Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 25 (1943)

Artikel: Statistique mathématique : distributions de produits intérieurs
Autor: Féraud, Lucien
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742350

un élément (vecteur, ou fonction) propre, répondant à la valeur propre (période ou fréquence) l. Et dans ce cas l appartient au spectre ponctuel.

Si $\varpi(x) = 0$, alors $l(x)$ est lié d'une manière plus compliquée à l'ensemble des valeurs spectrales.

Il est donc naturel d'attacher à l un simple caractère 0 ou 1 suivant que $\varpi = 0$ ou $\varpi > 0$. Le rang de x sera cette valeur l^0 ou l^1 et se désignera par $r(x)$.

Deux éléments auront même rang si, et seulement si, ils ont même l et en même temps deux ϖ nuls ou deux ϖ différent de zéro.

$$r(x) < r(y) \quad \text{si} \quad l(x) < l(y)$$

ou si

$$l(x) = l(y) \quad \text{avec} \quad \varpi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varpi(y) \leqslant 0 \ .$$

Cette relation de rang est transitive, l'égalité est symétrique...

Soit alors x^n une suite d'éléments tendant fortement (comme d'ailleurs dans I et II) vers un élément x^0.

On peut comparer $r(x^0)$ avec lim $r(x^n)$ et démontrer.

III. *Le rang est semi-continu inférieurement:*

$$r(x^0) \leqslant \underline{\lim}\, r(x^n) \ .$$

Il est possible que $l(x^p) > l(x^0)$ alors $\varpi(x^0) = 0$.

Lucien Féraud. — *Statistique mathématique: Distributions de produits intérieurs.*

1. De deux distributions « semi-normales » définies respectivement par les fonctions de fréquence

$$\frac{\alpha_x^{\lambda_x}}{\Gamma(\lambda_x)}\, x^{\lambda_x - 1}\, e^{-\alpha_x x} \ , \qquad \frac{\alpha_y^{\lambda_y}}{\Gamma(\lambda_y)}\, y^{\lambda_y - 1}\, e^{-\alpha_y y}$$

(où x, α_x, λ_x; y, α_y, λ_y sont tous positifs) on déduit, en les considérant comme indépendantes, la distribution de la différence $z = x - y$.

Il suffit d'effectuer, les changements de variables:

$$x - y = z \,, \quad \frac{y}{x-y} = t \quad \text{dans le demi-quadrant} \quad x - y > 0$$

$$y - x = z \,, \quad \frac{y}{y-x} = t \quad \text{dans le demi-quadrant} \quad x - y < 0$$

On obtient pour fonction de fréquence de la distribution de z:

$$\frac{\alpha_x^{\lambda_x} \alpha_y^{\lambda_y}}{\Gamma(\lambda_x)(\alpha_x + \alpha_y)^{\frac{\lambda_x+\lambda_y}{2}}} e^{-z \cdot \frac{\alpha_x - \alpha_y}{2}} |z|^{\frac{\lambda_x+\lambda_y}{2}-1} W_{\frac{\lambda_x-\lambda_y}{2}, \frac{\lambda_x+\lambda_y-1}{2}} [|z| \cdot (\alpha_x + \alpha_y)] \tag{1}$$

où W représente la fonction hypergéométrique confluente de Whittaker [1].

Ce résultat a été établi, dans le cas particulier $\alpha_x = \alpha_y$, en passant par l'intermédiaire des fonctions caractéristiques par S. Kullback [2].

Dans le cas particulier où $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ la fonction de Whittaker se réduit à une fonction de Bessel et l'on obtient pour fonction de fréquence:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\alpha_x^{\lambda} \alpha_y^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)(\alpha_x + \alpha_y)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \cdot e^{-z \cdot \frac{\alpha_x - \alpha_y}{2}} |z|^{\lambda - \frac{1}{2}} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left[\frac{|z| \cdot (\alpha_x + \alpha_y)}{2} \right] \tag{2}$$

où $K_{\lambda - \frac{1}{2}}$ est la fonction de Bessel de seconde espèce, d'argument purement imaginaire, d'ordre $\lambda - \frac{1}{2}$.

2. Le résultat ainsi obtenu permet de retrouver les distributions de deux produits intérieurs.

Soit n distributions normales à deux variables, définies par

[1] Cf. WHITTAKER AND WATSON, *Modern Analysis*, chap. XVI. Cambridge University Press.

