

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 24 (1942)  
  
**Artikel:** Une méthode nouvelle de la quantification des champs [suite]  
**Autor:** Stueckelberg, E.C.G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741744>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UNE MÉTHODE NOUVELLE

## DE LA

# QUANTIFICATION DES CHAMPS

PAR

E. C. G. STUECKELBERG

(Avec 6 fig.)

(suite)

## PARTIE II

**La quantification du champ non chargé.**

§ 7. — LA QUANTIFICATION SYMÉTRIQUE  
(statistique Bose-Einstein).

La théorie des quanta associe à toute grandeur physique  $a$  un opérateur hermitéique (que nous désignerons par le même symbole  $a$ ).

Deux grandeurs  $a$  et  $b$  peuvent être mesurées avec une précision limitée par les incertitudes  $\Delta a$  et  $\Delta b$ . Celles-ci sont reliées entre elles par le *principe de Heisenberg*:

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{1}{4} |j[a, b]^{(-)}| \quad (7.1)$$

Dans le deuxième membre  $[a, b]^{(-)}$  est l'opérateur anti-hermitéique défini par la (deuxième) équation:

$$[a, b]^{(\pm)} = ab \pm ba \quad (7.2)$$

$j$  est un opérateur antihermitéique, qui commute avec tous les autres opérateurs de la théorie.  $j[a, b]^{(-)}$  est ainsi un opérateur hermitéique.  $\bar{a}$  est l'espérance mathématique de l'opérateur  $a$ .

La quantification de notre théorie introduit un opérateur hermitéique  $D^{(-)}$

$$[u(x)_A, u(y)_B]^{(-)} = i D^{(-)}(x, y)_{AB} \quad (7.3)^1$$

qui doit avoir les propriétés suivantes:

- 1° Satisfaire à l'équation d'onde par rapport à  $(xA)$  et  $(yB)$ ;
- 2° Etre *antisymétrique* en  $(xA)$  et  $(yB)$  (équations (3.13) et (3.14) pour  $D^{(n-)}$ );
- 3° Disparaître pour des grandes distances spatiales ( $R^2 \gg \kappa^{-2}$ ).

Tandis que les conditions 1° et 2° sont des conséquences mathématiques de la définition (7.3), la condition 3° contient un argument physique: Elle postule qu'on peut mesurer simultanément  $u(x)_A$  et  $u(y)_B$  avec une précision arbitrairement grande, si les deux événements sont situés spatialement et à des grandes distances. Cette condition est nécessaire parce qu'une mesure faite à l'événement  $x$  ne peut influencer que des événements  $y$  qui sont en rapport causal avec  $x$  ( $y$  situé *temporellement* par rapport à  $x$ , soit  $R^2 < 0$ ) et des événements  $y$  qui sont « *spatialement très près* » de  $x$ , soit  $R^2 \sim \kappa^{-2}$ .

La condition (7.3) aboutit à la statistique de Bose-Einstein (BE) pour les quanta associés au champ. Toutes les fonctions  $D^{(n-)}$  du § 3 ont les propriétés voulues.

## § 8. — LA QUANTIFICATION ANTISYMMÉTRIQUE (statistique de Fermi-Dirac).

Les grandeurs  $J^\alpha$  et  $T^{\alpha\beta}$  peuvent être considérées comme formées par l'opération

$$\begin{aligned} J^\alpha(x) &= e \gamma^{\alpha AB} U(x, x)_{AB} ; \\ T^{\alpha\beta}(x) &= \hbar \lim_{x=y} \partial^\alpha(y) \beta^{\beta AB} U(x, y)_{AB} \end{aligned} \quad (8.1)^2$$

<sup>1</sup> Cette relation doit être complétée, si  $u_A^+ \neq u_A$ , par

$$[u_A^+, u_B]^{(-)} = D'_{AB} \quad \text{et} \quad [u_A^+, u_B^+]^{(-)} = D''_{AB} .$$

