Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 23 (1941)

Artikel: Le groupement additif des relations asymétriques (sériation qualitative) et ses rapports avec le groupement additif des classes

Autor: Piaget, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741178

SUPPLÉMENT AUX ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES
1941

COMPTE RENDU DES SÉANCES

DE LA

SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE

DE GENÈVE

Vol. 58, N° 2. **1941** **Avril-Juillet**

Séance du 1er mai 1941.

Après quelques mots d'introduction, M. le Président donne la parole à **M. Bujard** pour une conférence intitulée « Que savons-nous de la physiologie de la division cellulaire ? ». Le conférencier décrit en détail les différentes phases de la division des cellules dans un type végétal et dans un type animal et passe ensuite en revue, pour chacune de ces phases, nos connaissances actuelles des phénomènes physico-chimiques qui les accompagnent. Cette belle conférence donne une idée précise des nombreux et importants progrès accomplis dans ce domaine au cours des dernières années. M. le Président remercie vivement M. Bujard qui a su intéresser fortement son auditoire aux aspects divers de ces délicats problèmes.

Jean Piaget. — *Le groupement additif des relations asymétriques* (sériation qualitative) *et ses rapports avec le groupement additif des classes.*

Dans une communication précédente [1] nous avons montré l'existence d'un groupement additif des classes. On peut procéder de même en ce qui concerne les relations qualitatives de forme asymétrique, transitive et connexe.

[1] *Le groupement additif des classes.* C. R., séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *58*, 107, 1941.

Hypothèses. — Soit $0 \xrightarrow{a} A$; $A \xrightarrow{a'} A'$; $A' \xrightarrow{b'} B'$; ... une suite de relations asymétriques, transitives et connexes exprimant une série quelconque de différences (par exemple les rapports donnés entre des perceptions de grandeurs, au cas où les termes A, A′, B′ ... sont tous $\gtrless$ les uns par rapport aux autres). Les converses en seront $A \xleftarrow{a} 0$; $A' \xleftarrow{a'} A$; $B' \xleftarrow{b'} A'$ ... Nous écrirons $(0 \xrightarrow{a} A) + (A \xrightarrow{a'} A') = (0 \xrightarrow{b} A')$ en attribuant à cette opération la signification de: « si j'ajoute la différence a', existant entre A et A′, à la différence a, existant entre 0 et A, j'obtiens la différence $b > a$ existant entre 0 et A′ ». Nous conférons un sens à $-(A \xrightarrow{a'} A')$: « je soustrais la différence $\xrightarrow{a'}$ ». Par exemple $(0 \xrightarrow{b} A') - (A \xrightarrow{a'} A') = (0 \xrightarrow{a} A)$. Nous posons en outre que la soustraction d'une différence équivaut à l'addition de la relation converse, soit $-\xrightarrow{a'} = +\xleftarrow{a'}$. Par exemple $(A \xrightarrow{a'b'} B') + (B' \xleftarrow{b'} A') = (A \xrightarrow{a'} A')$. Nous écrivons alors les équations de définitions:

$$(0 \xrightarrow{a} A) + (A \xrightarrow{a'} A') = (0 \xrightarrow{b} A') \;;$$

$$(0 \xrightarrow{b} A') + (A' \xrightarrow{b'} B') = (0 \xrightarrow{c} B') \;;\; \ldots, \text{etc.} \qquad (0)$$

et les identités:

$$(A \xrightarrow{a'} A') = (A \xrightarrow{a'} A') \quad \text{et} \quad (A \xrightarrow{a'} A') - (A \xrightarrow{a'} A') = (A \xrightarrow{0} A) \qquad (0')$$

où $(A \xrightarrow{0} A)$ signifie: « il n'y a pas de différence entre A et A ».

Théorème IV. — Toutes les équations vraies portant sur un système de relations asymétriques emboîtées forment un groupement.

En effet, l'opération directe sera l'addition d'une équation (0) ou (0′) de signe +. L'opération inverse sera la soustraction de la même équation (par exemple $-\xrightarrow{a} - \xrightarrow{a'} = -\xrightarrow{b}$) ou, ce qui revient au même, l'addition de l'équation formée des relations converses (par exemple $\xleftarrow{a} + \xleftarrow{a'} = + \xleftarrow{b}$). L'identique générale sera l'équation $\xrightarrow{0} + \xrightarrow{0} = \xrightarrow{0}$, c'est-à-dire l'addition (ou la soustraction) des relations de différence nulle. Les identiques spéciales sont constituées par la tautologie $\xrightarrow{a} + \xrightarrow{a} = \xrightarrow{a}$ et la résorption $\xrightarrow{a} + \xrightarrow{b} = \xrightarrow{b}$. Enfin toute suite homogène (= formée uniquement d'équations 0 et 0′) est « immédiatement » associative et les suites hétérogènes (= contenant au moins une équation tautologique) de façon « médiate ».

