deux spineurs de quatrième rang.

Passons maintenant aux équations mixtes. Les équations primaires du corpuscule sans masse de spin 1 sont:

$$1^{\text{er}} \text{ système: } \mathcal{D}^{\dot{\beta}1\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}2\alpha_2}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \quad (4.3g')$$

$$2^{\text{e}} \text{ système: } \mathcal{D}^{\dot{\beta}1\alpha_1}\psi_{\alpha_1\dot{\beta}2} = 0 \quad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot{\beta}2}\varphi_{\alpha_1\dot{\beta}2} = 0 \quad (4.3g'')$$

Les équations mixtes s'obtiennent en interconnectant les deux systèmes par le terme de masse:

1<sup>er</sup> système: 
$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \quad \mathcal{O}^{\beta_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \kappa \varphi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1}, \quad (B) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \kappa \varphi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2} \\ (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \varphi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2}, \quad (B) \quad \mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \varphi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2} = -\kappa \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \end{array} \right. \quad (4.3 h')$$

2<sup>e</sup> système: 
$$\left\{ \begin{array}{l} (B) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \kappa \varphi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1}, \quad (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_2} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \kappa \varphi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2} \\ (B) \quad \mathcal{O}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \varphi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = -\kappa \psi_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \varphi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} \end{array} \right. \quad (4.3 h'')$$

Nous saisissons sur cet exemple comme la variance relativiste conditionne la formation des équations du type A et des équations du type B.

Ecrivons encore les équations secondaires mixtes relatives à  $j = 3/2$ .

*Premier système.*

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_3}^{\dot{\beta}_1}, \quad (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} = \kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_3}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} \\ (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2 \alpha_3}, \quad (A) \quad \mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} = -\kappa \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{\dot{\beta}_3} \\ (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \kappa \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{\dot{\beta}_3}, \quad (A) \quad \mathcal{O}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} = -\kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_2 \alpha_3} \\ (A) \quad \mathcal{O}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3} = -\kappa \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{\dot{\beta}_3}, \quad (A) \quad \mathcal{O}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} = -\kappa \psi_{\alpha_1 \alpha_3}^{\dot{\beta}_2} \\ (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3} = \kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3}, \quad (A) \quad \mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} = -\kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_3}^{\dot{\beta}_1} \\ (A) \quad \mathcal{O}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3} = -\kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_1 \alpha_2 \alpha_3}, \quad (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} = \kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} \end{array} \right. \quad (4.3 i')$$

*Deuxième système.*

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1}, \quad (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} \\ (B) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1}, \quad (B) \quad \mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_3 \alpha_2 \alpha_1} \\ (B) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3}, \quad (B) \quad \mathcal{O}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2} = -\kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} \\ (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1}, \quad (A) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_1} \\ (B) \quad \mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}, \quad (B) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2 \alpha_1} \\ (B) \quad \mathcal{O}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2}, \quad (B) \quad \mathcal{O}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \end{array} \right. \quad (4.3 i'')$$

*Troisième système.*

$$\begin{array}{ll}
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \\
 \text{(A)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1}, & \text{(A)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} \\
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{\dot{\beta}_3}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_1} \\
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = -\kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{\dot{\beta}_3}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_1} \\
 \text{(A)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1}, & \text{(A)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} \\
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = -\kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{\dot{\beta}_3}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \alpha_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}
 \end{array}
 \quad \left. \right\} (4.3 i''')$$

*Quatrième système.*

$$\begin{array}{ll}
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \\
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} \\
 \text{(A)} \quad \mathcal{D}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{\dot{\beta}_3}, & \text{(A)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_1} \\
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} \\
 \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}, & \text{(B)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} = -\kappa \psi_{\alpha_3 \alpha_2}^{\dot{\beta}_1} \\
 \text{(A)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \alpha_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2 \alpha_1}, & \text{(A)} \quad \mathcal{D}_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1} = \kappa \psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1}
 \end{array}
 \quad \left. \right\} (4.3 i^{iv})$$

Dans le cas général de spin  $j$ , nous avons à distinguer le cas où  $2j$  est impair du cas où  $2j$  est pair. Dans le premier cas, chaque système comprend un nombre  $r$  de groupes du type A et  $r' = 2j - r$  groupes du type B,  $r$  pouvant prendre les valeurs  $1, 3, \dots, 2j - 2$  et  $2j$  et  $r'$  les valeurs  $2j - 1, 2j - 3, \dots, 2, 0$ . Dans le second cas,  $r$  et  $r'$  prennent les valeurs  $1, 3, \dots, 2j - 1, 2j - 3$  et  $2j - 1, 2j - 3, \dots, 3, 1$ , respectivement.

Classons les formes que prennent, du point de vue spinoriel, les fonctions d'onde relatives aux différentes déterminations du nombre  $r'$  (ce qui revient au même qu'avec celles du nombre  $r$ ). Plaçons-nous dans le cas de  $2j$  impair. Le nombre de systèmes admettant  $r'$  groupes du type B est égal à  $C_{2j}^{2j-r'}$ . Les systèmes à  $r'$  groupes du type B font intervenir comme fonctions d'ondes

$2^{2j}$  spineurs de rang  $2j$  qui peuvent être classés de la manière suivante:

1 spinor  $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2j}}$

$r$  spineurs de la forme  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2j}}$  et  $2j - r$  de la forme

$$\psi^{\dot{\beta}_2 \dots}_{\alpha_l m_l} \dots \dot{\beta}_{2j}$$

(avec  $\sum_{n=0}^{n=r'-1} C_{2j}^{2j-n} + 1 \leq l \leq \sum_{n=0}^{n=r'} C_{2j}^{2j-n}$ ,  $l$  prenant  $C_{2j}^{r'}$  valeurs).

