Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 27 (1945)

Artikel: Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires [suite]
Autor: Kwal, Bernard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742475

1945 Vol. 27 Janvier-Février

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL[1]

(suite)

DEUXIÈME PARTIE

Résumé.

Après avoir développé dans la première partie de ce travail la théorie des corpuscules de spin quelconque, caractérisée par une seule fonction d'onde associée (à plusieurs composantes), nous étudions maintenant les corpuscules, caractérisés par plusieurs fonctions d'onde associée (chacune avec son cortège de composantes). Conformément au plan adopté précédemment, nous commençons par l'étude des équations primaires et tout d'abord par celles relatives au corpuscule bi-ondulatoire de spin 1, $^3/_2$ et j, ensuite celles relatives au corpuscule tri-ondulatoire de spin $^3/_2$ et j, et celles relatives au corpuscule g-ondulatoire de spin $g/2$ et $j \geqslant g/2$.

Nous étudions ensuite les équations secondaires: équations composées du premier degré du corpuscule bi-ondulatoire de spin 1 et du corpuscule g-ondulatoire de spin j; les équations mixtes du corpuscule bi-ondulatoire de spin 1, du corpuscule tri-ondulatoire de spin $^3/_2$ et du corpuscule g-ondulatoire de

[1] Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

spin j. Enfin, nous écrirons les équations mixtes composées pour le corpuscule bi-ondulatoire de spin 1, pour le corpuscule tri-ondulatoire de spin $^3/_2$ et pour le corpuscule g-ondulatoire de spin j.

Parmi les propriétés des corpuscules multi-ondulatoires, il convient de signaler les deux suivantes: 1° Le corpuscule à un nombre impair des fonctions d'onde admet comme spin fondamental (spin le plus bas possible) un spin demi-entier, tandis que le corpuscule à un nombre pair des fonctions d'onde admet comme spin fondamental un spin entier. 2° Les équations à un nombre pair des fonctions d'onde sont insensibles à l'action du champ électromagnétique et semblent convenir à la théorie des corpuscules neutres. Cela étant, nous avançons l'hypothèse que la statistique basée sur le principe d'exclusion de Pauli a trait aux corpuscules à un nombre impair des fonctions d'onde associée, tandis que la statistique de Bose-Einstein a trait aux corpuscules à un nombre pair des fonctions d'onde associée.

3. Equations d'onde des corpuscules de spin quelconque à plusieurs fonctions d'onde associée.

Les corpuscules élémentaires de spin quelconque dont nous avons étudié les équations d'onde dans la première partie de ce travail, présentent deux traits caractéristiques essentiels. En premier lieu, leur comportement à l'état stationnaire est définie par la donnée d'une seule fonction d'onde associée, qui, d'ailleurs, possède un certain nombre de composantes, responsables du spin et des propriétés relativistes. Deuxièmement, les équations d'onde, qui déterminent les états stationnaires, sont sensibles à l'action du terme figurant le champ électromagnétique extérieur, et qu'on introduit, en remplaçant dans ces équations les opérateurs différentiels ∂_i par les opérateurs $\partial_i + \varepsilon A_i$, les A_i étant les composantes du potentiel-vecteur.

Dans ce qui suit nous allons essayer de généraliser la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires afin qu'elle puisse rendre compte des corpuscules dont le comportement à l'état stationnaire fait intervenir *plusieurs* fonctions d'onde autonomes, chacune pourvue de son cortège de composantes. Parmi ces corpuscules multi-ondulatoires, une classe, comme nous le verrons, celle qui est caractérisée par un nombre pair des fonctions d'onde associée, comprend des corpuscules essentiellement *neutres*, c'est-à-dire insensibles intrinsèquement à l'action du champ électromagnétique. Les équations d'onde de ces corpuscules sont telles en effet, que bien qu'on remplace les opérateurs ∂_i par $\partial_i + \varepsilon A_i$, les termes en A_i n'y interviennent point, car ils s'en trouvent automatiquement éliminés.

On comprend l'intérêt de ce type d'équations pour la théorie des corpuscules neutres, comme les photons, les neutrons, les gravitons, etc.

3.1 *Equations primaires.*

3.11 *Equations primaires des corpuscules à deux fonctions d'onde associée.*

Le corpuscule à deux fonctions d'onde associée admet comme spin fondamental (le spin le plus bas possible) le spin 1. Comme dans la théorie du corpuscule uni-ondulatoire de spin 1, il existe ici deux systèmes d'équations, comprenant chacun deux groupes. Nous allons les écrire explicitement, en supposant tout d'abord nulle la masse au repos du corpuscule:

$$\left.\begin{aligned}
{}^2\psi_1(\partial_t-\partial_3)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_t-\partial_3)\,{}^2\psi_1+{}^2\psi_1(\partial_1+i\partial_2)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_1+i\partial_2)\,{}^2\psi_1&=0\\
{}^2\psi_1(\partial_1-i\partial_2)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_1-i\partial_2)\,{}^2\psi_1+{}^2\psi_1(\partial_t+\partial_3)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_t+\partial_3)\,{}^2\psi_1&=0\\
{}^2\psi_2(\partial_t-\partial_3)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_t-\partial_3)\,{}^2\psi_2+{}^2\psi_2(\partial_1+i\partial_2)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_1+i\partial_2)\,{}^2\psi_2&=0\\
{}^2\psi_2(\partial_1-i\partial_2)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_1-i\partial_2)\,{}^2\psi_2+{}^2\psi_2(\partial_t+\partial_3)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_t+\partial_3)\,{}^2\psi_2&=0
\end{aligned}\right\}\quad(3.11a)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}^2\psi_1(\partial_t-\partial_3)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_t-\partial_3)\,{}^2\psi_1+{}^2\psi_2(\partial_1+i\partial_2)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_1+i\partial_2)\,{}^2\psi_2&=0\\
{}^2\psi_1(\partial_1-i\partial_2)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_1-i\partial_2)\,{}^2\psi_1+{}^2\psi_2(\partial_t+\partial_3)\,{}^1\psi_1-{}^1\psi_1(\partial_t+\partial_3)\,{}^2\psi_2&=0\\
{}^2\psi_1(\partial_t-\partial_3)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_t-\partial_3)\,{}^2\psi_1+{}^2\psi_2(\partial_1+i\partial_2)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_1+i\partial_2)\,{}^2\psi_2&=0\\
{}^2\psi_1(\partial_1-i\partial_2)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_1-i\partial_2)\,{}^2\psi_1+{}^2\psi_2(\partial_t+\partial_3)\,{}^1\psi_2-{}^1\psi_2(\partial_t+\partial_3)\,{}^2\psi_2&=0
\end{aligned}\right\}\quad(3.11b)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}^2\psi_1(\partial_t - \partial_3)\,{}^1\psi_1 - {}^1\psi_1(\partial_t - \partial_3)\,{}^2\psi_1 + {}^2\psi_1(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^1\psi_2 - {}^1\psi_2(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^2\psi_1 &= 0\\
{}^2\psi_1(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^1\psi_1 - {}^1\psi_1(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^2\psi_1 + {}^2\psi_1(\partial_t + \partial_3)\,{}^1\psi_2 - {}^1\psi_2(\partial_t + \partial_3)\,{}^2\psi_1 &= 0\\
{}^2\psi_2(\partial_t - \partial_3)\,{}^1\psi_1 - {}^1\psi_1(\partial_t - \partial_3)\,{}^2\psi_2 + {}^2\psi_2(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^1\psi_2 - {}^1\psi_2(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^2\psi_2 &= 0\\
{}^2\psi_2(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^1\psi_1 - {}^1\psi_1(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^2\psi_2 + {}^2\psi_2(\partial_t + \partial_3)\,{}^1\psi_2 - {}^1\psi_2(\partial_t + \partial_3)\,{}^2\psi_2 &= 0
\end{aligned}\right\}\quad (3.11c)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}^2\psi_1(\partial_t + \partial_3)\,{}^1\psi_1 - {}^1\psi_1(\partial_t + \partial_3)\,{}^2\psi_1 - {}^2\psi_2(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^1\psi_1 + {}^1\psi_1(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^2\psi_2 &= 0\\
-{}^2\psi_1(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^1\psi_1 + {}^1\psi_1(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^2\psi_1 + {}^2\psi_2(\partial_t - \partial_3)\,{}^1\psi_1 - {}^1\psi_1(\partial_t - \partial_3)\,{}^2\psi_2 &= 0\\
{}^2\psi_1(\partial_t + \partial_3)\,{}^1\psi_2 - {}^1\psi_2(\partial_t + \partial_3)\,{}^2\psi_1 - {}^2\psi_2(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^2\psi_2 + {}^1\psi_2(\partial_1 + i\partial_2)\,{}^2\psi_2 &= 0\\
-{}^2\psi_1(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^1\psi_2 + {}^1\psi_2(\partial_1 - i\partial_2)\,{}^2\psi_1 + {}^2\psi_2(\partial_t - \partial_3)\,{}^1\psi_2 - {}^1\psi_2(\partial_t - \partial_3)\,{}^2\psi_2 &= 0
\end{aligned}\right\}\quad (3.11d)$$

