

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 23 (1941)  
  
**Artikel:** Sur les rotations avec frottement d'une superposition de sphères concentriques  
**Autor:** Wavre, Rolin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741224>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

8. BIEDA, F., *Remarques sur la nomenclature et la classification de certaines espèces de Nummulites*. Première partie, Bull. Acad. Pol. Sc. Varsovie, 1930.
9. BARBIER, R., *Sur la présence de calcaires à Rosalines dans les écaillés de Saint-Florent (Corse)*. C.R.S.S.G.F., fasc. 5, p. 70, 1938.
10. COLLET, L.-W., *La Corse, Elbe et l'Apennin du point de vue tectonique*. B.S.G.F., t. VIII, fasc. 9, p. 737. 1938.
11. FLANDIN, J., *Contribution à l'étude paléontologique du Nummulitique algérien*. Mat. Carte géol. Alg., t. pal., n° 8, 1938.
12. ARNI, P., *Über die Nummuliten und die Gliederung des Unter-eocäns*. Eclog. geol. Helv., vol. 32, n° 1, 1939.
13. GINDRAT, H., *Le Crétacé supérieur dans les klippen d'Oletta-Patrimonio (Corse)*. C. R. Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, 56, 74. 1939.

**Rolin Wavre.** — *Sur les rotations avec frottement d'une superposition de sphères concentriques.*

Plusieurs questions de géologie dépendent de la mécanique, et pourront constituer un chapitre spécial de géodynamique. Il en est ainsi en particulier de la position du pôle au cours des époques anciennes. Dans le but de préciser l'aspect mathématique du chapitre en question, il faut évidemment faire des hypothèses simplificatrices. En 1925 nous avons étudié l'hypothèse autrefois émise par Marcel Bertrand d'un noyau solide et d'une écorce solide et calculé le mouvement des axes de rotation des deux corps en supposant un frottement sur la surface sphérique de séparation.

Nous avons étudié depuis quelque temps des hypothèses moins simples et nous voudrions résumer ici succinctement ces hypothèses et l'aspect mathématique des équations qui les traduisent.

Le frottement sur les surfaces de séparation entre les couches solides sera pris proportionnel à la vitesse relative des matières en contact mais la stratification pourra être formée:

- 1) d'un nombre fini  $n$  de couches superposées;
- 2) d'une suite infinie de couches d'épaisseurs non nulles;
- 3) d'une infinité de couches, chacune infiniment mince;
- 4) d'une superposition de couches relevant des cas précédents réunis.

Dans ces différents cas, les couches peuvent être supposées sphériques et concentriques, ou planes et indéfinies; les équations du mouvement ne diffèrent que par les valeurs de certains coefficients. Elles ont la même forme algébrique.

Dans le cas 1) le problème relève de l'algèbre. Dans le cas 2) des déterminants infinis et la théorie des formes quadratiques complètement continues, si une certaine série  $S$  converge. 3) se traite par une certaine équation aux dérivées partielles (voir la note ci-dessous de M. Letestu). Enfin pour 4) il y a avantage à introduire une équation intégrale où la sommation est faite au sens de Stieltjes.

Nous donnerons ici un bref aperçu des cas 1) et 2) ainsi que la série  $S$  dont la convergence rend légitime les formules employées. On trouvera, en plus, dans la note de M. Letestu ses intéressantes recherches à partir des équations de Navier des fluides visqueux.

Les équations revêtent pour une suite discrète de couches la forme:

$$\mathcal{J}_i \frac{dp_i}{dt} = \Gamma_{i-1} (p_{i-1} - p_i) + \Gamma_i (p_{i+1} - p_i) \quad i = 1, 2, 3 \dots \left\{ \begin{matrix} n \\ \infty \end{matrix} \right. . \quad (1)$$