$C_r^2$  spineurs de la forme  $\psi_{\alpha_1} \dots \overset{\beta}{\psi}_{l_{n_1}} \dots \overset{\beta}{\psi}_{l_{n_2}} \dots \alpha_{2j}$

$C_{2j-r}^2$  spineurs de la forme  $\psi_{\alpha_1} \dots \dot{\beta}_{l_{m_1}} \dots \dot{\beta}_{l_{m_2}} \dots \alpha_{2j}$

(avec  $n_i + m_i = 2j$ )

$C_r^1 C_{2j-r}^2$  spineurs de la forme  $\psi^{\dot{\beta}_1} \cdots {}_{\alpha_{n_1}} \cdots {}_{\alpha_{l_{m_1}}} \cdots {}^{\dot{\beta}_{2j}}$

$C_r^3$  spineurs de la forme  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2j}}$

$$C_{2j-r}^3 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \psi^{\beta_1 \dots}_{\alpha_{l_{m_1}} \dots \alpha_{l_{m_2}} \dots \alpha_{l_{m_3}} \dots \beta_{2j}}$$

$$C_r^2 C_{2j-n}^1 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \psi^{\beta_1 \dots}_{\alpha_{l_{n_1}} \dots} \alpha_{l_{n_2}} \dots \alpha_{l_{m_1}} \dots \beta_{2j}$$

$$C_r^1 C_{2j-r}^2 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \psi_{\alpha_1 \dots \overset{\beta}{\alpha}_l \overset{\beta}{\alpha}_{l+n_1} \dots \overset{\beta}{\alpha}_{l+m_1} \dots \overset{\beta}{\alpha}_{l+m_2} \dots \alpha_{2j}}$$

.....

$$\begin{aligned}
 \text{spineurs de la forme} \quad & \psi_{\alpha_1} \dots \overset{\beta}{\psi}_{l_{n_1}} \dots \overset{\beta}{\psi}_{l_{n_s}} \dots \alpha_{2j} \\
 \text{---}r \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\alpha_1} \dots \overset{\beta}{\psi}_{l_{m_1}} \dots \overset{\beta}{\psi}_{l_{m_s}} \dots \alpha_{2j} \quad \text{si } s \text{ est pair} \\ \text{ou } \psi_{\alpha_{l_{m_1}}} \overset{\beta_1}{\dots} \alpha_{l_{m_s}} \dots \overset{\beta_{2j}}{\alpha} \quad \text{si } s \text{ est impair} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$C_r^{s-t} C_{2j-n}^t$  spineurs de la forme  $\left\{ \begin{array}{l} \psi^{\dot{\beta}_1 \dots \alpha_{n_s} \dots \alpha_{n_{s-t}} \dots \alpha_{m_1} \dots \alpha_{m_t} \dots \dot{\beta}_{2j}} \\ \text{si } s \text{ étant quelconque } t \text{ est impair} \\ \text{ou } \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_s} \dots \alpha_{n_{s-t}} \dots \alpha_{m_1} \dots \alpha_{m_t} \dots \alpha_{2j}}^{\dot{\beta}_{n_s} \dots \dot{\beta}_{n_{s-t}} \dots \dot{\beta}_{l_{m_1}} \dots \dot{\beta}_{l_{m_t}} \dots \dot{\beta}_{2j}} \\ \text{si } t \text{ est impair} \end{array} \right.$

Notons la relation facile à vérifier

$$\sum_{t=0}^s C_r^{s-t} C_{2j-r}^t = C_{2j}^s$$

qui montre que dans la classification ci-dessus le nombre total de spineurs est bien égal à  $\sum_{s=1}^{2j} C_{2j}^s = 2^{2j}$ .

Un tableau analogue des fonctions spinorielles peut être dressé dans le cas où  $2j$  est un nombre pair.

En partant de chaque système mixte, nous pouvons former une suite de systèmes composés. Les deux systèmes composés de premier degré pour  $j = 1$  sont identiques et égaux aux équations de L. de Broglie. Pour  $j = 2$  on est conduit aux équations de M<sup>me</sup> Tonnelat.

#### 4.4. *Etude des équations de la mécanique multiondulatoire.*

##### 4.41. *Notation matricielle.*

Commençons par écrire les équations du corpuscule biondulatoire, de spin 1 et sans masse :

$$\text{Premier système} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{smallmatrix} {}^2\Delta_1^1 & - {}^1\Delta_1^1 \\ + & + \end{smallmatrix} \right) [{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \\ \left( \begin{smallmatrix} {}^2\Delta_1^2 & - {}^1\Delta_1^2 \\ + & + \end{smallmatrix} \right) [{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \end{array} \right. \quad (4.41 a')$$

$$\text{Deuxième système} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{smallmatrix} {}^2\Delta_1^1 & - {}^1\Delta_1^1 \\ + & + \end{smallmatrix} \right) [{}^2\varphi \times {}^1\varphi] = 0 \\ \left( \begin{smallmatrix} {}^2\Delta_1^2 & - {}^1\Delta_1^1 \\ - & - \end{smallmatrix} \right) [{}^2\varphi \times {}^1\varphi] = 0 \end{array} \right. \quad (4.41 a'')$$

Les  ${}^k\psi$  et les  ${}^k\varphi$  satisfont aux transformations de Lorentz suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} {}^2\psi = \Lambda {}^2\psi', \quad {}^1\psi = \Lambda {}^1\psi' \\ {}^2\varphi = \tilde{\Lambda} {}^2\varphi', \quad {}^1\varphi = \Lambda {}^1\varphi' \end{array} \right\} \quad (4.41 b)$$

Considérons maintenant le cas du corpuscule biondulatoire de spin  $j$  et de masse au repos nulle dont les équations ont été consignées dans le tableau (3.11  $n$ ).