[2] Annals of Mathematical Statistics, 7 nº 1, 51-52, 1936.

leurs fonctions de fréquence

$$\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_j^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho x_j y_j}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y_j^2}{\sigma_y^2}\right)}$$
$$j = 1,\ 2,\ \dots\ n$$

où figurent les mêmes paramètres σ_x, σ_y, ρ, avec $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$ et $|\rho| < 1$; ces distributions étant regardées comme indépendantes, il s'agit d'établir:

A) la distribution du produit intérieur

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j}{\sigma_x\,\sigma_y\,(1-\rho^2)}\ .$$

B) la distribution du produit intérieur

$$v = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_j - m_x)\,(y_j - m_y)}{\sigma_x\,\sigma_y\,(1-\rho^2)}$$

avec

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_j\,,\quad m_y = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y_j\ .$$

Le changement de variables

$$x_j = \sigma_x(u_j - v_j)\ ,\qquad y_j = \sigma_y(u_j + v_j)$$

transforme les distributions initiales en

$$\frac{1}{\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left[u_j^2(1-\rho)+v_j^2(1+\rho)\right]}\ .$$

A. En posant

$$\xi = \frac{1}{1-\rho^2}\sum_{1}^{n} u_j^2\ ,\qquad \eta = \frac{1}{1-\rho^2}\sum_{1}^{n} v_j^2$$

le produit intérieur

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j}{\sigma_x\, \sigma_y\, (1 - \rho^2)}$$

devient $z = \xi - \eta$.

Chacune des expressions ξ, η est, à un facteur près, la somme des carrés de variables normalement et indépendamment distribuées. On sait qu'une telle somme de carrés admet une distribution semi-normale; compte tenu des constantes, on obtient pour distribution simultanée de ξ, η, qui sont indépendantes, la fonction de fréquence

$$\frac{(1-\rho)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{1}\right)}\, \xi^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-(1-\rho)\xi}\, \frac{(1+\rho)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \eta^{\frac{n}{2}}\, e^{-(1+\rho)\eta}\,.$$

Il en suit immédiatement que la fonction de fréquence de la distribution de z s'obtient en appliquant la formule (2) ci-dessus; ce qui donne:

$$f(z) = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{n}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{n-1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{\rho z}\, |z|^{\frac{n-1}{2}}\, \mathrm{K}_{\frac{n-1}{2}}(|z|)\,. \tag{3}$$

B. En posant

$$\bar{\xi} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \sum_{1}^{n} \left(u_j - \frac{\sum_{1}^{n} u_j}{n} \right)^2$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \sum_{1}^{n} \left(v_j - \frac{\sum_{1}^{n} v_j}{n} \right)^2$$

le produit intérieur

$$v = \frac{\sum_{1}^{n} (x_j - m_x)(y_j - m_y)}{\sigma_x\, \sigma_y\, (1 - \rho^2)}$$

devient $v = \bar{\xi} - \bar{\eta}$.

De même que sous (A) on connaît les distributions des expressions $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$: ce sont des distributions semi-normales. Compte tenu des constantes, on obtient pour distribution simultanée de ξ, η, qui sont, elles aussi, indépendantes, la fonction de fréquence:

$$\frac{(1-\rho)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \bar{\xi}^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-(1-\rho)\bar{\xi}} \cdot \frac{(1+\rho)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \bar{\eta}^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-(1+\rho)\bar{\eta}} .$$

La fonction de fréquence de v, s'obtient donc comme celle de z, en appliquant la formule (2) et le résultat se déduit de (3) en substituant, dans celle-ci, v à z et $n-1$ à n.

Dans les deux cas, on retrouve, exclusivement par des changements de variables, les distributions que Wishart et Bartlett [1] ont établie en passant par les fonctions caractéristiques.

En outre, la propriété qui permet de déduire la distribution de v de celle de z, en substituant $n-1$ à n, apparaît comme une conséquence de la propriété classique, tout à fait analogue, selon laquelle la distribution de

$$\Sigma\left(x_i - \frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \text{ se déduit de celle de } \Sigma x_i^2 ,$$

(les x_i étant indépendamment et normalement distribuées), par la même substitution, de $n-1$ à n.

Jean Piaget. — *Interprétation probabiliste de la loi de Weber et de celle des centrations relatives.*

La loi de Weber exprime le fait que la sensation s'accroît en progression arithmétique lorsque l'excitant est modifié en progression géométrique: la sensation constitue ainsi le logarithme de l'excitation. Il nous a semblé qu'une telle loi

[1] Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, *28*, 455-9, 1932.