<sup>2</sup>  $J^\alpha$  est écrit pour des rep. biv. et  $T^{\alpha\beta}$  pour des rep. univ., mais (8.1) s'applique aussi dans les autres cas avec  $\gamma$  et  $\beta$  interchangés. (8.1) n'est valable que pour la théorie sans interaction (§ 6).

avec  $\partial_\alpha(y) = \partial/\partial y^\alpha$ , opérant sur une fonction à deux indices (*double fonction*)

$$U(x, y)_{AB} \quad (= u^+(x)_A u(y)_B) . \quad (8.2)$$

Pour que les lois de conservation soient satisfaites, il suffit de demander que la double fonction  $U_{AB}$  soit solution de l'équation d'ondes pour  $(xA)$  et  $(yB)$  (comme l'était  $D_{AB}^{(n)}$ ). Le deuxième membre de (8.2) est une fonction particulière de ce type.

L'algèbre des grandeurs non commutatives  $a, b, c$  et  $d$  contient l'identité suivante:

$$\begin{aligned} [ab, cd]^{(-)} = & + a[b, c]^{(\mp)} d \pm [a, c]^{(\mp)} bd \\ & + ca[b, d]^{(\mp)} \pm c[a, d]^{(\mp)} b . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Si l'on identifie  $u^+(x)_A$  avec  $a$ ,  $u(x)_B$  avec  $b$ ,  $u^+(y)_C$  avec  $c$  et  $u(y)_D$  avec  $d$ , (8.3) montre que le commutateur a la forme (nous supprimons les indices pour ces discussions de l'ordre de grandeur)

$$[U(x, x), U(y, y)]^{(-)} \sim j U(x, y) D^{(\cdot)}(x, y) \quad (8.4)$$

(avec  $D^{(\cdot)} = D^{(-)}$ ), si l'on utilise la formule (7.3). Mais l'équation

$$[u(x)_A, u(y)_B]^{(+)} = D^{(+)}(x, y)_{AB} \quad (8.5)^1$$

amène au même résultat (8.4) (avec  $D^{(\cdot)} = D^{(+)}$ ). Or une théorie qui est basée sur (8.5) avec un  $D^{(+)}$  qui satisfait aux conditions 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup> <sup>2</sup> et 3<sup>o</sup> du § 7, donne les mêmes résultats pour les incertitudes des densités d'énergie et de charge, soit:

$$\begin{aligned} \Delta T(x) \cdot \Delta T(y) & \gtrsim |\bar{T} h \partial D(x, y)| \\ \Delta J(x) \cdot \Delta J(y) & \gtrsim |\bar{J} e D(x, y)| . \end{aligned} \quad (8.6)$$

Les densités d'énergie ou de la charge ne peuvent être mesurées qu'à une précision  $\Delta T$  près, qui est proportionnelle à une « den-

<sup>1</sup> Voir note de l'équation (7.3) avec  $[, ]^+$  à la place de  $[, ]^-$ .

<sup>2</sup> A lire « *symétrique* » en condition 2<sup>o</sup>.

sité moyenne »  $\bar{T}$ . Si  $T(x) \sim T(y) \sim \bar{T}$ , la relation prend la forme

$$\left(\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2 \geq \frac{|h \partial D(x, y)|}{|\bar{T}|} ; \quad \left(\frac{\Delta J}{\bar{J}}\right)^2 \geq \frac{|e D(x, y)|}{|\bar{J}|} . \quad (8.7)$$

L'erreur en pour cent diminue ou si la distance spatiale  $R^2$  augmente ou si, pour un  $R^2$  donné,  $|\bar{T}|$  (ou  $|\bar{J}|$ ) augmente. Les incertitudes disparaissent pour des grandes distances spatiales  $R^2 \gg \kappa^{-2}$  et pour des densités d'énergie (ou de charge) très fortes. L'erreur (ou la fluctuation) devient alors négligeable. Autrement dit, pour une « grande densité de quanta », la fluctuation de ces densités devient minime.