Dans le cas du premier système nous poserons:

$$c_1^1 \psi = \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ \prod \Lambda \\ 1 \end{array} \right] c_1^1 \psi', \quad c_2^2 \psi = \left[ \begin{array}{c} c_2 \\ \prod \Lambda \\ 1 \end{array} \right] c_2^2 \psi' \quad (4.41c)$$

## du deuxième système:

$$c_1^1 \psi = \left[ \prod_1^1 \Lambda \right] c_1^1 \psi' , \quad c_2^2 = \left[ \tilde{\Lambda}^* \times \prod_1^{c_2-1} \Lambda \right] c_2^2 \psi' \quad (4.41d)$$

### du troisième système:

$$c_1^1 \psi = \left[ \frac{c_1}{\prod \Lambda} \right] c_1^1 \psi' , \quad c_2^2 \psi = \left[ \Lambda \times \tilde{\Lambda}^* \times \prod_{\Lambda}^{\frac{c_2-1}{2}} \right] c_2^2 \psi' \quad (4.41e)$$

du  $2j + 1$ <sup>ième</sup> système

$$c_1^1 \psi = \tilde{\Lambda}^* \times \prod_1^{c_1-1} c_1^1 \psi' , \quad c_2^2 \psi = \left[ \prod_1^{c_2} \Lambda \right] c_2^2 \psi' \quad (4.41f)$$

du  $2^{2j-1}$  système:

1º  $2j$  est un nombre pair

$$a) \qquad \qquad \qquad c_1 \geq c_2 \quad \quad c_1 \geq j \quad \quad c_2 \leq j$$

$$c_1^1 \psi = \left[ \prod_{\Lambda}^{c_1-j} \tilde{\Lambda}^* \times \prod_{\Lambda}^j \Lambda \right] \psi' , \quad c_2^2 \psi = \left[ \prod_{\Lambda}^{c_2} \tilde{\Lambda}^* \right] c_2^2 \psi' \quad (4.41g')$$

$$b) \qquad \qquad \qquad c_1 \leq c_2 \quad \quad c_1 \leq j \quad \quad c_2 \geq j$$

$$c_1^1 \psi = \left[ \prod_{\Lambda} \tilde{\Lambda}^* \right] \psi' , \quad c_2^2 \psi = \left[ \prod_{\Lambda}^j \Lambda \times \prod_{\Lambda}^{c_2 - j} \tilde{\Lambda}^* \right] \psi' \quad (4.41g'')$$

2°  $2j$  est un nombre impair.

On remplacera  $j$  par  $j - \frac{1}{2}$  dans les relations  $a)$  et  $b)$ .

## 4.42. Notation spinorielle.

Equations mixtes du corpuscule bi-ondulatoire de spin 1.

Premier système.

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^2 \psi_{\alpha_2}) {}^1 \psi_{\alpha_1} - {}^2 \psi_{\alpha_2} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^1 \psi_{\alpha_1}) &= \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\ (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2}) {}^1 \psi_{\alpha_1} - {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^1 \psi_{\alpha_1}) &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\ (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^2 \psi_{\alpha_2}) {}^1 \psi_{\alpha_1} - {}^2 \psi_{\alpha_2} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1}) &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ (\mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2}) {}^1 \psi_{\alpha_1} - {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} (\mathcal{O}_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1}) &= - \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \end{aligned} \right\} (4.42 a')$$

Deuxième système.

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^2 \psi_{\alpha_2}) {}^1 \psi_{\alpha_1} - {}^2 \psi_{\alpha_2} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^1 \psi_{\alpha_1}) &= \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\ (\mathcal{O}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} {}^2 \psi_{\alpha_2}) {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} - {}^2 \psi_{\alpha_2} (\mathcal{O}_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1}) &= - \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^2 \psi_{\alpha_2}) {}^1 \psi_{\alpha_1} - {}^2 \psi_{\alpha_2} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1}) &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^2 \psi_{\alpha_2}) {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} - {}^2 \psi_{\alpha_2} (\mathcal{O}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1}) &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \end{aligned} \right\} (4.42 a'')$$

Afin de simplifier les écritures, nous envisagerons les opérateurs  ${}^1\mathcal{O}$  qui agissent sur les fonctions  ${}^1\psi$ ,  ${}^2\mathcal{O}$  qui agissent sur les  ${}^2\psi$ , etc. Avec cette nouvelle notation, il vient :

$$\left. \begin{aligned} ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\ ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\ ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ ({}^2 D_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} - {}^1 D_{\alpha_2 \dot{\beta}_2}) {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= - \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\ ({}^2 D_{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D_{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} &= - \kappa {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\ ({}^2 D_{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D_{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) {}^2 \psi_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \end{aligned} \right\} (4.42 b'')$$

\* Pour des raisons typographiques on a dû mettre depuis cette formule,  $D^{\dot{\beta}\alpha}$  à la place de  $\mathcal{O}^{\dot{\beta}\alpha}$ .

*Equations mixtes composées du corpuscule biondulatoire de spin 1.*

$$\begin{aligned}
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1}] &= \kappa [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi^{\beta_1} - {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1}] \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1}] &= \kappa [{}^{(1)2} \psi^{\beta_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2} \psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1}] \\
 ({}^2 D_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} - {}^1 D_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1}] &= -\kappa [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1}] \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1}] &= \kappa [{}^{(1)2} \psi^{\beta_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)2} \psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1}]
 \end{aligned} \tag{4.42 c}$$

$$\begin{aligned}
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1}] &= \kappa [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi^{\beta_1} + {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1}] \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1}] &= \kappa [{}^{(1)2} \psi^{\beta_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2} \psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1}] \\
 ({}^2 D_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} - {}^1 D_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1} + {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1}] &= -\kappa [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi_{\alpha_1}] \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) [{}^{(1)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1} + {}^{(2)2} \psi_{\alpha_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1}] &= \kappa [{}^{(1)2} \psi^{\beta_2} {}^{(2)1} \psi^{\dot{\beta}_1} + {}^{(2)2} \psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1} \psi^{\dot{\beta}_1}]
 \end{aligned} \tag{4.42 c''}$$

