Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 24 (1942)

Artikel: Solutions invariante Dx2 (x,y) de l'équation (-x2) D = 0 (1) dans l'espace pseudo-euclidien

Autor: Stueckelberg, Ernest-C.-G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741753

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Solutions invariantes* $D_{\varkappa^2}(x, y)$ *de l'équation* $(\Box - \varkappa^2) D = 0$ (1) *dans l'espace pseudo-euclidien.*

Le continu quadridimensionnel pseudo-euclidien de l'espace-temps définit la distance invariante entre deux événements par $R(x, y)^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu) = -T^2 = r^2 - t^2$ (avec $t = x^4 - y^4$, $r = |\vec{x} - \vec{y}|$). Une fonction invariante

$$D_{\varkappa^2}(x, y) = D_{\varkappa^2}(R^2)$$

ne peut dépendre que de cette distance R^2. Si cette fonction est solution de l'équation homogène ($\Box = g^{\mu\nu}\, \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu$), elle possède en général des singularités sur le cône de lumière $R^2 = 0$, $t = \pm r$. Une telle fonction est dite solution de (1) si, pour toute fonction $\Psi(x)$, l'intégrale étendue sur tout l'espace $\int (dx)^3$ et sur tout le temps $\int_{-\infty}^{+\infty} dx^4$, la fonction

$$\Psi_{\varkappa^2}^{(x)}(y) = \int (dx)^3 \int_{(x)} dx^4\, D_{\varkappa^2}(x, y)\, \Psi(y) \qquad (2)$$

satisfait à l'équation homogène (1) (mentionnée dans le titre). Si $Z_p(z)$ est une fonction de Bessel de l'ordre p et de l'argument z, toute fonction invariante

$$D_{\varkappa^2}(R^2) = \varkappa T^{-1} Z_1(\varkappa T) = 2 \frac{d}{d(R^2)} Z_0(\varkappa T) \qquad (3)$$

est solution de (1). La fonction $D_{\varkappa^2}$ obtenue par la substitution $Z_0(z) = J_0(z)$ en (3) est une première solution du problème. $J_0(z)$ étant une série de puissances (à coefficients réels) en z^2, n'a pas de singularités au cône de lumière. Mais elle n'a pas d'intérêt dans les problèmes physiques (quantification des champs) parce qu'elle devient infinie pour $R^2 \to +\infty$. La théorie des champs quantifiés s'intéresse à des solutions invariantes de (1), qui tendent vers zéro pour $R^2 \to +\infty$. De telles fonctions réelles doivent avoir une discontinuité sur le cône de lumière, parce que toute fonction de Bessel autre que J_0

devient complexe pour un changement de la phase φ de l'argument $z = e^{i\varphi}$.

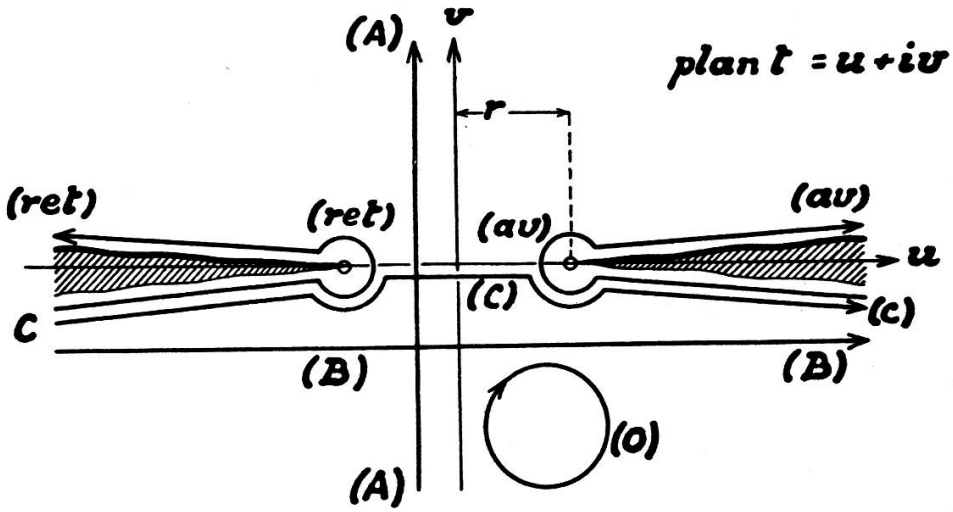
Pour obtenir de telles solutions, nous rappellons[1] que l'intégrale étendue sur le *domaine euclidien*, qui est contenu en (2) si l'intégration sur $\int dx^4$ se fait le long de l'*axe imaginaire* dans le plan riemanien de x^4 (ou de $t = x^4 - y^4$, cf. chemin (X) = (A) dans la figure), satisfait l'équation inhomogène

$$(\Box - \varkappa^2)\, \Psi_{\varkappa^2}(x) = -4\pi \Psi(x) \tag{4}$$

si $Z_0(z)$ contient la singularité $Z_0(z) \to \frac{2}{\pi} \log z$ pour $z \to 0$. Les fonctions suivantes

$$-i H_0^{(1)}(z) = J_0(z) \frac{2}{\pi} \log (e^{-i\frac{\pi}{2}} z) + g(z) \tag{5}$$

$$N_0(z) = J_0(z) \frac{2}{\pi} \log z + g(z) \tag{6}$$



satisfont à cette condition. $g(z)$ est également une série de puissances en z^2. Elles ont en plus la propriété que $-i\, H_0^{(1)}(e^{i\frac{\pi}{2}} z)$ et $N_0(z)$ sont les deux réelles, si z est réel et positif. Elles tendent vers zéro si $z \to +$ réel ∞. Le chemin d'intégration (X) = (A) (cf. figure) peut être déformé en l'un ou l'autre des lacets (X) = (*av*) ou (X) = (*ret*) autour des pôles

[1] STUECKELBERG. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *56*, 43, 1939.