Ces raisonnements s'appliquent ainsi aux *deux lois* (7.3) et (8.5). Mais, en utilisant la loi (7.3), on a introduit le champ  $u_A$  comme une grandeur physique, qui peut être mesurée avec une précision limitée par (7.4) et (7.3). La loi d'anticommutation par contre, n'admet jamais une connaissance de  $u(x)_A$ , même à deux endroits différents. *Le champ anticommutatif est inobservable.*

### § 9. — LES SEIZE THÉORIES A PRIORI POSSIBLES.

En théorie classique, nous avons quatre types de théories distinctes, qui étaient a priori possibles. D'abord  $u_A$  pouvait appartenir à une *rep. biv* ou à une *rep. univ*. Ensuite, nous avons le choix entre  $u_A^+ = u_A$  ou  $u_A^+ \neq u_A$ .

Pour des raisons de causalité, nous avons dû exclure les théories qui faisaient correspondre à l'énergie totale une grandeur  $H_u$  négative ou identiquement nulle. Il ne restait de ces quatre théories que celle avec  $u_A^+ = \epsilon u_A$  pour la *rep. biv*. et celle avec  $u_A^+ = u_A$  pour la *rep. univ*. ((5.16) et (5.20)).

A ces  $2 \times 2 = 4$  possibilités classiques, la théorie des quanta ajoute l'alternative entre *la statistique FD* et *la statistique BE*. Ensuite, l'existence de deux types de fonctions  $D^{(2n)}$  ou  $D^{(2n+1)}$  permet de choisir dans chacun de ces  $2 \times 4 = 8$  types entre l'application de  $D^{(0)}$  et  $D^{(1)}$ <sup>1</sup>. Pour pouvoir choisir entre ces

<sup>1</sup> Ou  $D^{(2n)}$  et  $D^{(2n+1)}$  si  $D^{(2n)} \neq D^{(0)}$ .

$2^4 = 16$  types différents, nous avons besoin de deux critères physiques:

Le *premier critère* est celui, déjà existant en théorie classique soit  $H_u > 0$ .

Le *deuxième critère* demande que les différences entre les valeurs propres de l'énergie totale par onde de fréquence  $k_r^4 \text{ cm}^{-1}$  soient les multiples entiers de  $hk_r^4$ :

$$H_r = hk_r^4(N_r + \text{const}_r) ; \quad N_r = \text{entier} . \quad (9.1)$$

Pour soumettre à ces critères les seize théories, nous constatons que les quantifications FD (8.5) et BE (7.3) ont pour conséquence les deux relations opératoriels cf. (3.9) et (3.13):

$$\delta(\kappa(\mu) - \kappa)[a(\mu), a(\mu')]^{(\pm)} = \binom{1}{j} \rho^{(n\pm)-1}(\mu/\mu') . \quad (9.2)^1$$

Par intégration sur l'indice continu  $\mu$  (cf. (5.3)) et à la suite de l'introduction de l'indice  $p$ , cette formule devient avec les définitions de  $a_r$  en (5.5):

$$[a_{mp}, a_{m'p'}]^{(\pm)} = \binom{1}{j} \rho_{(mp), (m'p')}^{(n\pm)-1} \quad (9.3)^2$$

$\rho^{(n\pm)}$  peut toujours être mis sous la forme (cf. § 5):

$$\rho_{(mp), (m'p')}^{(n\pm)} = \rho_m^{(n)} \delta_{mm'} \begin{pmatrix} \delta_{pp'} \\ i_{pp'} \end{pmatrix} . \quad (9.4)^2$$

Dans le cas FD, (9.3) contient une contradiction algébrique si un seul  $\rho_m^{(n)} < 0$ . La seule possibilité est alors  $u_A = 0$  et  $D = 0$ . Dans ce cas toutes les grandeurs disparaissent. D'autre part, les valeurs propres de la grandeur

$$\frac{1}{4} j(a_{mp} a_{mq} - a_{mq} a_{mp}) = \frac{1}{|\rho_m^{(n)}|} M_m \quad (9.6)$$

<sup>1</sup>  $\rho^{(n\pm)}$  est une *matrice quelconque* qui définit la fonction générale (3.20).