*Equations mixtes du corpuscule biondulatoire de spin  $3/2$ .*

Nous avons deux cas à envisager suivant le nombre de composantes de deux champs d'onde.

$$\begin{aligned}
 1^0 \quad {}^1 \psi &= {}^1 \psi_{\alpha_1} \quad \text{et} \quad {}^2 \psi = {}^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_2} \\
 2^0 \quad {}^1 \psi &= {}^1 \psi_{\alpha_2 \alpha_1} \quad \text{et} \quad {}^2 \psi = {}^2 \psi_{\alpha_3} .
 \end{aligned}$$

Nous allons écrire les équations d'onde relatives au premier cas :

$$\begin{aligned}
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) {}^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_2} {}^1 \psi^{\beta_1} \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) {}^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi_{\alpha_3} {}^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} - {}^1 D^{\dot{\beta}_3 \alpha_3}) {}^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_3} {}_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} - {}^1 D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}) {}^2 \psi^{\dot{\beta}_3} {}_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_3} {}_{\alpha_2} {}^1 \psi^{\dot{\beta}_1} \\
 ({}^2 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} - {}^1 D^{\dot{\beta}_2 \alpha_2}) {}^2 \psi^{\dot{\beta}_3} {}_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2 \psi^{\dot{\beta}_3} {}^{\dot{\beta}_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} \\
 ({}^2 D_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} - {}^1 D_{\alpha_3 \dot{\beta}_3}) {}^2 \psi^{\dot{\beta}_3} {}_{\alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1} &= -\kappa {}^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_2} {}^1 \psi_{\alpha_1}
 \end{aligned} \tag{4.42 d', 4.42 d''}$$

$$\left. \begin{aligned} ({}^2D^{\dot{\beta}_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot{\beta}_1\alpha_1}) {}^2\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \\ ({}^2D_{\alpha_2\dot{\beta}_2} - {}^1D_{\alpha_2\dot{\beta}_2}) {}^2\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} \\ ({}^2D^{\dot{\beta}_3\alpha_3} - {}^1D^{\dot{\beta}_3\alpha_3}) {}^2\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^2\psi^{\dot{\beta}_3} {}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} \end{aligned} \right\} (4.42 d''')$$

$$\left. \begin{aligned} ({}^2D_{\alpha_1\dot{\beta}_1} - {}^1D_{\alpha_1\dot{\beta}_1}) {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_0}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi_{\alpha_1} \\ ({}^2D^{\dot{\beta}_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot{\beta}_2\alpha_2}) {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^2\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \\ ({}^2D^{\dot{\beta}_3\alpha_3} - {}^1D^{\dot{\beta}_3\alpha_3}) {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^2\psi^{\dot{\beta}_3} {}_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \end{aligned} \right\} (4.42 d^{IV})$$

La formation des équations mixtes composées s'effectue comme pour le corpuscule bi-ondulatoire de spin 1. Chacune des équations précédentes va se dédoubler selon l'exemple suivant, qui est celui de la première équation:

$$\left. \begin{aligned} ({}^2D^{\dot{\beta}_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot{\beta}_1\alpha_1}) [{}^{(1)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(1)}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(2)}\psi_{\alpha_1}] &= \\ = \kappa [{}^{(1)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(1)}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1}] & \\ ({}^2D^{\dot{\beta}_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot{\beta}_1\alpha_1}) [{}^{(1)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(2)}\psi_{\alpha_1} + {}^{(2)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(1)}\psi_{\alpha_1}] &= \\ = \kappa [{}^{(1)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(2)}\psi^{\dot{\beta}_1} + {}^{(2)}\psi_{\alpha_3\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^{(1)}\psi^{\dot{\beta}_1}] & \end{aligned} \right\} (4.42 e)$$

*Equations mixtes du corpuscule triondulatoire de spin  $\frac{3}{2}$ .*

Nous poserons

$$[{}^3D]^{\dot{\beta}\alpha} = - {}^3D^{\dot{\beta}\alpha} + {}^2D^{\dot{\beta}\alpha} - {}^1D^{\dot{\beta}\alpha}. \quad (4.42 f)$$

Nous avons affaire à quatre systèmes d'équations dont voici le premier:

$$\left. \begin{aligned} [{}^3D]^{\dot{\beta}_1\alpha_1} {}^3\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^3\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \\ [{}^3D]^{\dot{\beta}_2\alpha_2} {}^3\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^3\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} \\ [{}^3D]^{\dot{\beta}_3\alpha_3} {}^3\psi_{\alpha_3}^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_1} {}^1\psi_{\alpha_1} \end{aligned} \right\} (4.42 g')$$

$$\left. \begin{aligned} [{}^3D]_{\dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \\ [{}^3D]_{\alpha_2 \dot{\beta}_2}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi_{\alpha_2} \\ [{}^3D]_{\alpha_3 \dot{\beta}_3}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} &= \kappa {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.42 g'')$$

$$\left. \begin{aligned} [{}^3D]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^3\psi^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi_{\alpha_1} \\ [{}^3D]_{\alpha_2 \dot{\beta}_2}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^3\psi^{\dot{\beta}_2} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \\ [{}^3D]_{\alpha_3 \dot{\beta}_3}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.42 g''')$$

$$\left. \begin{aligned} [{}^3D]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi_{\alpha_1} \\ [{}^3D]_{\alpha_2 \dot{\beta}_2}^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi_{\alpha_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \\ [{}^3D]_{\alpha_3 \dot{\beta}_3}^{\dot{\beta}_3 \alpha_3} {}^3\psi_{\alpha_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} &= \kappa {}^3\psi^{\dot{\beta}_3} {}^2\psi^{\dot{\beta}_2} {}^1\psi^{\dot{\beta}_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.42 g^{IV})$$

Les autres systèmes peuvent s'écrire aussi facilement, il suffit dans les équations correspondantes du corpuscule un-ondulatoire de spin  $3/2$  (4.3  $i''$  à 4.3  $i^{IV}$ ) de scinder les spineurs de troisième rang en produits de trois spineurs de premier rang.

