

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 25 (1943)  
  
**Artikel:** Statistique mathématique : distributions de produits intérieurs  
**Autor:** Féraud, Lucien  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-742350>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

un élément (vecteur, ou fonction) propre, répondant à la valeur propre (période ou fréquence)  $l$ . Et dans ce cas  $l$  appartient au spectre ponctuel.

Si  $\varpi(x) = 0$ , alors  $l(x)$  est lié d'une manière plus compliquée à l'ensemble des valeurs spectrales.

Il est donc naturel d'attacher à  $l$  un simple caractère 0 ou 1 suivant que  $\varpi = 0$  ou  $\varpi > 0$ . Le rang de  $x$  sera cette valeur  $l^0$  ou  $l^1$  et se désignera par  $r(x)$ .

Deux éléments auront même rang si, et seulement si, ils ont même  $l$  et en même temps deux  $\varpi$  nuls ou deux  $\varpi$  différent de zéro.

$$r(x) < r(y) \quad \text{si} \quad l(x) < l(y)$$

ou si

$$l(x) = l(y) \quad \text{avec} \quad \varpi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varpi(y) \leq 0.$$

Cette relation de rang est transitive, l'égalité est symétrique...

Soit alors  $x^n$  une suite d'éléments tendant fortement (comme d'ailleurs dans I et II) vers un élément  $x^0$ .

On peut comparer  $r(x^0)$  avec  $\lim r(x^n)$  et démontrer.

III. *Le rang est semi-continu inférieurement:*

$$r(x^0) \leq \underline{\lim} r(x^n).$$

Il est possible que  $l(x^n) > l(x^0)$  alors  $\varpi(x^0) = 0$ .

**Lucien Féraud.** — *Statistique mathématique: Distributions de produits intérieurs.*

1. De deux distributions « semi-normales » définies respectivement par les fonctions de fréquence

$$\frac{\alpha_x^{\lambda_x}}{\Gamma(\lambda_x)} x^{\lambda_x-1} e^{-\alpha_x x}, \quad \frac{\alpha_y^{\lambda_y}}{\Gamma(\lambda_y)} y^{\lambda_y-1} e^{-\alpha_y y}$$

(où  $x, \alpha_x, \lambda_x; y, \alpha_y, \lambda_y$  sont tous positifs) on déduit, en les considérant comme indépendantes, la distribution de la différence  $z = x - y$ .

Il suffit d'effectuer, les changements de variables:

$$x - y = z, \quad \frac{y}{x - y} = t \quad \text{dans le demi-quadrant } x - y > 0$$

$$y - x = z, \quad \frac{y}{y - x} = t \quad \text{dans le demi-quadrant } x - y < 0$$

On obtient pour fonction de fréquence de la distribution de  $z$ :

$$\frac{\alpha_x^{\lambda_x} \alpha_y^{\lambda_y}}{\Gamma(\lambda_x) (\alpha_x + \alpha_y)^{\frac{\lambda_x + \lambda_y}{2}}} e^{-z \cdot \frac{\alpha_x - \alpha_y}{2}} |z|^{\frac{\lambda_x + \lambda_y}{2} - 1} W_{\frac{\lambda_x - \lambda_y}{2}, \frac{\lambda_x + \lambda_y - 1}{2}} \left[ |z| \cdot (\alpha_x + \alpha_y) \right] \quad (1)$$

où  $W$  représente la fonction hypergéométrique confluyente de Whittaker <sup>1</sup>.

Ce résultat a été établi, dans le cas particulier  $\alpha_x = \alpha_y$ , en passant par l'intermédiaire des fonctions caractéristiques par S. Kullback <sup>2</sup>.

Dans le cas particulier où  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$  la fonction de Whittaker se réduit à une fonction de Bessel et l'on obtient pour fonction de fréquence:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\alpha_x^{\lambda} \alpha_y^{\lambda}}{\Gamma(\lambda) (\alpha_x + \alpha_y)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \cdot e^{-z \cdot \frac{\alpha_x - \alpha_y}{2}} |z|^{\lambda - \frac{1}{2}} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left[ \frac{|z| \cdot (\alpha_x + \alpha_y)}{2} \right] \quad (2)$$

où  $K_{\lambda - \frac{1}{2}}$  est la fonction de Bessel de seconde espèce, d'argument purement imaginaire, d'ordre  $\lambda - \frac{1}{2}$ .

2. Le résultat ainsi obtenu permet de retrouver les distributions de deux produits intérieurs.

Soit  $n$  distributions normales à deux variables, définies par

<sup>1</sup> Cf. WHITTAKER AND WATSON, *Modern Analysis*, chap. XVI. Cambridge University Press.