<sup>2</sup> L'indice  $m$ , distinct de  $r$ , implique un système  $S(mp/x)_A$  arbitraire qui existe aussi si une force  $\chi_B^A$  est présente.

sont données par:

$$\text{val. prop. } M_m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \quad (9.7)$$

si  $\rho_m^{(n)} > 0$  pour tout  $m$ . Dans le cas BE, la condition  $\rho_m^{(n)} > 0$  n'est pas nécessaire. On introduit  $M_m$  par la définition:

$$\frac{1}{2} (a_{mp}^2 + a_{mq}^2) = \frac{1}{|\rho_m^{(n)}|} M_m . \quad (9.8)$$

Les valeurs propres sont:

$$\text{val. prop. } M_m = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2} + 2, \dots . \quad (9.9)$$

Si les « forces » sont identiquement nulles, toutes les seize théories (cf. (5.8) et (5.19)) donnent des valeurs propres à différence entières, ou une seule valeur propre, si on pose  $D^{(\cdot)} = D^{(n)}$  et  $u_A^+ = \varepsilon^n u_A$ .

En effet, l'opération  $u_A^+ = \varepsilon u_A$  ne fait que substituer  $\pm a_{mp}$  pour  $a_{mq}$ , parce que  $\rho_r^{(1)}/\rho_r^{(0)} = \pm 1$ .

Par contre, si la « force »  $\chi(x)_B^A$  dépend du temps, la matrice  $\varepsilon$  (3.15) n'est pas diagonale ni dans le système  $m, n, \dots$  où  $\rho^{(1)}$  est diagonal, ni dans le système  $\mu, \nu \dots$  où  $\rho^{(0)}$  est diagonal. Donc  $a_{mp}^+$  (ou  $a_{\mu p}^+$ ) du § 6 est une combinaison linéaire entre  $a_{mp}$  (ou  $a_{\mu p}$ ) et  $a_{np}$  (ou  $a_{\nu n}$ ) qui appartient à une autre solution du système (cf. figures 1 à 4)<sup>1</sup>. Ceci montre que dans ce cas général, où  $\chi(x)_B^A$  dépend du temps, le premier terme de l'expression (6.15) ou (6.16) (multiplié par  $j$ , si l'on a FD)<sup>2</sup> a la forme (9.1) seulement si l'on définit:

$$u_A^+ = u_A . \quad (9.10)$$

<sup>1</sup> Le même est vrai pour tout autre  $a_{mp}^+$  qui, commutant ou anti-commutant avec  $a_{m'p'}$ , fournit une matrice  $\rho^{(n)} = f(\varepsilon) \rho^{(0)}$ . Une telle matrice produit les fonctions  $D_{AB}$  générales discutées au § 3.

<sup>2</sup> Et un facteur  $\frac{1}{4}$  pour FD ou  $\frac{1}{2}$  pour BE.

En plus, il faut démontrer que <sup>1</sup>

$$|\varphi_\mu^{(n)}| = |\varphi_m^{(n)}| = |\varphi_r^{(0)}|. \quad (9.11)$$

On vérifiera ((9.17) et suiv., (16.5) et suiv.) que seuls  $\varphi^{(0)}$  et  $\varphi^{(1)}$  satisfont à cette condition. La condition (9.10) exclut les théories  $u_A^+ \neq u_A$  qui étaient possibles en théorie classique. Ceci réduit nos seize théories à huit types seulement.