Pour obtenir les équations mixtes composées il faut prendre comme fonctions d'onde les huit expressions suivantes:

$$\begin{aligned} & {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} - \\ & \quad - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} \\ & {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} + \\ & \quad + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} \\ & {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - \\ & \quad - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} \\ & {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)3}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} + \\ & \quad + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - \\
& - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_1} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_1} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} \\
& {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} + \\
& + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_1} {}^{(1)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(2)1}\psi^{\dot{\beta}_1} + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_1} {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2} {}^{(1)1}\psi^{\dot{\beta}_1} \\
& {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} - \\
& - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} \\
& {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} + \\
& + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(1)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3} {}^{(2)2}\psi^{\dot{\beta}_2} {}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}$$

La première et la deuxième expression doivent être soumises à l'action des opérateurs:

$$[{}^3D]^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}, \quad [{}^3D]^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} \text{ et } [{}^3D]^{\dot{\beta}_3 \alpha_3},$$

la troisième et la quatrième à l'action des opérateurs:

$$[{}^3D]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}, \quad [{}^3D]_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \text{ et } [{}^3D]_{\alpha_3 \dot{\beta}_3}$$

la cinquième et la sixième à celle des:

$$[{}^3D]_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}, \quad [{}^3D]_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \text{ et } [{}^3D]_{\alpha_3 \dot{\beta}_3}$$

et les deux dernières à celle des:

$$[{}^3D]^{\dot{\beta}_1 \alpha_1}, \quad [{}^3D]_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \text{ et } [{}^3D]^{\dot{\beta}_3 \alpha_3}.$$

5. APERÇU DE LA THÉORIE DES ONDES PLANES EN MÉCANIQUE  
ONDULATOIRE SIMPLE ET EN MÉCANIQUE MULTIONDULATOIRE  
DES CORPUSCULES DE SPIN QUELCONQUE.

5.1. *Mécanique uniondulatoire.*

5.11. *Corpuscule de spin  $\frac{1}{2}$ .*

Prenons les équations primaires, écrites spinoriellement

$$D^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1} = \kappa \psi^{\dot{\beta}_1}$$

et posons-y

$$\psi_1 = a_1 e^{iS} + b_1 e^{-iS}, \quad \psi_2 = a_2 e^{iS} + b_2 e^{-iS} \quad (5.11 a)$$

avec

$$S = \frac{i}{\hbar} (Wt - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) \quad (5.11 b)$$

Il vient immédiatement que les amplitudes  $a_k$  et  $b_k$  satisfont au système d'équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) a_1 - (p_1 + i p_2) a_2 & - i m_0 c b_2^* = 0 \\ - (p_1 - i p_2) a_1 + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_2 & + i m_0 c b_1^* = 0 \\ - i m_0 c a_2 + \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) b_1^* - (p_1 - i p_2) b_2^* & = 0 \\ i m_0 c a_1 & - (p_1 + i p_2) b_1^* + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) b_2^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11 c)$$

dont le déterminant est égal à

$$\left( \frac{W^2}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m_0^2 c^2 \right)^2 = 0. \quad (5.11 d)$$

Les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  s'expriment en fonctions des  $a_1$  et  $a_2$ , on a:

$$\left. \begin{aligned} b_1^* &= \frac{-(p_1 - i p_2) a_1 + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) a_2}{-i m_0 c} \\ b_2^* &= \frac{-\left(\frac{W}{c} + p_3\right) a_1 + (p_1 + i p_2) a_2}{-i m_0 c} \end{aligned} \right\} \quad (5.11 e)$$

Pour obtenir l'onde plane à énergie positive  $\Psi^+$  de l'équation de Dirac (solution qui n'est pas « complète »), nous devons associer les solutions  ${}^1\psi$  et  ${}^2\psi$  de deux équations primaires, solutions qui ne sont pas indépendantes. L'onde  $\Psi^+$ , en effet, doit être de la forme  $A e^{iS}$ ; posons

$$\begin{aligned} \Psi_1^+ &= {}^1\psi + i {}^2\psi = A_1 e^{iS} = \\ &= ({}^1a + i {}^2a) e^{iS} + ({}^1b + i {}^2b) e^{-iS} \end{aligned}$$

d'où

$${}^2b = i {}^1b. \quad (5.11 f')$$

De même, de la relation

$$\Psi_2^+ = \sigma[{}^1\psi^* + i {}^2\psi^*] = A_2 e^{iS}$$

on tire

$${}^2a = -i {}^1a. \quad (5.11 f'')$$

La solution  ${}^2\Psi$  s'écrit donc

$${}^2\Psi = -i {}^1a e^{iS} + i {}^2b e^{-iS} = a e^{iS'} + b e^{-iS'} \quad (5.11 g)$$

avec

$$S' = S - \frac{\pi}{2} = \frac{W}{c}t - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - \frac{\pi}{2}. \quad (5.11 h)$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}({}^1\psi_1 + i {}^2\psi_1) = a_1 e^{iS}, & \varphi_2 &= \frac{1}{2}({}^1\psi_2 + i {}^2\psi_2) = a_2 e^{iS} \\ \theta_1 &= \frac{1}{2}({}^1\psi_1 - i {}^2\psi_1) = b_1 e^{-iS}, & \theta_2 &= \frac{1}{2}({}^1\psi_2 - i {}^2\psi_2) = b_2 e^{-iS} \end{aligned} \quad (4.11 i)$$

et, ensuite

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \varphi_1 - i \theta_2^* = (a_1 - i b_2^*) e^{iS} = A_1 e^{iS} \\ \Psi_2 &= \varphi_1 + i \theta_2^* = (a_1 + i b_2^*) e^{iS} = A_2 e^{iS} \\ \Psi_3 &= \varphi_2 + i \theta_1^* = (a_2 + i b_1^*) e^{iS} = A_3 e^{iS} \\ \Psi_4 &= \varphi_2 - i \theta_1^* = (a_2 - i b_1^*) e^{iS} = A_4 e^{iS} \end{aligned} \right\} \quad (5.11 j)$$

