

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 24 (1942)

Artikel: Solutions invariantes $Dx^2(x,y)$ de l'équation de Schroedinger relativiste
Autor: Stueckelberg, Ernest-C.-G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741754>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Solutions invariantes $D_{\kappa^2}(x, y)$ de l'équation de Schroedinger relativiste.*

La théorie des champs quantifiés fait appel à une fonction $D(x, y)$ ¹, qui satisfait à l'équation de Schroedinger: $\kappa = m/h$, $D_\mu(x) = \partial/\partial x^\mu - j(e/h) \Phi_\mu(x)$; $j^2 = -1$; $F(j)^* = F(-j)$

$$(D_\mu^*(x) D^\mu(x) - \kappa^2) D_{\kappa^2}(x, y) = (D_\mu(y) D^\mu(y) - \kappa^2) D_{\kappa^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

En l'absence des forces, les solutions invariantes ne peuvent dépendre que de R^2 . Dans la note précédente², nous avons démontré qu'il n'existe que deux fonctions de ce type, qui disparaissent pour $R^2 \rightarrow \infty$, soit

$$D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y) = -D_{\kappa^2}^{(0)}(y, x); \quad D_{\kappa^2}^{(1)}(x, y) = D_{\kappa^2}^{(1)}(y, x). \quad (2)$$

Nous allons démontrer que si $\Phi_\mu \neq 0$, il existe une série de fonctions complexes $D_{\kappa^2}^{(n)}(x, y)$ ayant la symétrie

$$D_{\kappa^2}^{(n)}(x, y) = j^{n+1} D_{\kappa^2}^{(n)}(y, x)^*. \quad (3)$$

La solution $D^{(0)}(x, y)$ est l'analogie spatiotemporelle de la *fonction de Green*: Une solution quelconque $\Psi_{\kappa^2}(y)$ de l'équation de Schroedinger (1) est déterminée en un événement y , si sa valeur et la valeur de sa dérivée normale sont connues sur un hyperplan $x = (\vec{x}, x^4 = \text{const.})$.

$$\Psi_{\kappa^2}(y) = -\frac{1}{4\pi} \int (dx)^3 \left\{ (D^{4*}(x) D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y)) \Psi_{\kappa^2}(x) - D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y) (D^4 \Psi_{\kappa^2}(x)) \right\}. \quad (4)$$

La fonction $D_{\kappa^2}^{(0)}$ doit donc avoir la propriété

$$D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y)}{\partial x^4} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

pour $x^4 = y^4$ (5)

¹ Cf. p. ex. PAULI. *Rapport du Congrès Solvay 1939*, paru dans Phys. Rev. 58, 716, 1940 et Rev. Mod. Phys. 13, 203, 1941.

² E. C. G. STUECKELBERG. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, 59, 49, 1942.

parce que, sur l'hyperplan $x = x^4$, $\Psi_{x^2}(y)$ et $\partial\Psi_{x^2}/\partial y^4$ peuvent être donnés arbitrairement.

Pour démontrer (4), nous cherchons l'ensemble des fonctions propres $S(x/\mu)$ de l'équation de Schrödinger, qui appartiennent à des valeurs propres de la masse $\kappa^2(\mu)$ et qui sont dénombrées par un indice μ (continu ou discontinu). Soit $\int(d\mu)^4$ la sommation sur l'ensemble invariant de cet indice, et $\int(dx)^4 = \int(dx)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^4$ la sommation sur tout l'espace-temps. Alors ces fonctions peuvent être normalisées à

$$\begin{aligned} \int(dx)^4 S^*(x/\mu) S(x/\mu') &= \delta(\mu/\mu') ; \\ \int(d\mu')^4 S^*(x/\mu') S(y/\mu') &= \delta(x/y) . \end{aligned} \quad (6)$$

le symbole $\delta(a/b)$ signifie que $\int(db)^4 \delta(a/b) f(b) = f(a)$. A l'aide de ces fonctions, on forme la matrice

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu/\mu') &= 2\pi j \delta(\kappa^2(\mu) - \kappa^2(\mu')) \\ \int(dx)^3 \left\{ (D^4 S(x/\mu))^* S(x/\mu') - S(x/\mu)^* D^4 S(x/\mu') \right\} & \end{aligned} \quad (7)$$

qui, étant hermitique, peut toujours être mise en forme diagonale $\varepsilon(\mu/\mu') = \varepsilon(\mu) \delta(\mu/\mu')$. Les fonctions $D^{(n)}$ sont définies par

$$\begin{aligned} D_{\kappa^2}^{(n)}(x, y) &= 2(2\pi)^2 \int(d\mu)^4 \delta(\kappa^2(\mu) - \kappa^2) \\ &\quad (j\varepsilon(\mu))^{n-1} S(x/\mu)^* S(y/\mu) . \end{aligned} \quad (8)$$

La relation (4) est obtenue pour $\Psi_{\kappa^2(\mu')}(y) = A(\mu') S(y/\mu')$ si l'on multiplie (7) avec $A(\mu') \varepsilon(\mu)^{-1} S(y/\mu)$ et si on somme sur $(d\mu)^4$. Elle est vraie d'abord pour tout $A(\mu') S(y/\mu')$ appartenant à la masse $\kappa^2(\mu')$. A cause de la linéarité de (4), ceci est vrai pour toute solution $\Psi_{\kappa^2}(y)$ de l'équation de Schrödinger avec $\kappa^2 = \kappa^2(\mu')$. La solution $D^{(1)}$ permet de définir à partir d'une fonction $\Psi(x)$ quelconque des fonctions

$$\Psi_{\kappa^2}(y) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int(dx)^4 D_{\kappa^2}^{(1)}(x, y) \Psi(x) \quad (9)$$

qui satisfont à (1) et ont la propriété que

$$\Psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\kappa^2) \Psi_{\kappa^2}(y) . \quad (10)$$

Pour démontrer ce théorème, on exprime d'abord $\Psi(x)$ par la somme

$$\Psi(x) = \int (d\mu')^4 A(\mu') S(x/\mu') \quad (11)$$

et substitue cette expression en (9) tenant compte de la définition (8) de $D^{(1)}$. En vertu de la première relation d'orthogonalité (6), on trouve

$$\Psi_{\kappa^2}(y) = \int (d\mu)^4 \delta(\kappa(\mu)^2 - \kappa^2) A(\mu) S(y/\mu) \quad (12)$$

qui, à son tour, satisfait à (10). En l'absence des Φ_μ , on choisit les $S(x/k) = (2\pi)^{-2} \exp(jk_\alpha x^\alpha)$ et l'on retrouve $D^{(n)} = D^{(0)}$ ou $D^{(1)}$ de la communication précédente suivant que n est pair ou impair.

L'application de ces fonctions montrera une nouvelle analogie entre la mécanique du point matériel et celle des champs quantifiés complexes¹.

¹ E. C. G. STUECKELBERG. Helv. Phys. Acta, 14, 321 et 588, 1941; 15, 588, 1942, et un article en préparation.

* $\delta(a)$ et $\delta(\vec{x})$ sont les symboles de Dirac habituels, qui sont les propriétés

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da \delta(a - b) f(a) = f(b) ; \quad \int (dx)^3 \delta(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{x}) = f(\vec{y}) .$$