<sup>2</sup> Annals of Mathematical Statistics, 7 n° 1, 51-52, 1936.

leurs fonctions de fréquence

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_j^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho x_j y_j}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y_j^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

où figurent les mêmes paramètres  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\rho$ , avec  $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_y > 0$  et  $|\rho| < 1$ ; ces distributions étant regardées comme indépendantes, il s'agit d'établir:

A) la distribution du produit intérieur

$$z = \frac{\sum_{j=1}^n x_j y_j}{\sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)}.$$

B) la distribution du produit intérieur

$$v = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - m_x)(y_j - m_y)}{\sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)}$$

avec

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_1^n x_j, \quad m_y = \frac{1}{n} \sum_1^n y_j.$$

Le changement de variables

$$x_j = \sigma_x(u_j - v_j), \quad y_j = \sigma_y(u_j + v_j)$$

transforme les distributions initiales en

$$\frac{1}{\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}[u_j^2(1-\rho) + v_j^2(1+\rho)]}.$$

A. En posant

$$\xi = \frac{1}{1-\rho^2} \sum_1^n u_j^2, \quad \eta = \frac{1}{1-\rho^2} \sum_1^n v_j^2$$

le produit intérieur

$$z = \frac{\sum_{j=1}^n x_j y_j}{\sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)}$$

devient  $z = \xi - \eta$ .

Chacune des expressions  $\xi$ ,  $\eta$  est, à un facteur près, la somme des carrés de variables normalement et indépendamment distribuées. On sait qu'une telle somme de carrés admet une distribution semi-normale; compte tenu des constantes, on obtient pour distribution simultanée de  $\xi$ ,  $\eta$ , qui sont indépendantes, la fonction de fréquence

$$\frac{(1 - \rho)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \xi^{\frac{n}{2}-1} e^{-(1-\rho)\xi} \frac{(1 + \rho)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \eta^{\frac{n}{2}} e^{-(1+\rho)\eta}.$$

Il en suit immédiatement que la fonction de fréquence de la distribution de  $z$  s'obtient en appliquant la formule (2) ci-dessus; ce qui donne:

$$f(z) = \frac{(1 - \rho^2)^{\frac{n}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{\rho z} |z|^{\frac{n-1}{2}} K_{\frac{n-1}{2}}(|z|). \quad (3)$$

B. En posant

$$\bar{\xi} = \frac{1}{1 - \rho^2} \cdot \sum_1^n \left( u_j - \frac{\sum_1^n u_j}{n} \right)^2$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{1 - \rho^2} \cdot \sum_1^n \left( v_j - \frac{\sum_1^n v_j}{n} \right)^2$$

le produit intérieur

$$\varphi = \frac{\sum_1^n (x_j - m_x) (y_j - m_y)}{\sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)}$$

devient  $\varphi = \bar{\xi} - \bar{\eta}$ .

De même que sous (A) on connaît les distributions des expressions  $\bar{\xi}$  et  $\bar{\eta}$ : ce sont des distributions semi-normales. Compte tenu des constantes, on obtient pour distribution simultanée de  $\xi$ ,  $\eta$ , qui sont, elles aussi, indépendantes, la fonction de fréquence:

$$\frac{(1-\rho)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \bar{\xi}^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-(1-\rho)\bar{\xi}} \cdot \frac{(1+\rho)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \bar{\eta}^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-(1+\rho)\bar{\eta}}.$$

La fonction de fréquence de  $\nu$ , s'obtient donc comme celle de  $z$ , en appliquant la formule (2) et le résultat se déduit de (3) en substituant, dans celle-ci,  $\nu$  à  $z$  et  $n-1$  à  $n$ .

Dans les deux cas, on retrouve, exclusivement par des changements de variables, les distributions que Wishart et Bartlett<sup>1</sup> ont établie en passant par les fonctions caractéristiques.

En outre, la propriété qui permet de déduire la distribution de  $\nu$  de celle de  $z$ , en substituant  $n-1$  à  $n$ , apparaît comme une conséquence de la propriété classique, tout à fait analogue, selon laquelle la distribution de

$$\Sigma\left(x_i - \frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \text{ se déduit de celle de } \Sigma x_i^2,$$

(les  $x_i$  étant indépendamment et normalement distribuées), par la même substitution, de  $n-1$  à  $n$ .

**Jean Piaget.** — *Interprétation probabiliste de la loi de Weber et de celle des centrations relatives.*

La loi de Weber exprime le fait que la sensation s'accroît en progression arithmétique lorsque l'excitant est modifié en progression géométrique: la sensation constitue ainsi le logarithme de l'excitation. Il nous a semblé qu'une telle loi

<sup>1</sup> Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 28, 455-9, 1932.