Compte tenu de (5.11 e), on trouve facilement:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\left(-\frac{W}{c} + p_3 - m_0 c\right) a_1 + (p_1 + i p_2) a_2}{m_0 c} \\ A_2 &= \frac{\left(\frac{W}{c} + p_3 + m_0 c\right) a_1 - (p_1 + i p_2) a_2}{m_0 c} \\ A_3 &= \frac{-(p_1 - i p_2) a_1 + \left(\frac{W}{c} + m_0 c - p_3\right) a_2}{m_0 c} \\ A_4 &= (p_1 - i p_2) a_1 - \left(\frac{W}{c} - p_3 - m_0 c\right) a_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.11 k)$$

En exprimant  $A_1$  et  $A_4$  en fonction de  $A_2$  et  $A_3$  on trouve bien

$$A_1 = \frac{(p_1 + i p_2) A_3 - p_3 A_2}{\frac{W}{c} + m_0 c}, \quad A_4 = \frac{(p_1 - i p_2) A_2 + p_3 A_3}{\frac{W}{c} + m_0 c} \quad (5.11 l)$$

### 5.12. *Corpuscule de spin 1.*

Ecrivons explicitement les équations primaires de ce corpuscule, en nous bornant au premier système:

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t - \partial_3) \psi_{11} + (\partial_1 + i \partial_2) \psi_{12} &= -\kappa \varphi_{22}^* \\ (\partial_1 - i \partial_2) \psi_{11} + (\partial_t + \partial_3) \psi_{12} &= \kappa \varphi_{21}^* \\ (\partial_t - \partial_3) \psi_{21} + (\partial_t + i \partial_2) \psi_{22} &= \kappa \varphi_{12}^* \\ (\partial_1 - i \partial_2) \psi_{21} + (\partial_t + \partial_3) \psi_{22} &= -\kappa \varphi_{11}^* \end{aligned} \right\} \quad (5.12 a')$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (\partial_t - \partial_3) \varphi_{11} + (\partial_1 + i \partial_2) \varphi_{12} & = & \kappa \psi_{22}^* \\ (\partial_1 - i \partial_2) \varphi_{11} + (\partial_t + \partial_3) \varphi_{12} & = & - \kappa \psi_{21}^* \\ (\partial_t - \partial_3) \varphi_{21} + (\partial_1 + i \partial_2) \varphi_{22} & = & - \kappa \psi_{12}^* \\ (\partial_1 - i \partial_2) \varphi_{21} + (\partial_t + \partial_3) \varphi_{22} & = & \kappa \psi_{11}^* \end{array} \right\} \quad (5.12 a'')$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (\partial_t - \partial_3) \psi_{11} + (\partial_1 + i \partial_2) \psi_{21} & = & i \kappa \varphi_{11} \\ (\partial_1 - i \partial_2) \psi_{11} + (\partial_t + \partial_3) \psi_{21} & = & i \kappa \varphi_{21} \\ (\partial_t - \partial_3) \psi_{12} + (\partial_1 + i \partial_2) \psi_{22} & = & i \kappa \varphi_{12} \\ (\partial_1 - i \partial_2) \psi_{12} + (\partial_t + \partial_3) \psi_{22} & = & i \kappa \varphi_{22} \end{array} \right\} \quad (5.12 a''')$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (\partial_t + \partial_3) \varphi_{11} - (\partial_1 + i \partial_2) \varphi_{21} & = & i \kappa \psi_{11} \\ - (\partial_1 - i \partial_2) \varphi_{11} + (\partial_t - \partial_3) \varphi_{21} & = & i \kappa \psi_{21} \\ (\partial_t + \partial_3) \varphi_{12} - (\partial_1 + i \partial_2) \varphi_{22} & = & i \kappa \psi_{12} \\ - (\partial_1 - i \partial_2) \psi_{12} + (\partial_t - \partial_3) \varphi_{22} & = & i \kappa \psi_{22} \end{array} \right\} \quad (5.12 a^{IV})$$

Cherchons les solutions de la forme:

$$\left. \begin{array}{lcl} \psi_{lk} & = & a_{lk} e^{iS} + b_{lk} e^{-iS} \\ \varphi_{lk} & = & c_{lk} e^{iS} + d_{lk} e^{-iS} \end{array} \right\} \quad (5.12 b)$$

Les coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{22}$  étant fixés arbitrairement, tous les autres coefficients se trouvent déterminés. Il vient:

$$\left. \begin{array}{lcl} c_{11} & = & 1/m_0 c \left[ \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) a_{11} - (p_1 + i p_2) a_{21} \right] \\ c_{12} & = & 1/m_0 c \left[ \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) a_{12} - (p_1 + i p_2) a_{22} \right] \\ c_{21} & = & 1/m_0 c \left[ - (p_1 - i p_2) a_{11} + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{21} \right] \\ c_{22} & = & 1/m_0 c \left[ - (p_1 - i p_2) a_{12} + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{22} \right] \end{array} \right\} \quad (5.12 c')$$