Les règles de calcul sont les mêmes que pour l'addition des classes (théor. I et II, *loc. cit.*).

Définitions. — Nous appellerons « série qualitative » toute série de relations groupée selon le mode précédent et « classification qualitative simple » tout système de classes groupées sur le mode $A + A' = B$; $B + B' = C$; etc... Une classification « complète » sera celle dont chaque classe secondaire A' B' C' ... contient une classification simple poussée jusqu'au terme d'ordre correspondant (la classe A' peut contenir des sous-classes d'ordre A; la classe B' des sous-classes d'ordre A et B; C' des sous-classes d'ordre A, B et C, etc.) [1]. Nous appellerons, d'autre part, « substitution partielle » une substitution déterminée entre les termes A, A', B', C',... dans une série ou une classification simple, et « substitution généralisée » l'opération consistant à remplacer par A n'importe quelle classe secondaire A' B' C' ... d'une classification simple ou par $\xrightarrow{a} A$ n'importe quelle relation $\xrightarrow{a'} A'$; $\xrightarrow{b'} B'$; $\xrightarrow{c'} C'$; ... d'une série qualitative. Enfin, nous dirons que deux classifications ou deux séries qualitatives sont différentes si les termes (ou les relations) primaires A, B, C,... (ou $\xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{b}$; $\xrightarrow{c}$; ...) qui les composent ne sont pas inconditionnellement substituables à égalité d'ordre.

Théorème V. — Toute substitution partielle entre les classes d'une classification qualitative simple transforme celle-ci en une autre classification qualitative simple; et toute substitution

[1] Par exemple dans une classification zoologique où A = une espèce, B = un genre, C = une famille, etc. (A' = les espèces autres que A, mais du même genre B; B' = les genres autres que B, mais de la même famille C; etc.)

partielle entre les termes d'une série qualitative transforme celle-ci en une autre série de même forme mais qualitativement différente.

En effet, il va de soi que dans une classification simple $A_1 + A'_1 = B_1$; $B_1 + B'_1 = C_1$; ... si l'on permute par exemple A_1 et B'_1, on peut toujours construire une classe A_2 formée de B'_1 et une classe B'_2 formée de A_1, mais alors les classes A_2 et A_1; B_2 ($= A_2 + A'_1$) et B_1 ($= A_1 + A'_1$) ne seront plus identiques, pas plus que les classes C_2 ($= B_2 + B'_2$) et C_1 ($B_1 + B'_1$). La classification change donc de signification qualitative, mais ce sera à nouveau une classification simple.

D'autre part, si l'on permute deux ou plusieurs termes d'une série qualitative (par exemple $X \xrightarrow{a'} Y$ permutés en $Y \xrightarrow{a'} X$), il est évident qu'on détruit la série initiale. Mais on peut toujours concevoir une autre série de relations qualitatives qui conserve le nouvel ordre, ne fût-ce que celle constituée par l'« ordre de désignation ». Seulement, même à s'en tenir à celle-ci, l'ordre $Y \xrightarrow{a'} X$ caractérise une série qualitativement différente de l'ordre $X \xrightarrow{a'} Y$.

Définitions de l'équivalence qualitative et de l'identité logique. — Si l'on a $A + A' = B$, alors on a $A + B = B$ et $A' + B = B$, c'est-à-dire que les classes A et A' sont « co-incluses » en B. D'autre part, si nous appelons A_1 une classe A et A'_1 la classe $A_1 = B - A_1$, nous pouvons transformer en A_2 cette classe A'_1 (ou une partie de A'_1) et en A'_2 la classe A_1 (ou $B - A_2$): nous dénommerons « substitution complémentaire » ou « vicariance » la transformation $A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2$ qui laisse invariante la classe B. Nous dirons alors que A et A' sont équivalents en B, si A et A' sont simultanément co-inclus en B et vicariants. Nous écrirons cette *équivalence qualitative* $A \overset{B}{=} A'$. On a de même $B \overset{C}{=} C$; $C \overset{D}{=} C'$; etc.

