Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 24 (1942)

Artikel: Sur la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques

Autor: Patry, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741803

En *séance particulière*, l'ordre des séances pour 1943 est adopté avec quelques modifications par rapport à l'ordre traditionnel. La séance annuelle en particulier aura lieu exceptionnellement le 18 février.

Séance du 17 décembre 1942.

Jean Patry. — *Sur la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.*

Il y a quelques temps, nous avons donné deux méthodes [1 et 2] pour résoudre l'équation différentielle:

$$\sum_{k=0}^{s} \left[e_k + f_k \cdot e^{-ix} + g_k \cdot e^{ix}\right] \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \qquad (1)$$

au moyen de la substitution:

$$u = \sum_{n} D_n \cdot e^{i(\mu+n)x} \ . \qquad (2)$$

Nous avions donné une condition suffisante, mais non pas nécessaire:

$$|\varphi| < \frac{1}{4} \qquad \text{si} \qquad \varphi = \frac{f_s \cdot g_s}{e_s^2} \ .$$

Soit x_1 et x_2, les deux racines (définies à un multiple de 2π près) de l'équation:

$$f_s + e_s \cdot e^{ix} + g_s \cdot e^{2ix} = 0 \ ; \qquad (3)$$

la sommation sur n dans la substitution (2) se fera de $-\infty$ à $+\infty$ si la partie imaginaire de x que l'on considère, est comprise entre celle de x_1 et celle de x_2. Dans ce cas, on a les relations suivantes [2]:

$$A(\mu + n) \cdot D_{n-1} + B(\mu + n) \cdot D_n + C(\varphi + n) \cdot D_{n+1} = 0 \quad (4)$$

avec

$$A(\mu + n) = \sum_{k=0}^{s} g_k \cdot i^k \cdot (\mu + n - 1)^k$$

$$B(\mu + n) = \sum_{k=}^{s} e_k \cdot i^k \cdot (\mu + n)^k$$

$$C(\mu + n) = \sum_{k=0}^{s} f_k \cdot i^k \cdot (\mu + n + 1)^k .$$

Ce système infini peut se résoudre par approximations successives au moyen des relations:

$$\frac{\varepsilon_m}{B(\mu + m)} = -\frac{A(\mu + m)}{B(\mu + m)} \frac{D_{m-1}}{D_m} = \frac{\varphi(\mu + m)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m - 1)}{1 -} \cdots \tag{5}$$

$$\frac{\delta_m}{B(\mu + m)} = -\frac{C(\mu + m)}{B(\mu + m)} \frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{\varphi(\mu + m + 1)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m + 2)}{1 -} \cdots \tag{5'}$$

avec

$$\varphi(\mu + m) = \frac{A(\mu + m) \cdot C(\mu + m - 1)}{B(\mu + m) \cdot B(\mu + m - 1)} .$$

L'équation caractéristique déterminant μ peut alors s'écrire:

$$\psi(\mu) = 1 - \frac{\varepsilon_0(\mu)}{B(\mu)} - \frac{\delta_0(\mu)}{B(\mu)} = 1 - \vartheta'(\mu) - \vartheta''(\mu) = 0 , \tag{6}$$

les $\vartheta'(\mu)$ et $\vartheta''(\mu)$ étant les fractions continues définies par (5) et (5′) pour $m = 0$.

Les solutions de cette équation ne sont définies qu'à un entier près, car on a:

$$\psi(\mu) = \psi(\mu - 1) \frac{\varphi(\mu)}{\vartheta''(\mu + 1)\left[1 - \vartheta'(\mu - 1)\right]} . \tag{7}$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer que les racines de (6) sont égales à celles du déterminant du système (4). Ce déterminant correspond à l'équation caractéristique donnée dans le livre [3] de Riesz. S'il a un sens, on sait que l'on obtient ainsi s valeurs fondamentales de μ et donc la solution générale de l'équation différentielle. Nous ne pourrons pas en déduire que l'équation (6) conduit toujours à la solution générale, car ce déterminant n'a pas toujours un sens au point de vue envisagé dans [3].

Introduisons maintenant les quantités suivantes:

$$\Delta_+(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & , \dfrac{C(\mu)}{B(\mu)} & , 0 & , \ldots\ldots \\ \dfrac{A(\mu+1)}{B(\mu+1)}, & 1 & , \dfrac{C(\mu+1)}{B(\mu+1)}, & \ldots\ldots \\ 0 & , \dfrac{A(\mu+2)}{B(\mu+2)}, & 1 & , \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_-(\mu) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots, & 1 & , \dfrac{C(\mu-2)}{B(\mu-2)}, & 0 \\ \ldots\ldots, & \dfrac{A(\mu-1)}{B(\mu-1)}, & 1 & , \dfrac{C(\mu-1)}{B(\mu-1)} \\ \ldots\ldots, & 0 & , \dfrac{A(\mu)}{B(\mu)} & , 1 \end{vmatrix}.$$

La théorie des déterminants conduit immédiatement aux relations de récurrence:

$$\begin{aligned} \Delta_+(\mu) &= \Delta_+(\mu+1) - \varphi(\mu+1)\cdot\Delta_+(\mu+2) \qquad (9) \\ \Delta_-(\mu) &= \Delta_-(\mu-1) - \varphi(\mu) \quad\cdot\quad \Delta_-(\mu-2)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que les quantités:

$$\begin{aligned} &\vartheta''(\mu) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\Delta_+(\mu)}{\Delta_+(\mu+1)} \\ &\vartheta'(\mu) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\Delta_-(\mu)}{\Delta_-(\mu-1)} \end{aligned} \qquad (9')$$

satisfont aux mêmes équations de récurrence. Elles sont égales donc, car elles sont définies par la même fraction continue.