La non-commutativité des opérateurs  $u_A$  et  $u_B$  demande qu'on remplace la grandeur  $U(x, y)_{AB}$  en (8.1) par  $U_{AB}^{(+)}$  ou  $U_{AB}^{(-)}$

$$U(x, y)_{AB}^{(\pm)} = \binom{1}{j} \frac{1}{2} [u(x)_A, u(y)_B]^{(\pm)} \quad (9.12)^2$$

qui sont les deux des opérateurs hermitéiques.

Pour des *rep. biv.*, l'énergie totale, formée de ces opérateurs a la forme (6.15) ou (6.16) (avec  $a^\pm = a$ ) multiplié par  $\frac{1}{4}j$ , si l'on pose  $U = U^{(-)}$ . Si l'on posait  $U = U^{(+)}$ , la symétrie des  $\gamma^{\alpha AB}$  n'aurait pour conséquence qu'une seule valeur propre  $H_r = \text{const.}$

Analoguement, pour des *rep. univ.* (6.15) ou (6.16), avec la substitution (6.17), représente l'énergie totale, si l'on pose  $U = U^{(+)}$ . L'identification  $U = U^{(-)}$  donne ici le résultat  $H_r = \text{const.}$  (Voir un facteur  $\frac{1}{2}$ ).

Si l'on choisit pour les *rep. biv.* la loi de BE, il résultera  $U_{AB}^{(-)} = j \frac{1}{2} D_{AB}^{(n-)}$  et l'énergie totale par onde sera un nombre donné, c'est-à-dire, encore une fois, on n'aurait qu'une seule valeur propre. Il en est de même pour les *rep. univ.* avec la loi de FD ( $U_{AB}^{(+)} = \frac{1}{2} D_{AB}^{(n+)}$ ).

Donc, les seules possibilités qui fournissent une énergie par onde qui peut prendre différentes valeurs propres sont: ou *rep. biv.* avec quantification FD ou *rep. univ.* avec quantification BE. Il nous reste à choisir les fonctions  $D^{(n)}$ . Ne peuvent intervenir à la suite de (9.11) que  $D^{(0+)}$  pour la *rep. biv.* et

<sup>1</sup> L'indice  $r$  se réfère à des ondes planes, tandis que  $m$  (ou  $\mu$ ) dénombrent un système de solutions, cf. fig. 1 à 4.

<sup>2</sup> Le facteur  $\frac{1}{2}$  doit être remplacé par  $\frac{1}{4}$  pour le cas FD.



$D^{(0-)}$  pour la rep. univ. parce que les deux fonctions  $D^{(1+)}$  et  $D^{(1-)}$  n'existent pas dans ces deux cas, cf. § 4. Les seules théories physiquement possibles parmi les seize possibilités sont :

TABLEAU I.

*Les théories du champ non charge.*

$u_A^+$	$\theta(g) : g =$	statistique	fonction $D^{(n)}$
$= u_A$	$N + \frac{1}{2}$	FD	$D^{(0+)}$
$= u_A$	N	BE	$D^{(0-)}$

Pour pouvoir appliquer (9.4) et suivantes, il faut que  $\rho^{(0)}$  soit diagonal. On doit choisir le système de fonctions  $\mu, \nu \dots$  (figures 1 et 2). (9.11) est ainsi satisfait.

Si nous utilisons la relation entre représentation et spin, ce résultat peut être formulé de la manière suivante: *Les quanta associés à une rep. biv. (rep. univ.) ont un spin demi-entier  $N + \frac{1}{2}$  (respectivement entier N) et suivent la statistique FD (respectivement BE). La fonction invariante est la fonction  $D^{(0+)}$  (respectivement  $D^{(0-)}$ ).*

*Elimination de la zéro-point énergie.*

L'utilisation de  $D^{(0)}$  nous a amené à l'expression (6.16). Les valeurs propres de l'énergie sont ( $\Sigma$  implique la somme sur  $\mu$  et  $\nu$ )<sup>1</sup>:

$$H'_u = h \sum_{\mu} \rho_{\mu}^{(0)} k_{\mu}^4 M_{\mu} . \quad (9.14)$$

Le critère 2° est satisfait.