Nous allons condenser l'écriture de ces équations, en faisant appel à la multiplication extérieure des matrices et en introduisant deux sortes d'opérateurs différentiels: les uns ${}^1\partial_i$ et ${}^1S^{1/2} = 2\sigma_i^{1/2}\,{}^1\partial_i$ agissant sur les fonctions ${}^1\psi$, les autres ${}^2\partial_i$ et ${}^2S^{1/2} = 2\sigma_i^{1/2}\,{}^2\partial_i$ agissant sur les fonctions ${}^2\psi$.

$$\left[1 \times \left\{({}^2\partial_t + {}^2S^{1/2}) - ({}^1\partial_t + {}^1S^{1/2})\right\}\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11a')$$

$$\left[\left\{({}^2\partial_t + {}^2S^{1/2}) - ({}^1\partial_t + {}^1S^{1/2})\right\} \times 1\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11b')$$

$$\left[1 \times \left\{({}^2\partial_t + {}^2S^{1/2}) - ({}^1\partial_t + {}^1S^{1/2})\right\}\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11c')$$

$$\left[\left\{({}^2\partial_t - {}^2S^{1/2}) - ({}^1\partial_t - {}^1S^{1/2})\right\} \times 1\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11d')$$

Avec les notations introduites au § 2.1, nous pouvons écrire encore:

$$\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S^1_2\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S^1_2\right)\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11a'')$$

$$\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S^1_1\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S^1_1\right)\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11b'')$$

$$\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S^1_2\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S^1_2\right)\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0 \qquad (3.11c'')$$

$$\left[\left({}^2\partial_t - {}^2S^1_1\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S^1_1\right)\right][{}^2\psi \times {}^1\psi] = 0. \qquad (3.11d'')$$

Nous avons écrit les équations d'onde du corpuscule avant d'écrire l'hamiltonien correspondant. Celui-ci a la forme suivante:

$${}^{1,2}\mathcal{H} = \frac{h}{i}\left[\left({}^2S^1_2 - {}^1S^1_2\right) + \left({}^2S^1_1 - {}^1S^1_1\right)\right]. \qquad (3.11e)$$

Un complément de définition s'impose lorsque cet opérateur agit sur des expressions contenant en plus des fonctions d'onde ${}^1\psi$ et ${}^2\psi$ les variables x_1, x_2, x_3 et t, explicitement. En cas d'une dérivation ordinaire portant sur une fonction $f\left(x_i,\ {}^1\psi(x_i),\ {}^2\psi(x_i)\right)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\delta}{\delta x_i} + \frac{\partial}{\partial^1\psi}\frac{\partial^1\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial^2\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i}$$

or dans la théorie du corpuscule bi-ondulatoire nous devons poser

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\delta}{\delta x_i} + \frac{\partial}{\partial^2\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial^1\psi}\frac{\partial^1\psi}{\partial x_i},$$

et compléter la définition de l'hamiltonien de la manière que voici:

$$ {}^{1,2}\mathcal{H} = \frac{h}{i}\left[\left({}^{x}S^{1}_{2} + {}^{2}S^{1}_{2} - {}^{1}S^{1}_{2}\right) + \left({}^{x}S^{1}_{1} + {}^{2}S^{1} - {}^{1}S^{1}_{1}\right)\right] \qquad (3.22e')$$

avec

$$\left.\begin{aligned} {}^{x}S^{1}_{2} = 1 \times {}^{x}S^{1/2}, \qquad {}^{x}S^{1}_{1} &= {}^{x}S^{1/2} \times 1 \\ {}^{x}S^{1/2} &= 2\sigma_i^{1/2}\frac{\delta}{\delta x_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.11f)$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'hamiltonien (3.11e') correspond effectivement au corpuscule de spin 1. Nous allons définir tout d'abord l'opérateur « moment de la quantité de mouvement » par les expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} {}^{1,2}\mathcal{M}_{x_1} &= x_2(\delta_3 + {}^2\partial_3 - {}^1\partial_3) - x_3(\delta_2 + {}^2\partial_2 - {}^1\partial_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3.11g)$$

On vérifie aisément qu'on obtient une « intégrale première » $\mathcal{L}$, c'est-à-dire un opérateur qui satisfait à la relation $\mathcal{H}\,\mathcal{L} - \mathcal{L}\,\mathcal{H} = 0$, en posant

$$\left.\begin{aligned} {}^{1,2}\mathcal{L}_{x_1} &= {}^{1,2}\mathcal{M}_{x_1} + h\left\{\left[1 \times \sigma_1^{1/2}\right] + \left[\sigma_1^{1/2} \times 1\right]\right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3.11h)$$

ce qui montre précisément que l'hamiltonien (3.11e') est relatif au corpuscule de spin 1.

Passons maintenant au corpuscule de spin $^3/_2$ dont les quatre systèmes d'équations d'onde s'écrivent de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_3^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_3^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_2^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_2^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_1^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_1^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.11i)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_3^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_3^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_2^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_2^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t - {}^2S_1^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t - {}^1S_1^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.11j)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_3^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_3^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t - {}^2S_2^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t - {}^1S_2^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_1^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_1^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.11k)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left({}^2\partial_t - {}^2S_3^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t - {}^1S_3^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_2^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_2^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_2}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0\\
&\left[\left({}^2\partial_t + {}^2S_1^{3/2}\right) - \left({}^1\partial_t + {}^1S_1^{3/2}\right)\right]\left[{}^2_{c_1}\psi \times {}^1_{c_1}\psi\right] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.11l)$$

Dans ces équations les fonctions $_{c_2}\psi$ et $_{c_1}\psi$ sont à 2^{c_2} et 2^{c_1} composantes respectivement, c_1 et c_2 étant des entiers non nuls, tels que $c_1 + c_2 = 3$, c'est-à-dire pouvant prendre deux valeurs 1 ou 2. Dans le cas général du spin j, il existe $(2j - 1)\,2^{2j-1}$ systèmes d'équations primaires, comprenant chacun $2j$ groupes de 2^{2j} équations, les deux fonctions d'onde ${}^2_{c_2}\psi$ et ${}^1_{c_1}\psi$ étant à 2^{c_2} et 2^{c_1} composantes, respectivement, c_1 et c_2 étant deux entiers non nuls, tels que $c_1 + c_2 = 2j$, c'est-à-dire pouvant prendre chacun une des $2j - 1$ valeurs: 1, 2, ... $2j - 1$.

Posons

$$\underset{+}{\Delta}{}^j_n = \partial_t + S^j_n\,, \qquad \underset{-}{\Delta}{}^j_n = \partial_t - S^j_n\,. \qquad (3.11m)$$

Dans ces conditions, les équations du corpuscule bi-ondulatoire de spin j s'écrivent de la manière que voici:

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{i}_{n}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \ldots \\
\qquad \ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,. \\
(2)\ \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{i}_{1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \ldots \\
\ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j-1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j-1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \quad \left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{j}_{2j}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{j}_{2j}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,. \\
(3)\ \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi - {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \ldots \\
\ldots \left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{j}_{2j-1}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{j}_{2j-1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] \,; \quad \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}} - {}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}}\right){}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi] = 0 \,. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(2j-1)\ \left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{j}_{1}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{j}_{1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \quad \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{2}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \ldots \\
\ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(2^{2j-1})^{*}\ \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \ldots \left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{j \text{ ou } j-1/2}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{j \text{ ou } j-1/2}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \\
\left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{j}_{j+1 \text{ ou } j+1/2}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{j}_{j+1 \text{ ou } j+1/2}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,, \ldots \left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{j}_{2j}} - {}^{1}_{j}\underset{-}{\Delta^{j}_{2j}}\right)\left[{}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0
\end{array}\right\} \quad (3.11n)$$

Quant au terme de masse, il peut être introduit de la même manière qu'en théorie uni-ondulatoire. Nous allons imposer aux fonctions ${}^{2}\psi$ et ${}^{1}\psi$ la condition:

$$\left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{j}_{n}}\right)\left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}}\right)[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi] = -\varkappa^{2}[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi] \,, \quad (3.11o)$$

* j et $j+1$ lorsque $2j$ est un nombre pair, $j-1/2$ et $j+1/2$ lorsque $2j$ est un nombre impair.

c'est-à-dire:

$$\left({}^2\square_n - {}^1\square_n - {}^2\Delta^j_{\underset{-}{n}}\,{}^1\Delta^j_{\underset{+}{n}} - {}^1\Delta^j_{\underset{-}{n}}\,{}^2\Delta^j_{\underset{-}{n}}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi] = -\varkappa^2[{}^2\psi \times {}^1\psi]\,, \tag{3.11o'}$$

ou encore:

$$\left({}^2\square_n - {}^1\square_n - 2\,{}^2\partial_t\,{}^1\partial_t + {}^2S^j_n\,{}^2S^j_n + {}^1S^j_n\,{}^2S^j_n\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi] = -\varkappa^2[{}^2\psi \times {}^1\psi^2\,. \tag{3.11o''}$$

On vérifie sans difficulté que cette condition nous fournit les mêmes termes de masse que ceux qu'on a trouvés en théorie uni-ondulatoire.