La fonction $\psi(\mu)$ peut alors s'écrire:

$$\psi(\mu) = 1 - \left(1 - \frac{\Delta_-(\mu)}{\Delta_-(\mu - 1)}\right) - \left(1 - \frac{\Delta_+(\mu)}{\Delta_+(\mu + 1)}\right) = \tag{10}$$

$$= \frac{\Delta_+(\mu)}{\Delta_+(\mu + 1)} - \varphi(\mu) \cdot \frac{\Delta_-(\mu - 2)}{\Delta_-(\mu - 1)} .$$

Or, le déterminant $\Delta(\mu)$ peut s'écrire:

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu) \cdot \Delta_-(\mu - 1) - \varphi(\mu) \cdot \Delta_+(\mu + 1) \cdot \Delta_-(\mu - 2) . \tag{11}$$

En comparant les équations (10) et (11), on obtient la relation entre $\psi(\mu)$ et Δ:

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu + 1) \cdot \Delta_-(\mu - 1) \cdot \psi(\mu) . \tag{12}$$

$\psi(\mu)$ s'annule donc en même temps que $\Delta(\mu)$, car le produit des $\Delta_+(\mu + 1) . \Delta_-(\mu - 1)$ n'influence pas le résultat. Chaque facteur n'est pas périodique en lui-même et l'équation (9′) montre que si l'un de ces déterminants s'annule, tous les déterminants de sa série devraient aussi s'annuler. Ce phénomène ne peut pas dépendre d'une valeur caractéristique de μ, car il se présente aussi aux très grandes valeurs de $(\mu + n)$, où la valeur exacte de μ n'a plus d'influence. Cela proviendrait seulement d'une divergence des suites des $\Delta_+(\mu + n)$ ou $\Delta_-(\mu - n)$. Cette divergence se démontre immédiatement à partir de l'équation (9′) car le rapport entre deux termes successifs ne tend vers 1 que si φ est nul. Les racines de (6) sont donc bien les zéros du déterminant du système (4).

Pour terminer, nous désirons rectifier trois erreurs qui se sont glissées dans une de nos communications [1]:

1. La formule (3) de la page 119 doit s'écrire:

$$u_2 = u_1 \cdot \log z + \sum_{i=0}^{\infty} g_i \cdot z^{(\mu' + 1)} .$$

2. A la page 121, la phrase précédant l'équation (9) n'est pas conforme à la réalité. Pour que l'on ait:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\varphi}{1 -} \frac{\varphi}{1 -} \cdots = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1 - 4\varphi})$$

il faut que la fraction continue converge. Le résultat final sur le domaine de convergence de la série, subsiste entièrement. Les théorèmes généraux sur les points singuliers en fournissent une preuve suffisante.

3. Légèrement plus bas, la formule:

$$\left| \frac{D_{|m|+1}}{D_{|m|}} \right| \longrightarrow \left| \frac{e_n}{2 f_n} \left(1 + \sqrt{1 + 4\varphi}\right) \right| = \frac{1}{|Z_1|}$$

doit être corrigée en

$$\left| \frac{D_{|m|+1}}{D_{|m|}} \right| \longrightarrow \left| \frac{e_n}{2 f_n} \left(1 + \sqrt{1 - 4\varphi}\right) \right| = \frac{1}{|Z_1|} .$$

Nous profitons enfin de l'occasion pour remercier le professeur Wavre pour tout l'intérêt qu'il a pris à nos recherches. Nous le remercions aussi de nous avoir signalé ces erreurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Patry, C. R. Soc. Phys. Hist. nat., Genève, *59*, 118, 1942.
[2] Patry, C. R. Soc. Phys. Hist. nat., Genève, *59*, 122, 1942.
[3] Riesz, *Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.*

Rolin Wavre. — *Remarques à propos de l'itération des opérateurs hermitiens.*

Dans trois notes précédentes, données au cours de cette année 1942, nous avons indiqué que l'on peut reconstruire très rapidement la théorie des équations intégrales de Fredholm à noyau symétrique à partir de l'étude directe de l'itération des opérateurs hermitiens. Ce sont des compléments à cette étude directe que nous donnons ici.

Soient: A l'opérateur, A^2, A^3, ... ses itérés; x_0 un élément et x_r ses conséquents normalisés. On a donc

$$A^r x_0 = l_1 \dots l_r x_r \qquad \| x_r \| = 1 \qquad r = 0, 1, 2, \dots$$

On a en plus les inégalités de Kellogg:

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \dots . \qquad \text{Posons } \; l = \lim l_i \; .$$