Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 24 (1942)

Artikel: Le théorème de Fuchs et les équations linéaires à coefficients périodiques

Autor: Patry, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741773

Lorsque X et Y sont de parités différentes, F peut être remplacée par un polynome hypergéométrique de Jacobi — en particulier si $X = Y + 1$ on obtient: $\left(\frac{X}{2} - 1\right) w^{\frac{X}{2}-2}$. Lorsque X et Y sont de même parité F s'exprime à l'aide des intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce K et E pour lesquelles des tables ont été établies par Legendre.

3. Les distributions des expressions $p = q_x q_y$ et

$$w = \frac{1}{(1 + q_x)(1 + q_y)}$$

ayant été établies il résulte de chacune d'elles un critère applicable au cas de deux distributions normales indépendantes, de moyennes a_x, a_y connues, et de précisions h_x, h_y inconnues — non nécessairement égales. Ces critères peuvent être utilement employés alors que le critère de Student appliqué séparément à chacune des suites de résultats n'aboutit à aucune conclusion.

Jean Patry. — *Le théorème de Fuchs et les équations linéaires à coefficients périodiques.*

Le théorème de Fuchs est à la base de la résolution de la plupart des équations différentielles linéaires et homogènes. Il a, en effet, conduit aux solutions de l'équation de Bessel ou de l'équation hypergéométrique sous forme de séries. D'autre part, les équations linéaires à coefficients périodiques présentent un intérêt certain pour la technique. Elles se présentent presque dans tous les cas où un phénomène est sous l'influence d'une action perturbatrice périodique. Nous ne citerons comme exemple que les phénomènes d'élasticité dans les milieux stratifiés, l'étude du courant électrique dans un circuit dont les caractéristiques varient périodiquement avec le temps, etc. Il est donc intéressant de chercher à appliquer ce théorème si fécond à une classe d'équations qui n'ont été résolues pratiquement que dans quelque cas particuliers.

Le théorème de Fuchs montre que les n solutions linéairement indépendantes de l'équation:

$$z^n \frac{d^n u}{dz^n} + z^{n-1} \mathrm{P}_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + \mathrm{P}_0(z)\, u = 0 \qquad (1)$$

où les P_i n'ont pas de points singuliers à l'origine, sont, en général, de la forme:

$$u_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \,.\, z^{\mu+i} \qquad (2)$$

ou, dans certains cas particuliers:

$$u_2 = \log x \,.\, u_1 + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \,.\, z^{\mu' \neq 1} \qquad (3)$$

ou d'autres formes s'exprimant toujours par la fonction log et des séries de la forme u_1. Ce cas ne se présentant qu'exceptionnellement, nous ne l'étudierons pas dans ce bref travail, le réservant à une étude plus approfondie de cette équation.

Soit maintenant une équation linéaire à coefficients périodiques sous la forme:

$$\sum_{m=0}^{n} (e_m + f_m e^{-ix} + g_m e^{ix}) \frac{d^m u}{dx^m} = 0 \,. \qquad (4)$$

Posons

$$z = e^{ix} \,.$$

L'équation se transforme en tenant compte de

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \left(iz \frac{d}{dz}\right)^m u$$

et peut s'écrire:

$$\sum_{m=0}^{n} (\mathrm{F}_m + \mathrm{E}_m z + \mathrm{G}_m z^2)\, z^m \frac{d^m u}{dz^m} = 0 \qquad (5)$$

avec les relations suivantes entre les F_m et les f_m:

$$\mathrm{F}_m = \sum_{i=m}^{n} d_{im} f_i$$

et des relations identiques entre E_m et e_m, G_m et g_m.

Ainsi, nous pouvons déterminer les conditions pour lesquelles le théorème de Fuchs est applicable. Il faut soit:

$$f_n \neq 0$$

soit:

$$f_k = 0 \quad \text{avec} \quad e_n \neq 0 \ .$$

Une transformation $z = e^{-ix}$ aurait par contre donné les conditions:

$$g_n \neq 0 \quad \text{ou} \quad g_k = 0 \quad \text{avec} \quad e_n \neq 0 \ .$$

Supposons maintenant une de ces conditions remplies. Nous savons que la solution de l'équation (4) est de la forme:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{D}_k \, . \, e^{i(k+\mu)x} \tag{6}$$

si la condition se rapporte à f_n ou

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{D}_{-k} \, . \, e^{i(\mu-k)x} \tag{6'}$$

si c'est g_n qui intervient.