3.12 *Equations primaires des corpuscules à trois fonctions d'onde associée.*

Le corpuscule tri-ondulatoire admet comme spin fondamental (spin le plus bas possible) le spin $^3/_2$. Soient ${}^1\psi$, ${}^2\psi$ et ${}^3\psi$ les trois champs ondulatoires, associés au corpuscule, et ${}^k\partial_i$, ${}^kS^{1/2} = 2\,\sigma_i^{1/2}\,{}^k\partial_i$ les opérateurs différentiels n'agissant que sur l'une des trois fonctions ${}^k\psi$. Nous avons quatre systèmes d'équations du corpuscule tri-ondulatoire de spin fondamental, qu'on peut obtenir en remplaçant dans les quatre systèmes d'équations du corpuscule uni-ondulatoire de spin $^3/_2$ la fonction ψ par le produit extérieur ${}^3\psi \times {}^2\psi \times {}^1\psi$ et les opérateurs $\partial_t + S^{1/2}$ et $\partial_t - S^{1/2}$, respectivement pour les opérations:

$$\left\{-\left({}^1\partial_t + {}^1S^{1/2}\right) + \left({}^2\partial_t + {}^2S^{1/2}\right) - \left({}^3\partial_t + {}^3S^{1/2}\right)\right\}$$

$$\text{et}\quad \left\{-\left({}^1\partial_t - {}^1S^{1/2}\right) + \left({}^2\partial_t - {}^2S^{1/2}\right) - \left({}^3\partial_t - {}^3S^{1/2}\right)\right\}\,. \tag{3.12a}$$

Pour le corpuscule tri-ondulatoire de spin 2 il y aura à envisager les fonctions ${}^1_{c_1}\psi$, ${}^2_{c_2}\psi$ et ${}^3_{c_3}\psi$ à 2^{c_1}, 2^{c_2} et 2^{c_3} composantes, respectivement. Les nombres c_1, c_2 et c_3 sont des entiers non nuls, tels que $c_1 + c_2 + c_3 = 4$, donc pouvant admettre les déterminations suivantes:

c_1	1	1	2
c_2	1	2	1
c_3	2	1	1

Dans le cas général du corpuscule tri-ondulatoire de spin $j \geqslant {}^3/_2$, il existe $\dfrac{(2j-1)(2j-2)}{2} \cdot 2^{2j-1}$ systèmes d'équations primaires admettant trois fonctions d'onde ${}^{3}_{c_3}\psi$, ${}^{2}_{c_2}\psi$, ${}^{1}_{c_1}\psi$ à 2^{c_3}, 2^{c_2} et 2^{c_1} composantes respectivement, c_3, c_2 et c_1 étant trois entiers non nuls tels que $c_1 + c_2 + c_3 = 2j$, ce qui donne $\dfrac{(2j-1)(2j-2)}{2}$ combinaisons possibles.

Les systèmes d'équations s'écrivent de la manière analogue aux systèmes (3.11n). Ecrivons-en le premier système:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(-{}^{3}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}} + {}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{1}}\right)\left[{}^{3}_{c_3}\psi \times {}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(-{}^{3}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} + {}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{n}}\right)\left[{}^{3}_{c_3}\psi \times {}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(-{}^{3}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}} + {}^{2}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{j}_{2j}}\right)\left[{}^{3}_{c_3}\psi \times {}^{2}_{c_2}\psi \times {}^{1}_{c_1}\psi\right] = 0 \,.
\end{array}\right\} \quad (3.12h)$$

Remplaçons dans ces équations les opérateurs ${}^{m}\partial_i$ par les expressions ${}^{m}\partial_i + \varepsilon A_i$, les A_i étant les composantes du potentiel quadrivecteur électromagnétique. On vérifie aisément que les équations du corpuscule tri-ondulatoire de n'importe quel spin sont sensibles à l'action du terme électromagnétique. Il est donc naturel d'attribuer à ce corpuscule une charge électrique.

3.13 *Equations primaires des corpuscules à un nombre quelconque des fonctions d'onde associée.*

Le corpuscule multi-ondulatoire à g fonctions d'onde associée admet pour spin fondamental le spin $g/2$. Soient ${}^{1}\psi$, ${}^{2}\psi$, ... ${}^{k}\psi$, ... ${}^{g}\psi$, les g champs ondulatoires qui définissent les états du corpuscule et ${}^{k}\partial_i$, ${}^{k}S^{1/2}_{i} = 2\sigma^{i}_{1/2}\,{}^{k}\partial_i$ les opérateurs différentiels n'agissant que sur l'une des g fonctions ${}^{k}\psi$. Il existe 2^{2g-1} systèmes d'équations primaires, pour le corpuscule à g fonctions d'onde associée de spin fondamental, systèmes qu'on peut obtenir en remplaçant dans les systèmes d'équations primaires du corpuscule uni-ondulatoire de spin $g/2$, la fonction d'onde ψ par le produit

$${}^{1}\psi \times {}^{2}\psi \times \ldots \times {}^{m}\psi \times \ldots \times {}^{g}\psi = \prod_{1}^{g} {}^{m}\psi \qquad (3.13a)$$

et les opérateurs $\partial_t \pm S^{1/2}$ par les opérateurs

$$\left.\begin{aligned}&\left({}^1\partial_t \pm {}^1S^{1/2}\right) - \left({}^2\partial_t \pm {}^2S^{1/2}\right) + \left({}^3\partial_t \pm {}^3S^{1/2}\right) + \dots\\&\dots + (-1)^{m-1}\left({}^m\partial_t \pm {}^mS^{1/2}\right) + \dots + (-1)^{g-1}\left({}^g\partial_t \pm {}^gS^{1/2}\right) =\\&= \sum_1^g (-1)^{m-1}\left({}^m\partial_t + {}^mS^{1/2}\right) .\end{aligned}\right\} \tag{3.13b}$$

Dans le cas général du corpuscule g-ondulatoire de spin $j \geqslant g/2$, il existe C_{2j-1}^{g-1} systèmes d'équations admettant g fonctions d'onde ${}^g_{c_g}\psi$, ${}^{g-1}_{c_{g-1}}\psi$, ... ${}^m_{c_m}\psi$, ... ${}^1_{c_1}\psi$, à 2^{c_g}, $2^{c_{g-1}}$, 2^{c_m}, ... 2^{c_1} composantes respectivement; les nombres c_m étant g entiers non nuls tels que $\sum_1^g c_m = 2j$, ce qui donne précisément C_{2j-1}^{g-1} possibilités. Ces systèmes s'écrivent de la manière que voici:

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\left\{\begin{aligned}&\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{1}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\quad \left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{2}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\\&\dots\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{n}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots \sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{2j}}\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,.\end{aligned}\right.\\
&(2)\left\{\begin{aligned}&\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{1}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^i_{\underset{+}{n}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\\&\dots\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^i_{\underset{+}{2i-1}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\quad \left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{-}{2j}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,.\end{aligned}\right.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(2j+1)\left\{\begin{aligned}&\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{-}{1}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\quad \left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^i_{\underset{+}{2}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\\&\dots\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{n}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\left(\sum(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{2j}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,.\end{aligned}\right.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(2^{2j-1})\left\{\begin{aligned}&\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{1}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{+}{j\text{ ou }j-1/2}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\\&\left(\sum_1^g(-1)^m\,{}^m\Delta^j_{\underset{-}{j+1\text{ ou }j+1/2}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,,\ \dots\left(\sum_1^g(-1)^m\,\Delta^j_{\underset{-}{2j}}\right)\left[\prod_1^g {}^m_{c_m}\psi\right]=0\,.\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}$$

Dans le dernier groupe, on prendra j et $j+1$ lorsque $2j$ est un nombre pair, $j - \frac{1}{2}$ et $j + \frac{1}{2}$ lorsque $2j$ est un nombre impair.

