

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 24 (1942)

**Artikel:** Sur la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques  
**Autor:** Patry, Jean  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En séance particulière, l'ordre des séances pour 1943 est adopté avec quelques modifications par rapport à l'ordre traditionnel. La séance annuelle en particulier aura lieu exceptionnellement le 18 février.

**Séance du 17 décembre 1942.**

**Jean Patry.** — *Sur la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.*

Il y a quelques temps, nous avons donné deux méthodes [1 et 2] pour résoudre l'équation différentielle:

$$\sum_{k=0}^s [e_k + f_k \cdot e^{-ix} + g_k \cdot e^{ix}] \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \quad (1)$$

au moyen de la substitution:

$$u = \sum_n D_n \cdot e^{i(\mu+n)x} . \quad (2)$$

Nous avons donné une condition suffisante, mais non pas nécessaire:

$$|\varphi| < \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad \varphi = \frac{f_s \cdot g_s}{e_s^2} .$$

Soit  $x_1$  et  $x_2$ , les deux racines (définies à un multiple de  $2\pi$  près) de l'équation:

$$f_s + e_s \cdot e^{ix} + g_s \cdot e^{2ix} = 0 ; \quad (3)$$

la sommation sur  $n$  dans la substitution (2) se fera de  $-\infty$  à  $+\infty$  si la partie imaginaire de  $x$  que l'on considère, est comprise entre celle de  $x_1$  et celle de  $x_2$ . Dans ce cas, on a les relations suivantes [2]:

$$A(\mu + n) \cdot D_{n-1} + B(\mu + n) \cdot D_n + C(\varphi + n) \cdot D_{n+1} = 0 \quad (4)$$

avec

$$\begin{aligned} A(\mu + n) &= \sum_{k=0}^s g_k \cdot i^k \cdot (\mu + n - 1)^k \\ B(\mu + n) &= \sum_{k=0}^s e_k \cdot i^k \cdot (\mu + n)^k \\ C(\mu + n) &= \sum_{k=0}^s f_k \cdot i^k \cdot (\mu + n + 1)^k . \end{aligned}$$

Ce système infini peut se résoudre par approximations successives au moyen des relations:

$$\frac{\varepsilon_m}{B(\mu + m)} = - \frac{A(\mu + m)}{B(\mu + m)} \frac{D_{m-1}}{D_m} = \frac{\varphi(\mu + m)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m - 1)}{1 -} \dots \quad (5)$$

$$\frac{\delta_m}{B(\mu + m)} = - \frac{C(\mu + m)}{B(\mu + m)} \frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{\varphi(\mu + m + 1)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m + 2)}{1 -} \dots \quad (5')$$

avec

$$\varphi(\mu + m) = \frac{A(\mu + m) \cdot C(\mu + m - 1)}{B(\mu + m) \cdot B(\mu + m - 1)} .$$

L'équation caractéristique déterminant  $\mu$  peut alors s'écrire:

$$\psi(\mu) = 1 - \frac{\varepsilon_0(\mu)}{B(\mu)} - \frac{\delta_0(\mu)}{B(\mu)} = 1 - \mathfrak{S}'(\mu) - \mathfrak{S}''(\mu) = 0 , \quad (6)$$

les  $\mathfrak{S}'(\mu)$  et  $\mathfrak{S}''(\mu)$  étant les fractions continues définies par (5) et (5') pour  $m = 0$ .

Les solutions de cette équation ne sont définies qu'à un entier près, car on a:

$$\psi(\mu) = \psi(\mu - 1) \frac{\varphi(\mu)}{\mathfrak{S}''(\mu + 1) [1 - \mathfrak{S}'(\mu - 1)]} . \quad (7)$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer que les racines de (6) sont égales à celles du déterminant du système (4). Ce déterminant correspond à l'équation caractéristique donnée dans le livre [3] de Riesz. S'il a un sens, on sait que l'on obtient ainsi  $s$  valeurs fondamentales de  $\mu$  et donc la solution générale

de l'équation différentielle. Nous ne pourrions pas en déduire que l'équation (6) conduit toujours à la solution générale, car ce déterminant n'a pas toujours un sens au point de vue envisagé dans [3].

Introduisons maintenant les quantités suivantes:

$$\Delta_+(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & , & \frac{C(\mu)}{B(\mu)} & , & 0 & , & \dots\dots\dots \\ \frac{A(\mu+1)}{B(\mu+1)} & , & 1 & , & \frac{C(\mu+1)}{B(\mu+1)} & , & \dots\dots\dots \\ 0 & , & \frac{A(\mu+2)}{B(\mu+2)} & , & 1 & , & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & & & & & & \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_-(\mu) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & , & 1 & , & \frac{C(\mu-2)}{B(\mu-2)} & , & 0 \\ \dots\dots\dots & , & \frac{A(\mu-1)}{B(\mu-1)} & , & 1 & , & \frac{C(\mu-1)}{B(\mu-1)} \\ \dots\dots\dots & , & 0 & , & \frac{A(\mu)}{B(\mu)} & , & 1 \end{vmatrix} .$$

La théorie des déterminants conduit immédiatement aux relations de récurrence:

$$\Delta_+(\mu) = \Delta_+(\mu+1) - \varphi(\mu+1) \cdot \Delta_+(\mu+2) \quad (9)$$

$$\Delta_-(\mu) = \Delta_-(\mu-1) - \varphi(\mu) \cdot \Delta_-(\mu-2) .$$

On en déduit que les quantités:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}''(\mu) \text{ et } 1 - \frac{\Delta_+(\mu)}{\Delta_+(\mu+1)} \\ \mathfrak{S}'(\mu) \text{ et } 1 - \frac{\Delta_-(\mu)}{\Delta_-(\mu-1)} \end{aligned} \quad (9')$$

satisfont aux mêmes équations de récurrence. Elles sont égales donc, car elles sont définies par la même fraction continue.