$$\left. \begin{aligned}
 d_{11} &= \frac{i}{m_0 c} \left[ - (p_1 + i p_2) a_{21}^* + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{22}^* \right] \\
 d_{12} &= - \frac{i}{m_0 c} \left[ \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) a_{21}^* - (p_1 - i p_2) a_{22}^* \right] \\
 d_{21} &= - \frac{i}{m_0 c} \left[ - (p_1 + i p_2) a_{11}^* + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{12}^* \right] \\
 d_{22} &= \frac{i}{m_0 c} \left[ \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) a_{11}^* - (p_1 - i p_2) a_{12}^* \right]
 \end{aligned} \right\} (5.12 c'') \\
 b_{11} &= - \frac{i}{m_0^2 c^2} \left[ (p_1 + i p_2)^2 a_{11}^* - \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) (p_1 + i p_2) (a_{12}^* + a_{21}^*) + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{23}^* \right] \\
 b_{12} &= \frac{i}{m_0^2 c^2} \left[ - \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) (p_1 + i p_2) a_{11}^* + \left( \frac{W^2}{c^2} - p_3^2 \right) a_{21}^* + (p_1^2 + p_2^2) a_{12}^* - \right. \\
 &\quad \left. - (p_1 - i p_2) \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{22}^* \right] \\
 b_{21} &= \frac{i}{m_0^2 c^2} \left[ - \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) (p_1 + i p_2) a_{11}^* + (p_1^2 + p_2^2) a_{21}^* + \left( \frac{W}{c} - p_3^2 \right) a_{12}^* - \right. \\
 &\quad \left. - (p_1 - i p_2) \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) a_{22}^* \right] \\
 b_{22} &= - \frac{i}{m_0^2 c^2} \left[ \frac{W}{c} + p_3 \right]^2 a_{11}^* - \left( \frac{W}{c} + p_3 \right) (p_1 - i p_2) (a_{12}^* + a_{21}^*) + (p_1 - i p_2)^2 a_{22}^*
 \end{aligned} \right\} (5.12 c''')$$

Pour obtenir la solution « onde plane à énergie positive » des équations mixtes composées (équations du corpuscule de spin 1 de L. de Broglie), nous précéderons comme en théorie du corpuscule de spin  $\frac{1}{2}$ . Aux équations (5.12a) nous allons adjoindre un second système d'équations exactement pareil, mais dont nous prendrons les solutions suivantes:

$$\left. \begin{aligned}
 {}^2\psi_{lk} &= a_{lk} e^{i(S - \frac{\pi}{2})} + b_{lk} e^{-i(S - \frac{\pi}{2})} \\
 {}^2\varphi_{lk} &= c_{lk} e^{i(S - \frac{\pi}{2})} + d_{lk} e^{-i(S - \frac{\pi}{2})}
 \end{aligned} \right\} (5.12 d)$$

Posons [Cf. (2.23 b)]

$$\left. \begin{aligned}
 {}^1\Phi_{lk} &= {}^{1/2}({}^1\psi_{lk} + i {}^2\psi_{lk}) = a_{th} e^{iS} \\
 {}^2\Phi_{lk} &= {}^{1/2}({}^1\varphi_{lk} + i {}^2\varphi_{lk}) = c_{th} e^{iS} \\
 {}^3\Phi_{lk} &= - \frac{i}{2} [\sigma \times \sigma] ({}^1\varphi_{lk}^* + i {}^2\varphi_{lk}^*) = - i [\sigma \times \sigma] d_{lk}^* e^{iS} \\
 {}^4\Phi_{lk} &= \frac{i}{2} [\sigma \times \sigma] ({}^1\psi_{lk}^* + i {}^2\psi_{lk}^*) = i [\sigma \times \sigma] b_{lk}^* e^{iS}
 \end{aligned} \right\} (5.12 e)$$

et ensuite

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{11} + {}^4\Phi_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{11} - i b_{22}^*) e^{iS} = A_{11} e^{iS} \\ \Psi_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{12} + {}^4\Phi_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} - i b_{21}) e^{iS} = A_{12} e^{iS} \\ \Psi_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{21} + {}^4\Phi_{21}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{21} + i b_{12}) e^{iS} = A_{13} e^{iS} \\ \Psi_{14} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{22} + {}^4\Phi_{22}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{22} - i b_{11}) e^{iS} = A_{14} e^{iS} \end{aligned} \right\} (5.12 f')$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{11} + {}^3\Phi_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{11} + i d_{22}^*) e^{iS} = A_{21} e^{iS} \\ \Psi_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{12} + {}^3\Phi_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{12} - i d_{21}^*) e^{iS} = A_{22} e^{iS} \\ \Psi_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{21} + {}^3\Phi_{21}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{21} - i d_{12}^*) e^{iS} = A_{23} e^{iS} \\ \Psi_{24} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{22} + {}^3\Phi_{22}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{22} + i d_{11}^*) e^{iS} = A_{24} e^{iS} \end{aligned} \right\} (5.12 f'')$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{31} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{11} - {}^3\Phi_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{11} - i d_{22}^*) e^{iS} = A_{31} e^{iS} \\ \Psi_{32} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{12} - {}^3\Phi_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{12} + i d_{21}^*) e^{iS} = A_{32} e^{iS} \\ \Psi_{33} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{21} - {}^3\Phi_{21}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{21} + i d_{12}^*) e^{iS} = A_{33} e^{iS} \\ \Psi_{34} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^2\Phi_{22} - {}^3\Phi_{22}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{22} - i d_{11}^*) e^{iS} = A_{34} e^{iS} \end{aligned} \right\} (5.12 f''')$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{41} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{11} - {}^4\Phi_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{11} + i b_{22}^*) e^{iS} = A_{41} e^{iS} \\ \Psi_{42} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{12} - {}^4\Phi_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} - i b_{21}^*) e^{iS} = A_{42} e^{iS} \\ \Psi_{43} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{21} - {}^4\Phi_{21}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{21} - i b_{12}^*) e^{iS} = A_{43} e^{iS} \\ \Psi_{44} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}^1\Phi_{22} - {}^4\Phi_{22}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{22} + i b_{11}^*) e^{iS} = A_{44} e^{iS} \end{aligned} \right\} (5.12 f^{IV})$$

En se servant des relations (5.12  $c'$ ,  $c''$  et  $c'''$ ) on exprimera les seize amplitudes  $A_{eh}$  de l'onde plane à énergie positive en fonction des quatre paramètres  $a_{11}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{22}$ .

La méthode s'étend sans difficulté à l'étude des ondes planes des corpuscules de spin quelconque.