En imposant aux fonctions ${}^m\psi$ la condition:

$$\left\{\left(\sum_1^g (-1)^m\, {}^m\underset{-}{\Delta^j_n}\right)\left(\sum_1^g (-1)^{m'}\, {}^{m'}\underset{+}{\Delta^j_n}\right) + \varkappa^2\right\}\left[\prod_1^g {}^m\psi\right] = 0 \qquad (3.13d)$$

on obtient les mêmes termes de masse qu'en théorie uni-ondulatoire.

En remplaçant les opérateurs ${}^m\partial_i$ par ${}^m\partial_i + \varepsilon A_i$, on vérifie que, lorsque g est impair, dans les équations subsiste, après la substitution, un terme en A_i et que, lorsque g est pair, ce terme est automatiquement éliminé.

3.2 *Equations secondaires.*

3.21 *Equations composées.*

Comme en théorie uni-ondulatoire, nous obtenons les équations composées de degré k, en considérant un système de $k+1$ équations primaires, écrites de manière à faire apparaître dans le terme de masse le produit de mêmes fonctions ${}^m\psi$, qui figurent dans le reste de l'équation, et non pas leurs complexes conjugués.

Ecrivons premièrement les équations composées du premier degré, relatives au corpuscule bi-ondulatoire de spin 1. Nous allons nous contenter de l'un des deux systèmes:

$$\left.\begin{aligned}
&\left({}^2\underset{+}{\Delta^1_2} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_2}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi - {}^2\varphi \times {}^1\varphi] = \varkappa[\sigma' \times \sigma][{}^2\psi^* \times {}^1\psi^* - {}^2\varphi^* \times {}^1\varphi^*]\\
&\left({}^2\underset{+}{\Delta^1_1} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_1}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi - {}^2\varphi \times {}^1\varphi] = \varkappa[\sigma \times \sigma'][{}^2\psi^* \times {}^1\psi^* - {}^2\varphi^* \times {}^1\varphi^*]\\
&\left({}^2\underset{+}{\Delta^1_2} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_2}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi^* - {}^2\varphi \times {}^1\varphi^*] = \varkappa[\sigma' \times \sigma][{}^2\psi^* \times {}^1\psi - {}^2\varphi^* \times {}^1\varphi]\\
&\left({}^2\underset{+}{\Delta^1_1} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_1}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi^* - {}^2\varphi \times {}^1\varphi^*] = \varkappa[\sigma \times \sigma'][{}^2\psi^* \times {}^1\psi - {}^2\varphi^* \times {}^1\varphi]\\
&\left({}^2\underset{-}{\Delta^1_2} - {}^1\underset{-}{\Delta^1_2}\right)[{}^2\psi^* \times {}^1\varphi + {}^2\varphi^* \times {}^1\psi] = \varkappa[\sigma' \times \sigma][{}^2\psi \times {}^1\varphi^* + {}^2\varphi \times {}^1\varphi^*]\\
&\left({}^2\underset{+}{\Delta^1_1} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_1}\right)[{}^2\psi^* \times {}^1\varphi + {}^2\varphi^* \times {}^1\psi] = \varkappa[\sigma \times \sigma'][{}^2\psi \times {}^1\varphi^* + {}^2\varphi \times {}^1\psi^*]\\
&\left({}^2\underset{-}{\Delta^1_2} - {}^1\underset{-}{\Delta^1_2}\right)[{}^2\psi^* \times {}^1\varphi^* + {}^2\varphi^* \times {}^1\psi^*] = \varkappa[\sigma' \times \rho][{}^2\psi \times {}^2\varphi + {}^1\varphi \times {}^1\psi]\\
&\left({}^1\underset{-}{\Delta^1_1} - {}^1\underset{-}{\Delta^1_1}\right)[{}^2\psi^* \times {}^1\varphi^* + {}^2\varphi^* \times {}^1\psi^*] = \varkappa[\sigma \times \sigma'][{}^2\psi \times {}^1\varphi + {}^2\varphi \times {}^1\psi]
\end{aligned}\right\} \qquad (3.21a)$$

Posons

$$\left.\begin{array}{ll} {}^1\Psi^{\cdot 1} = {}^1\psi + i\,{}^1\varphi\ , & {}^1\Psi^{\cdot 2} = [\sigma \times \sigma]\,({}^1\psi^* + i\,{}^1\varphi^* \\ {}^2\Psi^{\cdot 1} = {}^2\psi + i\,{}^2\varphi\ , & {}^2\Psi^{\cdot 2} = [\sigma \times \sigma]\,({}^2\psi^* + i\,{}^2\varphi^* \end{array}\right\} \quad (3.21b)$$

et considérons les nouvelles fonctions d'onde suivantes:

$${}^1\Psi^{\cdot} = \begin{vmatrix} {}^1\Psi^{\cdot 1} \\ {}^1\Psi^{\cdot 2} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad {}^2\Psi^{\cdot} = \begin{vmatrix} {}^2\Psi^{\cdot 1} \\ {}^2\Psi^{\cdot 2} \end{vmatrix}\ .$$

Dans ces conditions les équations (3.21a) s'écrivent, compte tenu des relations: $\sigma'\sigma = -\sigma\sigma'$ et $\sigma\sigma^* = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} {}^2\underset{+}{\Delta^1_2} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_2}\ , & \varkappa[\sigma'\sigma \times 1] \\ \varkappa[\sigma'\sigma \times 1]\ , & {}^2\underset{-}{\Delta^1_2} - {}^1\underset{-}{\Delta^1_2} \end{vmatrix} [{}^2\Psi^{\cdot} \times {}^1\Psi^{\cdot}] = 0 \\[2em] \begin{vmatrix} {}^2\underset{+}{\Delta^1_1} - {}^1\underset{+}{\Delta^1_1}\ , & \varkappa[1 \times \sigma'\sigma] \\ \varkappa[1 \times \sigma'\sigma]\ , & {}^2\underset{-}{\Delta^1_1} - {}^1\underset{-}{\Delta^1_1} \end{vmatrix} [{}^2\Psi^{\cdot} \times {}^1\Psi^{\cdot}] = 0\ . \end{array}\right\} \quad (3.21c)$$

Considérons maintenant le cas général du corpuscule g-ondulatoire de spin $j\,(\geqslant g/2)$. Envisageons un système quelconque et, appartenant à ce système, un groupe d'équations caractérisé par l'indice n (place de l'opérateur $S^{1/2}$ dans le produit S^j_n). Ce groupe d'équations s'écrit:

$$\left(\sum_1^g (-1)^m\, {}^m\underset{+}{\Delta^j_n}\right) \Sigma'_e \left[\prod_1^{g}{}'_e\ {}^m_{c_m}\psi\right] = \varkappa\, \sigma^j_n\, \Sigma'_l \left[\prod_1^{g}{}'_l\ {}^m_{c_m}\psi^*\right]\ . \quad (3.21d)$$

($l = 1$ ou 2), où $\left[\prod_1^{g}{}'_l\ {}^m_{c_m}\psi\right]$ est un produit de g facteurs pris parmi ${}^1\psi \ldots {}^g\psi$, ${}^1\varphi \ldots {}^g\varphi$, ${}^1\psi^* \ldots {}^g\psi^*$, ${}^1\varphi^* \ldots {}^g\varphi^*$. Σ'_1 et Σ'_2 sont des sommes des produits $\prod_1^{g}{}'_1$ et $\prod_1^{g}{}'_2$ contenant respectivement un nombre pair p_1 et un nombre impair $p_2 = 2k + 1$ de fonctions φ ou φ^*. Dans les sommes Σ'_1 les produits Π'_1 sont affectés du signe $+$ ou $-$ suivant que p_1 est un multiple pair ou impair de 2 et dans Σ'_2 les produits Π'_2 sont affectés du signe $+$ ou $-$ suivant que k est un multiple pair ou impair de 2.

En posant

$$\sigma^{j}_{n} = \left[\sigma' \times \sigma'' \times \ldots \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times \ldots \times \sigma^{(2j)}\right]$$

le produit σ^{j}_{n} contenant au total un nombre impair des matrices σ.