Mais suivant (9.14) et (9.7) (ou (9.9)) une onde ne peut jamais porter l'énergie nulle. On peut remédier à ce défaut en définissant

$$U(x, y)_{AB} = U(x, y)_{AB}^{(\mp)} - \frac{1}{4} D^{(1\mp)}(x, y)_{AB} \quad (9.15)$$

<sup>1</sup>  $\rho_{\mu}^{(0)} = \rho_r^{(0)}$ ;  $k_{\mu}^4 = k_r^4$ , etc., voir note p. 270.

où le signe — (respectivement +) se réfère aux rep. biv. (respectivement univ.). En effet, la fonction  $D^{(1-)}$  contribue à l'énergie totale pour  $x^4 \ll 0$  (de la rep. biv.) en vertu de sa définition (3.13) et de (5.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} h \int (dx)^3 \gamma^{4AB} \lim_{x=y} \partial^4(y) D^{(1-)}(x, y)_{AB} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_p \sum_{p'} \sum_{p''} \rho_{\mu}^{(0)} i_{pp'} \rho_{\mu\mu}^{(1)-1} i_{p'p''} k_{\mu}^4 . \end{aligned} \quad (9.16)$$

Avec  $(i^2)_{pp''} = -\delta_{pp''}$  et  $\sum \delta_{pp} = 2$  le terme ajouté enlève un  $\pm \frac{1}{2}$  en  $M_{\mu}$ , si on peut démontrer que l'élément  $|\rho_{\mu\mu}^{(1)-1}|$  de la matrice inverse  $\rho^{(1)-1}$  est égal à  $|\rho_{\mu}^{(0)}|^{-1}$ .

Pour cette démonstration nous évaluons la matrice  $\rho^{(1)}$  pour les deux fonctions  $\mu$  et  $\nu$  des figures 1 et 2. On a d'abord

$$\rho^{(0)} = \begin{pmatrix} \rho_{\mu\mu}^{(0)} & \rho_{\mu\nu}^{(0)} \\ \rho_{\nu\mu}^{(0)} & \rho_{\nu\nu}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(0)} & 0 \\ 0 & \rho_s^{(0)} \end{pmatrix} . \quad (9.17)$$

Les lignes et colonnes de (9.17), (9.18), (9.20) et (9.21) se réfèrent à  $\mu$  et  $\nu$ . (Les matrices  $i_{pp'}$  et  $\delta_{pp'}$  sont omises).

La matrice  $\rho^{(1)}$  a la forme ( $\pm = \text{rep. } \begin{smallmatrix} \text{biv.} \\ \text{univ.} \end{smallmatrix}$ ):

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + b^2) \rho_r^{(1)} + a^2 \rho_s^{(1)} & ab(\rho_r^{(1)} \pm \rho_s^{(1)}) \\ ab(\rho_r^{(1)} \pm \rho_s^{(1)}) & (1 + b^2) \rho_s^{(1)} + a^2 \rho_r^{(1)} \end{pmatrix} . \quad (9.18)^1$$

Cette relation est obtenue par une intégration spatio-temporelle. On a utilisé le résultat suivant: « L'intégration sur le demi-espace-temps d'une onde plane donne la moitié de l'intégrale sur l'univers entier, si les contributions à la limite  $x^4 \cong 0$  sont compensées ».