$t = \pm r$ de la fonction. Ces deux solutions $\Psi_{\varkappa^2}^{(av)}$ ou $\Psi_{\varkappa^2}^{(ret)}$ de (4) peuvent être exprimées entièrement en termes de la densité de la source $\Psi(x)$ pour des temps réels avancés $t \geqslant r$ ou retardés $t \leqslant r$ (méthode de Sommerfeld [1]). Elles tendent vers zéro pour $R^2 \to +\infty$, si la densité de source ne diffère de zéro que dans une région finie d'espace.

Si, par contre, on choisit un chemin du type (X) = (B) dans (2), l'intégrale peut être contractée en un contour (O) fermé et situé entièrement dans la partie inférieure du plan t. Une telle fonction $\Psi_{\varkappa^2}^{(B)}$ satisfait à l'équation homogène, parce que $(\Box - \varkappa^2)\, D_{\varkappa^2} = 0$ dans tout le domaine d'intégration. Le parcours particulier (C) du type (B) définit $\Psi_{\varkappa^2}^{(C)}$ en termes de la densité de source $\Psi(x)$ pour des temps réels. Cette solution peut être exprimée par une intégrale étendue le long de l'axe réel de t, si l'on définit dans intégrant $D_{\varkappa^2}$ (2) par la prolongation analytique le long du parcours (C) de la fonction choisie. La phase φ de $z = \varkappa T = \varkappa (t - r - i|\tau|)^{\frac{1}{2}} (t + r - i|\tau|)^{\frac{1}{2}}$ change de

$$(-\pi) \to \left(-\frac{\pi}{2}\right) \to 0$$

si t augmente de $(t < -r) \to (-r < t < r) \to (t > r)$.

Cette prolongation appliquée pour $\varkappa^2 > 0$ donne

$$z = (e^{-i\pi} \varkappa T) \to (e^{-i\frac{\pi}{2}} \varkappa R) \to (\varkappa T) \ .$$

La substitution de ce z en « $(5) + 2 J_0(z)$ » fournit la prolongation

$$\big(N_0(\varkappa T) - i J_0(\varkappa T)\big) \to \big(-i H_0^{(1)}(e^{i\frac{\pi}{2}} \varkappa R)\big) \to \big(N_0(\varkappa T) + i J_0(\varkappa T)\big). \tag{7}$$

Les parties réelles et imaginaires de (7) doivent satisfaire individuellement à (1). Nous les appelons $D_{\varkappa^2}^{(0)}(x, y)$ et $D_{\varkappa^2}^{(1)}(x, y)$. Ils résultent par la différentiation formelle (3) de deux fonctions réelles et discontinues, que l'on peut exprimer

[1] SOMMERFELD, cf. FRANK u. v. MISES, Diff. Gleich. der math. Physik, 2me éd., vol. 2, p. 780 et suivantes.

en termes des symboles de Dirac $\delta(z) = d\gamma(z) / dz$; $2z\gamma(z) = |z| + z$; $\gamma(z) + \gamma(-z) = 1$

$$D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y) = -D^{(0)}_{\varkappa^2}(y, x) = -2\frac{d}{d(T^2)}\left(\frac{t}{|t|}\gamma(T^2)\, J_0(\varkappa T)\right)$$

$$= r^{-1}\big(\delta(r+t) - \delta(r-t)\big) + \varkappa^2\gamma(T^2)(\ldots) + \ldots \tag{8}$$

$$D^{(1)}_{\varkappa^2}(x, y) = D^{(1)}_{\varkappa^2}(y, x) = 2\frac{d}{d(R^2)}\left(-\gamma(R^2)\, i\, H^{(1)}_0(e^{i\frac{\pi}{2}}\varkappa R) + \gamma(T^2)\, N_0(\varkappa T)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}R^{-2} + \varkappa^2(\ldots) + \ldots . \tag{9}$$

Les troisièmes membres de (3) et (9) indiquent les singularités les plus fortes pour $t = \pm r$. Pour des valeurs négatives de $\varkappa^2 = -\sigma^2 < 0$, la prolongation doit être faite le long du parcours

$$z = (\varkappa T) \to (e^{i\frac{\pi}{2}}\varkappa R) \to (e^{i\pi}\varkappa T) .$$

A la place de (7), on obtient une association différente, dont la partie imaginaire est (à un facteur et à un terme additionnel $2J_0(z)$ près) la fonction $D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)$ exprimée en (8) avec l'argument $i\sigma T$ à la place de $\varkappa T$. La partie réelle par contre donne une fonction différente de (9), soit

$$D^{(1)}_{\varkappa^2}(x, y) = D^{(1)}_{\varkappa^2}(y, x) = \frac{d}{d(R^2)}\left(\gamma(R^2)\, N_0(\sigma R) - \gamma(T^2)\, i H^{(1)}_0(e^{i\frac{\pi}{2}}\sigma T)\right)$$

$$= \frac{2}{\varkappa}R^{-2} + \varkappa^2 \ldots \tag{10}$$

qui a les mêmes singularités que (9). Comme (9), elle disparaît pour R^2 et pour $T^2 \to \infty$. $D^{(0)}_{\varkappa^2}$, par contre, est dans les deux cas $\varkappa^2 \gtrless 0$ zéro pour $R^2 > 0$, mais il ne disparaît pour $T^2 \to \infty$ que si $\varkappa^2 > 0$. D'autres propriétés, que ces fonctions possèdent en commun avec d'autres fonctions plus générales, seront étudiées dans la communication suivante [1].

[1] E. C. G. Stueckelberg. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *59*, 53, 1942.