Posons:

$$\overset{m}{\underset{c_m}{}}\Psi^{\cdot 1} = \overset{m}{\underset{c_m}{}}\psi + i\,\overset{m}{\underset{c_m}{}}\varphi\ , \qquad \overset{m}{\underset{c_m}{}}\Psi^{\cdot 2} = \sigma\left(\overset{m}{\underset{c_m}{}}\psi^{*} + i\,\overset{m}{\underset{c_m}{}}\psi^{*}\right) . \qquad (3.21e)$$

En tenant compte des relations:

$$\sigma\sigma^{l} = -\,\sigma^{l}\sigma \quad \text{lorsque} \quad \sigma_{l} \neq \sigma)\ , \qquad \sigma\sigma^{*} = -1\ ,$$

les équations (3.21*d*) et (3.21*d'*) prennent la forme:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{1}^{g}(-1)^{m}\,\underset{+}{{}^{m}\Delta^{j}_{n}}\ , & \varkappa\left[\sigma^{j}_{n} \times \prod\limits_{1}^{2j}\sigma\right] \\ \varkappa\,(-1)^{2j}\left[\sigma^{j}_{n} \times \prod\limits_{1}^{2j}\sigma\right], & \sum\limits_{1}^{g}(-1)^{m}\,\underset{-}{{}^{m}\Delta^{j}_{n}} \end{vmatrix} \left[\prod_{1}^{g}\overset{m}{\underset{c_m}{}}\Psi^{\cdot}\right] = 0\ . \qquad (3.21f)$$

3.22 *Equations mixtes.*

Considérons de prime abord les équations du corpuscule biondulatoire de spin 1. Nous avons deux systèmes d'équations primaires. Le premier est formé de deux groupes (3.11*a*) et (3.11*b*), le second de deux groupes (3.11*c*) et (3.11*d*). Nous allons former les deux systèmes mixtes, en interconnectant par les termes de masse soit le premier système avec le second, soit le premier avec le complexe conjugué du second, et ceci de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\left\{\begin{array}{l} \Big(\underset{+}{{}^{2}\Delta^{1}_{2}} - \underset{+}{{}^{1}\Delta^{1}_{2}}\Big)[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi] = \varkappa[\sigma \times \sigma]\,[{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi] \\ \Big(\underset{+}{{}^{2}\Delta^{1}_{2}} - \underset{+}{{}^{1}\Delta^{1}_{2}}\Big)[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi^{*}] = -\varkappa[\sigma \times \sigma]\,[{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi^{*}] \end{array}\right. \\ (2)\left\{\begin{array}{l} \Big(\underset{+}{{}^{2}\Delta^{1}_{1}} - \underset{+}{{}^{1}\Delta^{1}_{1}}\Big)[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi] = i\varkappa[1 \times 1]\,[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi^{*}] \\ \Big(\underset{-}{{}^{2}\Delta^{1}_{1}} - \underset{-}{{}^{1}\Delta^{1}_{1}}\Big)[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi^{*}] = i\varkappa[1 \times 1]\,[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi] \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (3.22a)$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(1)\left\{\begin{array}{l}
\left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{1}_{2}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{1}_{2}}\right)[{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi] = i\varkappa[1 \times 1][{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi] \\
\left({}^{2}\underset{-}{\Delta^{1}_{2}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{1}_{2}}\right)[{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi] = i\varkappa[1 \times 1][{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi]
\end{array}\right. \\
(2)\left\{\begin{array}{l}
\left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{1}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{1}_{1}}\right)[{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi] = \varkappa[\sigma \times \sigma][{}^{2}\psi \times {}^{1}\psi^{*}] \\
\left({}^{2}\underset{+}{\Delta^{1}_{1}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{1}_{1}}\right)[{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi] = -\varkappa[\sigma \times \sigma][{}^{2}\psi^{*} \times {}^{1}\psi^{*}]\,.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (3.22\,b)
$$

D'une manière plus générale et, en posant ${}^{m}\Psi = \begin{vmatrix} {}^{m}\psi \\ {}^{m}\varphi \end{vmatrix}$ les équations précédentes s'écrivent (mêmes notations qu'en mécanique uni-ondulatoire):

$$
\left.\begin{array}{l}
\left({}^{2}\partial_{t} - {}^{1}\partial_{t} + \left[\sigma^{l} \times \left({}^{2}S^{1}_{n} - {}^{1}S^{1}_{n}\right)\right]\right)[{}^{2}\Psi \times {}^{1}\Psi] = \varkappa[\sigma^{k} \times \sigma \times \sigma][{}^{2}\Psi^{*} \times {}^{1}\Psi^{*}] \\
\left({}^{2}\partial_{t} - {}^{1}\partial_{t} + \left[\sigma^{l'} \times \left({}^{2}S^{1}_{n'} - {}^{1}S^{1}_{n'}\right)\right]\right)[{}^{2}\Psi \times {}^{1}\Psi] = i\varkappa[\sigma^{k'} \times 1 \times 1][{}^{2}\Psi \times {}^{1}\Psi]
\end{array}\right\} \quad (2.22\,a')
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\left({}^{2}\partial_{t} - {}^{1}\partial_{t} + \left[\sigma^{l'} \times \left({}^{2}S^{1}_{n} - {}^{1}S^{1}_{n}\right)\right]\right)[{}^{2}\Psi \times {}^{1}\Psi] = i\varkappa[\sigma^{k'} \times 1 \times 1][{}^{2}\Psi \times {}^{1}\Psi] \\
\left({}^{2}\partial_{t} - {}^{1}\partial_{t} + \left[\sigma^{l} \times \left({}^{2}S^{1}_{n'} - {}^{1}S^{1}_{n'}\right)\right]\right)[{}^{2}\Psi \times {}^{1}\Psi] = \varkappa[\sigma^{k} \times \sigma \times \sigma][{}^{2}\Psi^{*} \times {}^{1}\Psi^{*}]\,.
\end{array}\right\} \quad (3.22\,b')
$$

Considérons maintenant les équations du corpuscule tri-ondulatoire de spin fondamental. Nous avons quatre systèmes primaires auxquels correspondent quatre système mixtes. Nous allons écrire explicitement le premier système:

Premier groupe:

$$
\left.\begin{array}{l}
\left(-{}^{3}\underset{+}{\Delta^{3/2}_{3}} + {}^{2}\underset{+}{\Delta^{3/2}_{3}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{3/2}_{3}}\right)\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{I}} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{I}} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{I}}\right] = \varkappa[\sigma \times \sigma \times \sigma]\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{II}*} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{II}*} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{II}*}\right] \\
\left(-{}^{3}\underset{+}{\Delta^{3/2}_{3}} + {}^{2}\underset{+}{\Delta^{3/2}_{3}} - {}^{1}\underset{+}{\Delta^{3/2}_{3}}\right)\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{II}} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{II}} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{II}}\right] = \varkappa[\sigma \times \sigma \times \sigma]\left[{}^{2}\psi^{\mathrm{I}*} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{I}*} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{I}*}\right] \\
\left(-{}^{3}\underset{-}{\Delta^{3/2}_{3}} + {}^{2}\underset{-}{\Delta^{3/2}_{3}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{3/2}_{3}}\right)\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{III}} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{III}} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{III}}\right] = \varkappa[\sigma \times \sigma \times \sigma]\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{IV}*} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{IV}*} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{IV}*}\right] \\
\left(-{}^{3}\underset{-}{\Delta^{3/2}_{2}} + {}^{2}\underset{-}{\Delta^{3/2}_{3}} - {}^{1}\underset{-}{\Delta^{3/2}_{3}}\right)\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{IV}} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{IV}} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{IV}}\right] = \varkappa[\sigma \times \sigma \times \sigma]\left[{}^{3}\psi^{\mathrm{III}*} \times {}^{2}\psi^{\mathrm{III}*} \times {}^{1}\psi^{\mathrm{III}*}\right].
\end{array}\right\}
$$

Deuxième groupe:

$$\left.\begin{aligned}
&\Bigl(-{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{2}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{2}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{2}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{I}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{I}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{I}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{III}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{III}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{III}*}\bigr]\\
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{2}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{2}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{2}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{II}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{II}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{II}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{IV}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{IV}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{IV}*}\bigr]\\
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{2}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{2}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{2}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{III}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{III}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{III}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{I}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{I}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{I}*}\bigr]\\
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{2}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{2}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{2}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{IV}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{IV}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{IV}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{II}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{II}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{II}*}\bigr].
\end{aligned}\right\}\quad(3.22d)$$