L'équation

$$\rho_r^{(0)} = \rho_{r'}^{(0)} = b^2 \rho_{r'}^{(0)} + a^2 \rho_{s'}^{(0)} \quad (9.19)$$

qui est une conséquence de l'équation de continuité, et l'identité

$$\rho_r^{(0)} \rho_s^{(0)} = -\rho_r^{(1)} \rho_s^{(1)} ,$$

<sup>1</sup> Pour la définition de  $a$  et  $b$ , voir note p. 220 et les fig. 1 et 2.

qui est une conséquence de (5.11) et (5.13), donnent à  $\rho^{(1)}$  la forme :

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} b^2 \rho_r^{(1)} & ab \rho_r^{(1)} \\ ab \rho_r^{(1)} & b^2 \rho_s^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

L'inverse de cette matrice est

$$\rho^{(1)-1} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(1)-1} & -\frac{a}{b} \rho_s^{(1)-1} \\ -\frac{a}{b} \rho_s^{(1)-1} & \rho_s^{(1)-1} \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

Ainsi on a  $\rho_{\mu\mu}^{(1)-1} = \rho_r^{(1)-1}$ ;  $\rho_{\nu\nu}^{(1)-1} = \rho_s^{(1)-1}$ . L'énergie ajoutée par  $D^{(1-)}$  en (9.15) vaut

$$H_0 = h \sum_{\mu} \frac{\rho_r^{(0)}}{\rho_r^{(1)}} k_r^{\dagger} \frac{1}{2} \quad (9.22)$$

Comme  $\rho_r^{(1)}$  change de signe avec  $k_r^{\dagger}$ , tandis que  $\rho_r^{(0)}$  garde son signe, on a

$$H_u = H'_u + H_0 = h \sum_{\mu} k_r^{\dagger} \left( M_{\mu} + \frac{\rho_r^{(0)}}{\rho_r^{(1)}} \frac{1}{2} \right) = h \sum_{\mu} |k_r^{\dagger}| N_{\mu} \quad (9.23)^1$$

$$\text{val. prop. } N_{\mu} = \frac{1}{2} + \frac{k_r^{\dagger}}{|k_r^{\dagger}|} M_{\mu} = 0, 1. \quad (9.23 a)$$

L'énergie est ainsi toujours positive ou nulle. La contribution à la valeur propre d'une onde plane prend les valeurs postulées dans le critère 2°.

Pour la rep. univ., les considérations sont les mêmes. On n'a qu'à remplacer  $\gamma^{\dagger}$  par  $\beta^{\dagger}$  et  $D^{(1-)}$  par  $D^{(1\pm)}$  dans le premier membre de (9.16). Le deuxième membre reste alors, au signe

<sup>1</sup> La somme sur  $\mu$  est à effectuer sur tous les  $\mu$  et  $\nu$  des fig. 1 et 2. Alors  $k_r^{\dagger} = k_r^{\dagger} > 0$  pour  $\mu = \mu$  et  $k_r^{\dagger} = k_s^{\dagger} < 0$  pour  $\mu = \nu$ .

près, le même, ce qui nous amène à (9.22) changé de signe. L'énergie a la forme

$$H_u = H'_u - H_0 = h \sum_{\mu} \frac{\varrho_r^{(0)}}{|\varrho_{\mu}^{(0)}|} k_r^4 \left( M_{\mu} - \frac{1}{2} \right) = h \sum_{\mu} |k_r^4| N_{\mu} . \quad (9.24)^1$$

$$\text{val. propr. } N_{\mu} = M_{\mu} - \frac{1}{2} = 0, 1, 2, \dots \quad (9.24 a)$$

On vérifie que la charge totale  $e_u$  est nulle dans les deux cas (rep. biv. et rep. univ.).

Ceci nous amène à la

### § 9a. — CONCLUSION.

La quantification du champ non chargé est uniquement déterminée, si on demande que les valeurs propres de l'énergie par onde plane soient des multiples entiers et positifs ou nuls ( $N_{\mu}$ ) de  $h|k_r^4|$ . Les rep. biv. ont des quanta satisfaisant à la statistique de FD ( $N_{\mu} = 0, 1$ ). Ceux de la rep. univ. obéissent à la statistique de BE ( $N_{\mu} = 0, 1, 2 \dots$ ).

La charge portée par une ou par plusieurs ondes est toujours nulle.

(à suivre)