Pour les sphères  $\mathcal{J}_i$  est le moment d'inertie de la  $i^{\text{ième}}$  couche, les  $p_i$  sont les projections sur un axe fixe de la rotation instantanée de cette couche, les  $\Gamma_i$  sont des constantes. La méthode classique consiste à poser

$$p_i = \alpha_i(r) e^{r_i t} ,$$

on démontre qu'il existe  $n$  racines réelles de l'équation caractéristique

$$0 = r_1 > r_2 > \dots > r_n .$$

Les solutions sont alors de la forme

$$p = \sum_{q=1}^n C_q \alpha_i(r_q) e^{r_q t} . \quad (2)$$

On a des relations d'orthogonalité

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{J}_i \alpha_i(r_q) \alpha_i(r_{q'}) = \begin{cases} f_q & \text{si } q' = q \\ 0 & \text{si } q' \neq q \end{cases}$$

de sorte que les  $C_q$  sont déterminés à partir des conditions initiales  $p_i^0$

$$f_q C_q = \sum_{i=1}^n \mathcal{J}_i p_i^0 \alpha_i(r_q) . \quad (3)$$

Donnons maintenant quelques indications sommaires sur une condition pour que cette méthode se généralise au cas où  $n$  est infini, cas d'une infinité d'équations et d'une infinité d'inconnues  $p_i$ .

Il y a intérêt à introduire les quantités

$$X_i = \sqrt{K_i} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

et à mettre le système sous une forme matricielle. La convergence de la série suivante représente la condition nécessaire et suffisante dans le cas d'une infinité de couches pour la validité de cette méthode matricielle

$$S = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_{i,\infty}}{\Gamma_{i-1}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}_{i,\infty} = \mathcal{J}_i + \mathcal{J}_{i+1} + \mathcal{J}_{i+2} + \dots$$

C'est aussi une condition suffisante pour qu'une certaine forme quadratique soit « complètement continue » et également la condition nécessaire et suffisante pour qu'un déterminant infini  $|r - a|$  converge.

Si la somme  $S$  existe, il y a une infinité de racines  $r_q$  tendant vers  $-\infty$ , les  $\alpha_i(r_q)$  tendent vers des quantités finies  $\alpha(r_q)$  et la solution est donnée par les formules (2) et (3) sous la seule réserve que les  $p_i^0$  soient bornés. Les séries (2) et (3) pour  $n$  infini sont alors convergentes.

Ces différents résultats seront développés dans un article consacré à la partie mathématique de cette recherche.

Il convient de remarquer que les mouvements relatifs tendent à durer d'autant plus qu'il y aura plus de surfaces de glissement. Une petite étude facile montre même qu'il peut y avoir une certaine indépendance si deux couches sont séparées par une infinité d'autres.

Prenons par exemple des couches parallèles de masse  $m_i = \frac{2}{(i+1)(i-1)}$  et de coefficients de frottement  $R_0 = R_1 = R_2 = \dots = 1$ . La couche supérieure peut être animée d'une vitesse  $V_0 = e^t$  de plus en plus grande, et cependant les vitesses  $V_i$  des autres couches tendent vers zéro, quel que soit  $t$  avec  $\frac{1}{i}$ . La couche limite inférieure ne serait pas entraînée par la couche supérieure.

**Serge Letestu.** — *Sur les mouvements d'un fluide visqueux par sphères concentriques.*

Envisageons un nombre infini de couches sphériques concentriques infiniment minces. C'est un cas-limite du problème traité dans la note précédente par M. Wavre.

Nous appellerons  $r$  le rayon d'une surface de séparation  $\Sigma$ ,  $\Lambda$  le moment résultant des forces de frottement sur  $\Sigma$ . L'axe instantané de rotation  $p$  est fonction de  $r, t$ , et la rotation relative de deux couches est  $\frac{\partial p}{\partial r} dr$ ;  $\Lambda$  est alors une fonction de  $r$  et  $\frac{\partial p}{\partial r}$ ;  $dJ$  est le moment d'inertie d'une couche par rapport à un diamètre; il dépend de  $r$ .

Les équations d'Euler pour les rotations s'écrivent

$$\frac{dJ}{dr} \frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_h}{\partial r} + \frac{\partial \Lambda_h}{\partial \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}. \quad (1)$$