Troisième groupe:

$$\left.\begin{aligned}
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{1}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{1}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{1}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{I}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{I}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{I}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{IV}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{IV}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{IV}*}\bigr]\\
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{1}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{1}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{1}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{II}}\times{}^{3}\psi^{\mathrm{II}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{II}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{III}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{III}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{III}*}\bigr]\\
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{1}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{1}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{-}{1}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{III}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{III}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{III}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{II}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{II}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{II}*}\bigr]\\
&\Bigl(-{}^{3}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{1}}+{}^{2}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{1}}-{}^{1}\Delta^{3/2}_{\underset{+}{1}}\Bigr)\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{IV}}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{IV}}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{IV}}\bigr]=\varkappa[\sigma\times\sigma\times\sigma]\bigl[{}^{3}\psi^{\mathrm{I}*}\times{}^{2}\psi^{\mathrm{I}*}\times{}^{1}\psi^{\mathrm{I}*}\bigr].
\end{aligned}\right\}\quad(3.22e)$$

Nous pouvons écrire ces équations de la manière condensée suivante:

$$\Bigl\{-{}^{3}\partial_t+{}^{2}\partial_t-{}^{1}\partial_t+[\sigma_3\times 1]\times\bigl[-{}^{3}S^{3/2}_{3}+{}^{2}S^{3/2}_{3}-{}^{1}S^{3/2}_{3}\bigr]\Bigr\}\left[\prod_1^3{}^{m}\psi\right]=\varkappa\left\{[1\times\sigma_1]\times\left[\prod_1^3\sigma\right]\right\}\left[\prod_1^3{}^{m}\psi^*\right]\quad(3.22\,c')$$

$$\Bigl\{-{}^{3}\partial_t+{}^{2}\partial-{}^{1}\partial_t+[1\times\sigma_3]\times\bigl[-{}^{3}S^{3/2}_{2}+{}^{2}S^{3/2}_{2}-{}^{1}S^{3/2}_{2}\bigr]\Bigr\}\left[\prod_1^3{}^{m}\psi\right]=\varkappa\left\{[\sigma_1\times 1]\times\left[\prod_1^3\sigma\right]\right\}\left[\prod_1^3{}^{m}\psi^*\right]\quad(3.22\,d')$$

$$\Bigl\{-{}^{3}\partial_t+{}^{2}\partial_t-{}^{1}\partial_t+[\sigma_3\times\sigma_3]\times\bigl[-{}^{3}S^{3/2}_{1}+{}^{2}S^{3/2}_{1}-{}^{1}S^{3/2}_{1}\bigr]\Bigr\}\left[\prod_1^3{}^{m}\psi\right]=\varkappa\left\{[\sigma_1\times\sigma_1]\times\left[\prod_1^3\sigma\right]\right\}\left[\prod_1^3{}^{m}\psi^*\right]\quad(3.22e')$$

Les trois autres systèmes, nous les écrirons uniquement de la manière condensée:

Deuxième système:

$$\left\{{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [1\times 1]\times\left[-{}^{3}S_{3}^{3/2} + {}^{2}S_{3}^{3/2} - {}^{1}S_{3}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = \varkappa\left\{[1\times\sigma_1]\times\left[\prod_{1}^{3}\sigma\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi^{*}\right] \tag{3.22 f}$$

$$\left\{{}^{3}\partial_t + {}^{3}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [\sigma_3\times\sigma_3]\times\left[-{}^{2}S_{2}^{3/2} + {}^{2}S_{2}^{3/2} - {}^{2}S_{2}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = i\varkappa\left\{[\sigma_1\times 1]\times\left[\prod_{1}^{3}1\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] \tag{3.22 g}$$

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [1\times\sigma_3]\times\left[-{}^{3}S_{1}^{3/2} + {}^{2}S_{1}^{3/2} - {}^{1}S_{1}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = i\varkappa\left\{[\sigma_1\times\sigma_1]\times\left[\prod_{1}^{3}1\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] \tag{3.22 h}$$

Troisième système:

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [\sigma_3\times\sigma_3]\times\left[-{}^{3}S_{3}^{3/2} + {}^{2}S_{3}^{3/2} - {}^{1}S_{3}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = i\varkappa\left\{[1\times\sigma_1]\times\left[\prod_{1}^{3}1\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] \tag{3.22 i}$$

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [1\times 1]\times\left[-{}^{3}S_{2}^{3/2} + {}^{2}S_{2}^{3/2} - {}^{1}S_{2}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = \varkappa\left\{[\sigma_1\times 1]\times\left[\prod_{1}^{3}\sigma\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi^{*}\right] \tag{3.22 j}$$

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [\sigma_3\times 1]\times\left[-{}^{3}S_{1}^{3/2} + {}^{2}S_{1}^{3/2} - {}^{1}S_{1}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = i\varkappa\left\{[\sigma_1\times\sigma_1]\times\left[\prod_{1}^{3}1\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] \tag{3.22 k}$$

Quatrième système:

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [1\times\sigma_3]\times\left[-{}^{3}S_{3}^{3/2} + {}^{2}S_{3}^{3/2} - {}^{1}S_{3}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = i\varkappa\left\{[1\times\sigma_1]\times\left[\prod_{1}^{3}1\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] \tag{3.22 l}$$

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [\sigma_3\times 1]\times\left[-{}^{3}S_{2}^{3/2} + {}^{2}S_{2}^{3/2} - {}^{1}S_{2}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = i\varkappa\left\{[\sigma_1\times 1]\times\left[\prod_{1}^{3}1\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] \tag{3.22 m}$$

$$\left\{-{}^{3}\partial_t + {}^{2}\partial_t - {}^{1}\partial_t + [1\times 1]\times\left[-{}^{3}S_{1}^{3/2} + {}^{2}S_{1}^{3/2} - {}^{1}S_{1}^{3/2}\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi\right] = \varkappa\left\{[\sigma_1\times\sigma_1]\times\left[\prod_{1}^{3}\sigma\right]\right\}\left[\prod_{1}^{3}{}^{m}\psi^{*}\right] \tag{3.22 n}$$

Dans le cas général du corpuscule multi-ondulatoire à g fonctions d'onde associée du spin $j\,(\geqslant g/2)$, nous avons à distinguer deux types de groupes d'équations:

1° le type A:

$$\left\{\sum_{m=1}^{g}(-1)^{m\,m}\partial_t+\left[\Sigma'_e\prod_1^{2j-1}{}_e\sigma^{li}\times\left(\sum_1^{g}(-1)^{m\,m}S^j_n\right)\right]\right\}\left[\Sigma'_e\prod_1^{g}{}_e{}^{m}\Psi\right]=$$

$$=\varkappa\left[\Sigma'_e\prod_1^{2j-1}{}_e\sigma^{ki}\times\Sigma'_e\prod_1^{2j}{}_e\sigma\right]\left[\Sigma'_e\prod_1^{g}{}_e\,{}^{m}_{c_m}\psi^*\right], \qquad (3.22\,o)$$

2° le type B:

$$\left\{\sum_{m=1}^{g}(-1)^{m\,m}\partial_t+\left[\Sigma'_e\prod_1^{2j-1}{}_e\sigma^{l'i}\times\left(\sum_1^{g}(-1)^{m\,m}S^j_n\right)\right]\right\}\left[\Sigma'_e\prod_1^{g}{}_e{}^{m}\Psi\right]=$$

$$=i\varkappa\left[\Sigma'_e\prod_1^{2j-1}{}_e\sigma^{k'i}\times\Sigma'_e\prod_1^{2j}{}_e 1\right]\left[\Sigma'_e\prod_1^{g}{}_e\,{}^{m}_{c_m}\psi\right]. \qquad (3.22\,p)$$

Comme en théorie uni-ondulatoire, pour une suite de nombres c_m $(m=1,2,\ldots g)$ donnée, il y a c^r_{2j} systèmes admettant r groupes du type A et $2j-r$ groupes du type B. Les matrices σ^{li}, σ^{ki}, $\sigma^{k'i}$ et $\sigma^{l'i}$ satisfont aux mêmes relations de compatibilité que les matrices correspondantes de la théorie uni-ondulatoire.