## 5.2. Mécanique multiondulatoire.

## 5.21. Corpuscule de spin biondulatoire de spin 1.

En cherchant les solutions de la forme

$$\left. \begin{aligned} {}^1\psi_{\alpha_1} &= {}^1a_{\alpha_1} e^{i^1 S} + {}^1b_{\alpha_1} e^{-i^1 S} \\ {}^2\psi_{\alpha_2} &= {}^2a_{\alpha_2} e^{i^2 S} + {}^2b_{\alpha_2} e^{-i^2 S} \end{aligned} \right\} \quad (5.21 a)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} {}^1S &= \frac{^1W}{c} t - {}^1p_1 x_1 - {}^1p_2 x_2 - {}^1p_3 x_3 \\ {}^2S &= \frac{^2W}{c} t - {}^2p_1 x_1 - {}^2p_2 x_2 - {}^2p_3 x_3 \end{aligned} \right\}, \quad (5.21 b)$$

des équations (4.4 d'), on trouve immédiatement les relations suivantes entre les coefficients  ${}^1a$  et  ${}^1b$  d'une part, et les coefficients  ${}^2a$  et  ${}^2b$  d'autre part

$$\left. \begin{aligned} {}^1b_1^* &= {}^1/m_0 c \left\{ - \left[ ({}^2p_1 - {}^1p_1) - i({}^2p_2 - {}^1p_2) \right] {}^l a_1 + \left[ \frac{^2W - {}^1W}{c} - ({}^2p_3 - {}^1p_3) \right] {}^l a_2 \right\} \\ {}^1b_2^* &= {}^1/m_0 c \left\{ - \left[ \frac{^2W - {}^1W}{c} + ({}^2p_3 - {}^1p_3) \right] {}^l a_1 + \left[ ({}^2p_1 - {}^1p_1) + i({}^2p_2 - {}^1p_2) \right] {}^l a_2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

où  $l = 1$  ou  $2$ .

On voit donc que les coefficients  ${}^1b$  de la première fonction d'onde ne dépendent que des coefficients  ${}^1a$  de la même fonction d'onde et, de même, les coefficients  ${}^2b$  s'expriment uniquement en fonction de  ${}^2a$ , les relations ne faisant intervenir que les différences

$$\frac{W}{c} = \frac{^2W}{c} - \frac{^1W}{c} \quad \text{et} \quad p_k = {}^2p_k - {}^1p_k. \quad (5.21 d)$$

Dans le cas d'équations mixtes composées nous avons pour fonctions d'onde les expressions suivantes:

$${}^{(m)} {}^l \psi_{\alpha_l} = {}^{(m)} {}^l a_{\alpha_l} e^{i^l S} + {}^{(m)} {}^l b_{\alpha_l} e^{-i^l S} \quad (5.21 e)$$

où  $m = 1$  et  $2$

avec

$$\begin{aligned} {}^{(1)}l b_1^* + {}^{(2)}l b_1^* &= {}^{1/m_0} c \left\{ - (p_1 + i p_2) \left( {}^{(1)}l a_1 + i {}^{(2)}l a_1 \right) + \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) \left( {}^{(1)}l a_2 + i {}^{(2)}l a_2 \right) \right\} \\ {}^{(1)}l b_3^* + {}^{(2)}l b_2^* &= {}^{1/m_0} c \left\{ - \left( \frac{W}{c} - p_3 \right) \left( {}^{(1)}l a_1 + i {}^{(2)}l a_1 \right) + (p_1 + i p_2) \left( {}^{(1)}l a_2 + i {}^{(2)}l a_2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.21 f)$$

### 5.22. Corpuscule n-ondulatoire de spin $\frac{n}{2}$ .

Nous avons

$${}^l \Psi_{\alpha_l} = {}^l a_{\alpha_l} e^{i l S} + {}^l b_{\alpha_l} e^{-i l S}, \quad l = 1, 2, \dots n \quad (5.22 a)$$

avec

$$\begin{aligned} {}^l b_1^* &= {}^{1/m_0} c \left\{ - [p_1 - i p_2] a_1^l + \left[ \frac{W}{c} - p_3 \right] a_2^l \right\} \\ {}^l b_2^* &= {}^{1/m_0} c \left\{ - \left[ \frac{W}{c} + p_3 \right] a_1^l + [p_1 + i p_2] a_2^l \right\} \end{aligned} \quad (5.22 b)$$

où

$$W = \sum_{l=1}^n (-1)^l {}^l W \quad p = \sum_{l=1}^n (-1)^l {}^l p. \quad (5.23 c)$$

### 5.23. Corpuscule biondulatoire de spin $\frac{3}{2}$ .

Nous poserons donc les équations (4.42 d):

$$\begin{aligned} {}^1 \Psi_{\alpha_1} &= {}^1 a_{\alpha_1} e^{i 1 S} + {}^1 b_{\alpha_1} e^{-i 1 S}, \quad {}^2 \Psi_{\alpha_3 \alpha_2} = {}^2 a_{\alpha_3 \alpha_2} e^{i 2 S} + {}^3 b_{\alpha_3 \alpha_2} e^{-i 2 S} \\ {}^2 \dot{\Psi}_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3} &= {}^2 c_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3} e^{i 2 S} + {}^2 d_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3} e^{-i 2 S}. \end{aligned} \quad (5.23 a)$$

On trouve facilement que les coefficients  $a_{\alpha}$  et  $b_{\alpha}$  satisfont aux relations (5.11 e), tandis que les coefficients  $a_{\alpha_3 \alpha_2}$ ,  $b_{\alpha_3 \alpha_2}$ ,  $c_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3}$  et  $d_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_3}$ , aux relations (5.12 c), où on a, dans celles-ci comme dans celles-là:

$$W = {}^2 W - {}^1 W \quad \text{et} \quad p = {}^2 p - {}^1 p. \quad (5.23 b)$$

(à suivre)