La fonction  $\psi(\mu)$  peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned}\psi(\mu) &= 1 - \left(1 - \frac{\Delta_-(\mu)}{\Delta_-(\mu-1)}\right) - \left(1 - \frac{\Delta_+(\mu)}{\Delta_+(\mu+1)}\right) = \\ &= \frac{\Delta_+(\mu)}{\Delta_+(\mu+1)} - \varphi(\mu) \cdot \frac{\Delta_-(\mu-2)}{\Delta_-(\mu-1)}.\end{aligned}\quad (10)$$

Or, le déterminant  $\Delta(\mu)$  peut s'écrire:

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu) \cdot \Delta_-(\mu-1) - \varphi(\mu) \cdot \Delta_+(\mu+1) \cdot \Delta_-(\mu-2). \quad (11)$$

En comparant les équations (10) et (11), on obtient la relation entre  $\psi(\mu)$  et  $\Delta$ :

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu+1) \cdot \Delta_-(\mu-1) \cdot \psi(\mu). \quad (12)$$

$\psi(\mu)$  s'annule donc en même temps que  $\Delta(\mu)$ , car le produit des  $\Delta_+(\mu+1) \cdot \Delta_-(\mu-1)$  n'influence pas le résultat. Chaque facteur n'est pas périodique en lui-même et l'équation (9') montre que si l'un de ces déterminants s'annule, tous les déterminants de sa série devraient aussi s'annuler. Ce phénomène ne peut pas dépendre d'une valeur caractéristique de  $\mu$ , car il se présente aussi aux très grandes valeurs de  $(\mu+n)$ , où la valeur exacte de  $\mu$  n'a plus d'influence. Cela proviendrait seulement d'une divergence des suites des  $\Delta_+(\mu+n)$  ou  $\Delta_-(\mu-n)$ . Cette divergence se démontre immédiatement à partir de l'équation (9') car le rapport entre deux termes successifs ne tend vers 1 que si  $\varphi$  est nul. Les racines de (6) sont donc bien les zéros du déterminant du système (4).

Pour terminer, nous désirons rectifier trois erreurs qui se sont glissées dans une de nos communications [1]:

1. La formule (3) de la page 119 doit s'écrire:

$$u_2 = u_1 \cdot \log z + \sum_{i=0}^{\infty} g_i \cdot z^{(\mu'+1)}.$$

2. A la page 121, la phrase précédant l'équation (9) n'est pas conforme à la réalité. Pour que l'on ait:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{\varphi}{1-\varphi} \dots = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1-4\varphi})$$

il faut que la fraction continue converge. Le résultat final sur le domaine de convergence de la série, subsiste entièrement. Les théorèmes généraux sur les points singuliers en fournissent une preuve suffisante.

3. Légèrement plus bas, la formule :

$$\left| \frac{D_{|m|+1}}{D_{|m|}} \right| \rightarrow \left| \frac{e_n}{2f_n} (1 + \sqrt{1 + 4\varphi}) \right| = \frac{1}{|Z_1|}$$

doit être corrigée en

$$\left| \frac{D_{|m|+1}}{D_{|m|}} \right| \rightarrow \left| \frac{e_n}{2f_n} (1 + \sqrt{1 - 4\varphi}) \right| = \frac{1}{|Z_1|} .$$

Nous profitons enfin de l'occasion pour remercier le professeur Wavre pour tout l'intérêt qu'il a pris à nos recherches. Nous le remercions aussi de nous avoir signalé ces erreurs.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] PATRY, C. R. Soc. Phys. Hist. nat., Genève, 59, 118, 1942.
- [2] PATRY, C. R. Soc. Phys. Hist. nat., Genève, 59, 122, 1942.
- [3] RIESZ, *Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.*

**Rolin Wavre.** — *Remarques à propos de l'itération des opérateurs hermitiens.*

Dans trois notes précédentes, données au cours de cette année 1942, nous avons indiqué que l'on peut reconstruire très rapidement la théorie des équations intégrales de Fredholm à noyau symétrique à partir de l'étude directe de l'itération des opérateurs hermitiens. Ce sont des compléments à cette étude directe que nous donnons ici.

Soient: A l'opérateur, A<sup>2</sup>, A<sup>3</sup>, ... ses itérés; x<sub>0</sub> un élément et x<sub>r</sub> ses conséquents normalisés. On a donc

$$A^r x_0 = l_1 \dots l_r x_r \quad \|x_r\| = 1 \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

On a en plus les inégalités de Kellogg:

$$l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots \quad \text{Posons } l = \lim l_i .$$