3.23 *Equations mixtes composées.*

Commençons par former les équations mixtes composées du premier degré, relatives au corpuscule bi-ondulatoire de spin 1. Partons tout d'abord du système mixte (3.22b):

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\underset{+}{{}^2\Delta^1_1}-\underset{+}{{}^1\Delta^1_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi\times{}^{(1)1}\psi-{}^{(2)2}\psi\times{}^{(2)1}\psi\right]=\varkappa[\sigma\times\sigma]\left[{}^{(1)2}\psi^*\,{}^{(2)1}\psi^*+{}^{(1)1}\psi^*\,{}^{(1)1}\psi^*\right]\\
&\left(\underset{+}{{}^2\Delta^1_1}-\underset{+}{{}^1\Delta^1_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi\times{}^{(1)1}\psi^*-{}^{(2)2}\psi\times{}^{(2)1}\psi^*\right]=\varkappa[\sigma\times\sigma]\left[{}^{(1)2}\psi^*\,{}^{(2)1}\psi+{}^{(2)2}\psi^*\,{}^{(1)1}\psi\right]\\
&\left(\underset{+}{{}^2\Delta^1_1}-\underset{+}{{}^1\Delta^1_1}\right)\left[{}^{(1)2}\varphi\times{}^{(2)1}\varphi+{}^{(2)2}\psi\times{}^{(1)2}\psi\right]=-\varkappa[\sigma\times\sigma]\left[{}^{(1)2}\psi^*\,{}^{(1)1}\psi^*-{}^{(2)2}\psi^*\,{}^{(2)1}\psi^*\right]\\
&\left(\underset{+}{{}^2\Delta^1_1}-\underset{+}{{}^1\Delta^1_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi\times{}^{(2)1}\psi^*+{}^{(2)2}\psi\times{}^{(1)1}\psi^*\right]=\varkappa[\sigma\times\sigma]\left[{}^{(1)2}\psi^*\,{}^{(1)1}\psi-{}^{(2)1}\psi^*\,{}^{(2)1}\psi\right]
\end{aligned}\right\}\quad (3.23\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left({}^2\Delta^1_{\underset{+}{2}} - {}^1\Delta^1_{\underset{+}{1}}\right)[{}^{(1)2}\psi \times {}^{(1)1}\psi - {}^{(2)2}\psi \times {}^{(2)1}\psi] = i\varkappa[1\times 1][{}^{(1)2}\psi\,{}^{(2)1}\psi + {}^{(2)2}\psi\,{}^{(1)1}\psi]\\
&\left({}^2\Delta^1_{\underset{+}{2}} - {}^1\Delta^1_{\underset{+}{2}}\right)[{}^{(1)2}\psi \times {}^{(1)1}\psi^* - {}^{(2)2}\psi \times {}^{(2)1}\psi^*] = i\varkappa[1\times 1][{}^{(1)2}\psi\,{}^{(2)1}\psi^* + {}^{(2)2}\psi\,{}^{(1)1}\psi^*]\\
&\left({}^2\Delta^1_{\underset{-}{2}} - {}^1\Delta^1_{\underset{-}{2}}\right)[{}^{(1)2}\psi \times {}^{(2)1}\psi + {}^{(2)2}\psi \times {}^{(1)1}\psi] = i\varkappa[1\times 1][{}^{(1)2}\psi\,{}^{(1)1}\psi - {}^{(2)1}\psi\,{}^{(1)1}\psi]\\
&\left({}^2\Delta^1_{\underset{-}{2}} - {}^1\Delta^1_{\underset{-}{2}}\right)[{}^{(1)2}\psi \times {}^{(2)1}\psi^* + {}^{(2)2}\psi \times {}^{(1)1}\psi^*] = i\varkappa[1\times 1][{}^{(1)2}\psi\,{}^{(1)1}\psi^* - {}^{(2)1}\psi\,{}^{(2)1}\psi^*]
\end{aligned}\right\} \quad (3.23\,b)$$

Et introduisons deux nouvelles fonctions d'onde ${}^1\Psi$ des composantes ${}^1\Psi\,({}^{(1)1}\Psi,\ {}^{(2)1}\Psi)$ et ${}^{(2)}\Psi\,({}^{(2)1}\Psi,\ {}^{(2)2}\Psi)$, définies comme suit :

$$\left.\begin{aligned}
{}^{(1)1}\Psi &= {}^{(1)1}\psi + i\,{}^{(2)1}\psi\ , \quad & {}^{(2)1}\Psi &= \sigma\left({}^{(1)1}\psi^* + i\,{}^{(2)1}\psi^*\right)\\
{}^{(1)2}\Psi &= {}^{(1)2}\psi + i\,{}^{(2)2}\psi\ , \quad & {}^{(2)2}\Psi &= \sigma\left({}^{(1)2}\psi^* + i\,{}^{(2)2}\psi^*\right)
\end{aligned}\right\} \quad (3.23\,c)$$

Dans ces conditions les équations (3.23*a*) et (3.23*b*) s'écrivent :

$$\left({}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3\times 1]\times\left[{}^2S^1_1 - {}^1S^1_1\right]\right)[{}^2\Psi\times{}^1\Psi] = i\varkappa\left[\sigma_1\times 1\times \prod_1^2 1\right][{}^2\Psi\times{}^1\Psi] \quad (3.23\,a')$$

$$\left({}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [1\times\sigma_3]\times\left[{}^2S^1_2 - {}^1S^1_2\right]\right)[{}^2\Psi\times{}^1\Psi] = i\varkappa\left[1\times\sigma_1\times \prod_1^2 1\right][{}^2\Psi\times{}^1\Psi] \quad (3.23\,b')$$

En appliquant le même procédé aux équations (3.22 *a*) on aboutit aux équations que voici :

$$\left({}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [1\times\sigma_3]\times\left[{}^2S^1_1 - {}^1S^1_1\right]\right)[{}^2\Psi'\times{}^1\Psi'] = i\varkappa\left[1\times\sigma_1\times \prod_1^2 1\right][{}^2\Psi'\times{}^1\Psi'] \quad (3.23\,d)$$

$$\left({}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3\times 1]\times\left[{}^2S^1_2 - {}^1S^1_2\right]\right)[{}^2\Psi'\times{}^1\Psi'] = i\varkappa\left[\sigma_1\times 1\times \prod_1^2 1\right][{}^2\Psi'\times{}^1\Psi'] \quad (3.23\,e)$$

Les deux systèmes composés sont-ils équivalents comme ce fut le cas en théorie uni-ondulatoire ? Pour qu'il en fût ainsi, il eût fallu qu'il existât des transformations unitaires portant sur les fonctions ${}^2\Psi$ et ${}^1\Psi$,

$${}^2\Psi' = {}^2V\,{}^2\Psi\ , \qquad {}^1\Psi' = {}^1V\,{}^1\Psi \qquad (3.23\,f)$$

et amenant le changement d'un système en l'autre. Mais alors, étant donné la relation

$$ {}^2\Psi'' \times {}^1\Psi'' = [{}^2V \times {}^1V]\,[{}^2\Psi^{\cdot} \times {}^1\Psi^{\cdot}] \tag{3.23 g} $$

il eût dû s'ensuivre que

$$ \begin{aligned} {}^2V \times {}^1V = ([1 \times 1] + [\sigma_1 \times \sigma_1] + [\sigma \times \sigma] + [\sigma_3 \times \sigma_3] \times \\ \times [1 \times 1]) = U\ , \end{aligned} \tag{3.23 h} $$

égalité qu'il n'est pas possible de satisfaire, car la transformation U agit globalement sur le produit ${}^2\Psi^{\cdot} \times {}^1\Psi^{\cdot}$, en échangeant entre elles une partie des composantes du champ ${}^2\Psi^{\cdot}$ avec une partie des composantes du champ ${}^1\Psi^{\cdot}$, et donc ne peut pas être assimilable à un produit extérieur de deux transformations agissant l'une uniquement sur le champ ${}^1\Psi^{\cdot}$ et l'autre sur le champ ${}^2\Psi^{\cdot}$.

Nous allons écrire maintenant les équations mixtes composées du premier degré, relatives au corpuscule tri-ondulatoire de spin fondamental.