L'identité logique est alors l'équivalence par rapport à soi-même, soit $A \overset{A}{=} A$.

Les relations $\xrightarrow{a}$ et $\xrightarrow{a'}$ d'une série qualitative ne sont pas équivalentes, car, si elles sont co-incluses en $\xrightarrow{b}$, elles ne sont pas vicariantes. Le groupement des relations asymétriques consiste donc à sérier des « différences » (bien que le signe = de l'équation $\xrightarrow{a} + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b}$ marque l'identité) et celui des classes à réunir des termes « équivalents » (bien que les classes primaires A, B, C, D,... ne soient pas équivalentes entre elles). D'où le:

Théorème VI. — On ne peut pas réunir en un même groupement le groupement additif des classes et celui des relations asymétriques transitives, quoique à chaque classification qualitative simple corresponde une série qualitative des classes primaires A, B, C ... et une série qualitative formée de la classe primaire initiale et des classes secondaires, soit A, A′, B′, C′,...; et quoique à chaque série qualitative corresponde une classification simple qui conserve cette sériation.

En effet, les classes primaires A, B, C,... étant incluses chacune en la suivante, et la relation d'inclusion étant elle-même asymétrique et transitive, leur suite constitue toujours une série qualitative. Quant aux classes secondaires, A′ étant incluse en B, B′ en C, etc., les classes A, A′, B′, C′,... constituent également une série déterminée par la suite des classes primaires.

D'autre part, lorsqu'une suite quelconque de termes α; α'; β; β'; etc. soutiennent entre eux les relations d'une série également quelconque, il est toujours possible de construire une classe A formée du terme α, une classe A′ formée de α', une classe B formée de $\alpha + \alpha'$; une classe B′ formée de β'; une classe C formée de $\alpha + \alpha' + \beta'$ ..., etc.

On peut donc établir une correspondance bi-univoque entre n'importe quelle opération du groupement des relations et une opération du groupement des classes, et réciproquement. On peut par conséquent déterminer les transformations possibles d'un système de classes au moyen des relations d'ordre de la série des classes élémentaires A, A′, B′, ... ou déterminer les relations d'une série d'après les emboîtements des classes initiales formées des termes de ces relations.

Néanmoins, il ne s'agit là que d'une correspondance qualitative entre les opérations des deux groupements et non pas de leur fusion en un seul groupement. En effet: 1° Les classes A et A′ sont équivalentes en tant que B parce que vicariantes, tandis que les relations $\xrightarrow{a}$ et $\xrightarrow{a'}$ ne le sont pas en $\xrightarrow{b}$, puisque changer leur ordre revient à changer $\xrightarrow{b}$. 2° Si les classes A′ B′ C′ ... ne sont pas singulières, on peut les subdiviser en sous-classes et transformer ainsi la classification « simple » en classification « complète ». Au contraire la subdivision d'une relation $\xrightarrow{a'}$; $\xrightarrow{b'}$; $\xrightarrow{c'}$; etc. ne donne pas de relations d'ordre $\xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{b}$; etc. Un système de classes est donc une hiérarchie comportant autant de classifications simples possibles qu'il y a d'éléments dans les classes secondaires du groupement principal, tandis qu'une série de relations asymétriques peut être subdivisée en autant de segments qu'on le voudra, sans cesser de constituer la même série. 3° D'autre part, les qualités qui définissent les classes d'une classification simple ne sont pas toutes sériables, c'est-à-dire que les différences a et a' ne donnent pas nécessairement $a + a' = b > a$, et les sériations possibles de ces classes n'expriment qu'une partie de leur définition. L'opération $A + A' = B$ ne laisse donc pas réduire à l'opération $\xrightarrow{a} + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b}$, ni l'inverse, et ces deux opérations caractérisent ainsi deux groupements distincts dont le premier porte sur la réunion des termes eux-mêmes, considérés dans leurs équivalences, et dont le second porte sur la réunion des différences données entre les termes, asbtraction faite de leurs équivalences.

Jean Piaget. — *Sur les rapports entre les groupements additifs des classes et des relations asymétriques et le groupe additif des nombres entiers.*

Le théorème III exposé dans notre communication du 20 mars 1941 [1] et les théorèmes IV, V et VI contenus dans la communication précédente permettent de dégager les relations entre les groupements logiques et le groupe additif des nombres entiers.

[1] Jean Piaget, *Le groupement additif des classes.* C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *58*, 109, 1941.