La substitution (6) conduit à un système récurrent de la forme:

$$\mathrm{A}(\mu + k)\,\mathrm{D}_{k-1} + \mathrm{B}(\mu + k)\,\mathrm{D}_k + \mathrm{C}(\mu + k)\,\mathrm{D}_{k+1} = 0$$

avec

$$\mathrm{A}(\mu + k) = \sum_{l=0}^{n} i^l (\mu + m - 1)^l g_l$$

$$\mathrm{B}(\mu + k) = \sum_{l=0}^{n} i^l (\mu + m)^l e_l$$

$$\mathrm{C}(\mu + k) = \sum_{l=0}^{n} i^l (\mu + m + 1)^l f_l \ .$$

Pour que la série soit interrompue du côté des k négatifs, il faut que μ satisfasse l'équation caractéristique:

$$\mathrm{C}(\mu) = 0 \tag{7}$$

qui donne n solutions pour μ puisque $f_n \neq 0$. Si c'est la condition $f_k = 0$ qui est satisfaite, le système se simplifie et l'équation caractéristique devient:

$$B(\mu) = 0 \tag{7'}$$

avec de nouveau n valeurs de μ.

Les valeurs de D_k se déterminent alors par récurrence:

$$\begin{aligned}
D_k &= 0 \qquad \text{pour} \quad k \leqslant 0 \\
D_1 &= D_1 \\
D_2 &= -\frac{B(\mu+1)}{C(\mu+1)} D_1 \\
D_3 &= -\frac{B(\mu+2)}{C(\mu+2)} D_2 - \frac{A(\mu+2)}{C(\mu+2)} D_1
\end{aligned} \tag{8}$$

et ainsi de suite.

Il faut, cependant, que la série (6) converge absolument pour que la solution soit utilisable.

Introduisons tout d'abord les expressions:

$$\varepsilon_n = -\frac{C(\mu+n)}{B(\mu+n)} \frac{D_{n+1}}{D_n}$$

et

$$\varphi = \lim_{k\to\infty} \frac{A(\mu+k)\, C(\mu+k-1)}{B(\mu+k)\, B(\mu+k-1)} = \frac{f_n \cdot g_n}{e_n^2} .$$

A partir de la dernière équation (8), on constate facilement que ε_n tend vers ε avec:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\varphi}) . \tag{9}$$

Dans ce cas, le rapport $\dfrac{D_{n+1}}{D_n}$ tend en valeur absolue vers:

$$\left| \frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}} \right| \longrightarrow \left| \frac{e_n}{2f_n} (1 + \sqrt{1 + 4\varphi}) \right| = 1/|z_1|$$

$$\left| \frac{D_{-1-|n|}}{D_{-|n|}} \right| \longrightarrow \left| \frac{e_n}{2\,g_n} (1 + \sqrt{1 - 4\varphi}) \right| = |z_2|$$

où $|z_1| \leqslant |z_2|$ sont les deux points singuliers de l'équation différentielle, solutions de l'équation

$$f_n + e_n \cdot z + g_n \cdot z^2 = 0 \ . \qquad (10)$$

Dans certaines conditions tout à fait déterminées, il est possible de faire tendre ε_n vers $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varphi})$.

Le rapport:

$$\left| \frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}} \right|$$

tend alors vers $\left| \frac{1}{z_2} \right|$.

Ainsi, pour que le théorème de Fuchs soit directement applicable avec utilité, il faut que les deux points singuliers Z_1 et Z_2 soient du même côté du cercle de rayon unité dans le plan des Z. En effet, supposons $|Z_1| < 1$ et $Z_2 > 1$, la série entière en Z divergera pour $|Z| > 1/|z_1|$ donc pour une valeur réelle de x et la série entière en $1/Z$, pour $|Z| < |Z_2|$ donc de nouveau pour une région intéressante.

Toutes les séries obtenues par cette méthode seront donc en général divergentes dans la région intéressante, si la condition déjà exprimée n'est pas remplie. Il faudra alors employer une autre méthode moins directe pour résoudre l'équation. Elle fera l'objet de notre seconde communication.

Ainsi, le théorème de Fuchs peut très facilement être appliqué rapidement aux équations à coefficients périodiques et donne des résultats dans un très grand nombre de cas, mais, malheureusement, pas dans tous les cas.

Jean Patry. — *Une méthode numérique pour résoudre les équations linéaires à coefficients périodiques.*

La méthode analytique que nous avons exposée dans notre dernière communication ne permet pas de résoudre toutes les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Nous allons alors considérer une méthode numérique développée par Ince, Wannier et Extermann pour les équations de Mathieu, et nous chercherons à la généraliser. Elle consiste aussi à