Premier système:

$$ \left.\begin{aligned}
&\Big\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3 \times \sigma_3 \times 1] \times \big[-{}^3S_3^{3/2} + {}^2S_3^{3/2} - {}^1S_3^{3/2}\big] - \varkappa[\sigma_1 \times 1 \times \sigma_1] \times \Big[\prod_1^3 1\Big]\Big\} \prod_1^3 {}^m\Psi^{\cdot} = 0 \\
&\Big\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3 \times 1 \times \sigma_3] \times \big[-{}^3S_2^{3/2} + {}^2S_2^{3/2} - {}^1S_2^{3/2}\big] - \varkappa[\sigma_1 \times \sigma_1 \times 1] \times \Big[\prod_1^3 1\Big]\Big\} \prod_1^3 {}^m\Psi^{\cdot} = 0 \\
&\Big\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3 \times \sigma_3 \times \sigma_3] \times \big[-{}^3S_1^{3/2} + {}^2S_1^{3/2} - {}^1S_1^{3/2}\big] - \varkappa[\sigma_3 \times \sigma_1 \times \sigma_1] \times \Big[\prod_1^3 1\Big]\Big\} \prod_1^3 {}^m\Psi^{\cdot} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.23 i} $$

Deuxième système:

$$ \left.\begin{aligned}
&\Big\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3 \times 1 \times 1] \times \big[-{}^3S_3^{3/2} + {}^2S_3^{3/2} - {}^1S_3^{3/2}\big] - \varkappa[\sigma \times \sigma \times \sigma_3] \times \Big[\prod_1^3 1\Big]\Big\} \Big[\prod_1^3 {}^m\Psi^{\cdot}\Big] = 0 \\
&\Big\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3 \times \sigma_3 \times \sigma_3] \times \big[-{}^3S_2^{3/2} + {}^2S_2^{3/2} - {}^1S_2^{3/2}\big] - \varkappa[1 \times \sigma_1 \times 1] \times \Big[\prod_1^3 1\Big]\Big\} \Big[\prod_1^3 {}^m\Psi^{\cdot}\Big] = 0 \\
&\Big\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [1 \times 1 \times \sigma_3] \times \big[-{}^3S_1^{3/2} + {}^2S_1^{3/2} - {}^1S_1^{3/2}\big] - \varkappa[\sigma_3 \times \sigma_1 \times \sigma_1] \times \Big[\prod_1^3 1\Big]\Big\} \Big[\prod_1^3 {}^m\Psi^{\cdot}\Big] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.23 j} $$

Troisième système:

$$\left\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3\times\sigma_3\times\sigma_3]\times\left[-{}^3S^{3/2}_3 + {}^2S^{3/2}_3 - {}^1S^{3/2}_3\right] - \varkappa[1\times 1\times\sigma_1]\times\left[\prod_1^3 1\right]\right\}\left[\prod_1^3 {}^m\Psi\right] = 0$$

$$\left\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3\times 1\times 1]\times\left[-{}^3S^{3/2}_2 + {}^2S^{3/2}_2 - {}^1S^{3/2}_2\right] - \varkappa[\sigma\times\sigma_3\times\sigma_3]\times\left[\prod_1^3 1\right]\right\}\left[\prod_1^3 {}^m\Psi\right] = 0$$

$$\left\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [1\times\sigma_3\times 1]\times\left[-{}^3S^{3/2}_1 + {}^2S^{3/2}_1 - {}^1S^{3/2}_1\right] - \varkappa[\sigma_3\times\sigma_1\times\sigma_1]\times\left[\prod_1^3 1\right]\right\}\left[\prod_1^3 {}^m\Psi\right] = 0$$

Quatrième système:

$$\left\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [1\times 1\times\sigma_3]\times\left[-{}^3S^{3/2}_3 + {}^2S^{3/2}_3 - {}^1S^{3/2}_3\right] - \varkappa[1\times 1\times\sigma_1]\times\left[\prod_1^3 1\right]\right\}\left[\prod_1^3 {}^m\Psi\right] = 0$$

$$\left\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [1\times\sigma_3\times 1]\times\left[-{}^3S^{3/2}_2 + {}^2S^{3/2}_2 - {}^1S^{3/2}_2\right] - \varkappa[1\times\sigma_1\times 1]\times\left[\prod_1^3 1\right]\right\}\left[\prod_1^3 {}^m\Psi\right] = 0$$

$$\left\{-{}^3\partial_t + {}^2\partial_t - {}^1\partial_t + [\sigma_3\times 1\times 1]\times\left[-{}^3S^{3/2}_1 + {}^2S^{3/2}_1 - {}^1S^{3/2}_1\right] - \varkappa[\sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_3]\times\left[\prod_1^3 1\right]\right\}\left[\prod_1^3 {}^m\Psi\right] = 0$$

Dans le cas général du corpuscule g-ondulatoire de spin j, nous savons que d'une part on doit partir des groupes d'équations du type A:

$$\sum_{m=1}^{g} (-1)^m\,{}^m\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1}\sigma^{l_i}\times\left(\sum_1^{g}(-1)^m\,{}^mS^j_n\right)\right]\Sigma'_l\prod_{l\;m=1}^{g}{}^{(t)m}_{c_m}\psi =$$
$$= \varkappa\left[\prod_{i=1}^{2j-1}\sigma^{k_i}\times\prod_1^{2j}\sigma\right]\left[\Sigma'_l\prod_{l\;1}^{g}{}^{(t)m}_{c_m}\Psi\right], \qquad (3.23\,m)$$

(où $t = 1$ et 2), et, d'autre part, des groupes d'équations du type B, doublées d'une manière analogue. En posant

$${}^{(1)m}\Psi = {}^{(1)m}\psi_t\,{}^{(2)m}\psi, \qquad {}^{(2)m}\Psi = -\,i\sigma\left({}^{(1)m}\psi^* + i\,{}^{(2)m}\psi^*\right) \qquad (3.23\,n)$$

nous obtenons, compte tenu des relations de compatibilité, les relations suivantes:

$$\left\{\sum_1^{g}(-1)^m\,{}^m\partial_t + \left[\sigma_3\times\prod_1^{2j-1}\sigma^{(l_i)n}\times\left(\sum_{m=1}^{g}(-1)^m\,{}^mS^j_n\right)\right] -\right.$$
$$\left.-\,i\varkappa\left[\sigma_1\times\prod_1^{2j-1}\sigma^{(k_i)n}\,\sigma^{(k_i)n_1}\times\prod_1^{2j}1\right]\right\}\left[\Sigma'_l\prod_{l\;1}^{g}{}^m_{c_m}\Psi\right] = 0 \qquad (3.23\,o)$$

$$\left\{ \sum_1^g (-1)^m \, {}^m\partial_t + \left[1 \times \prod_1^{2j-1} \sigma^{(l'i)n'} \times \left(\sum_1^g (-1)^m \, {}^m S_{n'}^j \right) \right] - \right.$$

$$\left. - i\varkappa \left[1 \times \prod_1^{2j-1} \sigma^{(k'i)n'} \times \prod_1^{2j} 1 \right] \right\} \left[\Sigma_l' \prod_1^g {}_{l\, c_m}^{\;m}\Psi \right] = 0 \,. \qquad (3.23\,p)$$

Remarque: L'emploi des sommes Σ_l' a pour but de pouvoir former les équations composées de la forme $Op\left[{}^2\Psi \times {}^1\Psi\right] = 0$, sinon on aboutit au système $Op\left[{}^2\Psi \times {}^1\Psi\right] = 0$ et $Op'\left[{}^2\Psi \times {}^1\Psi^*\right] = 0$. Rien d'ailleurs actuellement ne permet de choisir entre ces deux manières de voir.

Pour une suite des nombres $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots, c_g$ donnée, il existe C_{2j}^r systèmes admettant r groupes, dérivés des groupes du type A et $2j - r$ groupes, dérivés du type B, donc, au total 2^{2j-1} systèmes. En tenant compte de toutes les déterminations possibles des nombres c_m, nous arrivons au total à $C_{2j}^{g-1} \,.\, 2^{2j-1}$ systèmes. Tous les systèmes relatifs au nombre pair g des fonctions d'onde associée sont insensibles au champ électromagnétique et semblent convenir aux corpuscules neutres. Leurs spins fondamentaux sont entiers, mais, par ailleurs, ils peuvent avoir des spins entiers ou demi-entiers. D'autre part, on connaît le caractère purement conjectural de la liaison des statistiques quantiques, celle de Fermi-Dirac et celle de Bose-Einstein avec les valeurs de spins demi-entiers ou entiers, respectivement. On doit se demander s'il n'est pas plus correct de lier les différentes statistiques avec l'imparité ou la parité des nombres des fonctions d'onde associée, plutôt qu'avec les valeurs de spin. Dans ce cas les corpuscules chargés, caractérisés par un nombre impair des fonctions d'onde et, par conséquent, par les valeurs demi-entières des spins fondamentaux, satisferaient à la statistique de Fermi-Dirac. Tandis que les corpuscules neutres, caractérisés par un nombre pair des fonctions d'onde, et, par conséquent, par les valeurs entières des spins fondamentaux, satisferaient à la statistique de Bose-Einstein.

(A suivre.)