Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 22 (1940)

Artikel: Sur la construction de courbes tangentielles sans point
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741715

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUPPLÉMENT AUX ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES
1940

COMPTE RENDU DES SÉANCES

DE LA

SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE

DE GENÈVE

Vol. 57, N° 4. 1940 Août-Décembre

Séance du 7 novembre 1940.

Paul Rossier. — *Sur la construction de courbes tangentielles sans point.*

1. — L'existence des fonctions continues sans dérivée conduit à la notion de courbes sans tangente. Les premiers exemples connus de telles fonctions ont été construits de façon exclusivement analytique. Plus récemment, von Koch [1] a donné une construction de géométrie élémentaire qui, répétée indéfiniment, conduit à la conception d'une courbe ponctuelle sans tangente. Rappelons-la sommairement. Un segment dirigé AB est partagé en trois parties égales, AC, CD, DB; d'un côté déterminé du segment donné, on construit, sur le tiers médian CD, un triangle équilatéral CDE; on supprime le tiers médian CD et on considère la ligne brisée dirigée ACEDB. Répétons la même construction sur chacun des quatre segments la composant, et ainsi de suite indéfiniment. Le lieu des sommets de la ligne brisée est continu, car dans tout voisinage de l'un de ces sommets, on en peut trouver d'autres.

Une sécante passant par deux des sommets ne tend vers aucune limite déterminée lorsque ces deux sommets tendent

[1] Cf. G. LORIA, *Ebene Kurven*, II, p. 177.

l'un vers l'autre. La courbe de von Koch ne possède donc pas de tangente; tous ses points sont singuliers.

2. — Nous nous proposons d'étudier le problème corrélatif suivant: trouver une variété continue de droites telle que l'intersection de deux d'entre elles ne tende pas vers une limite déterminée lorsque les deux droites considérées tendent elles-mêmes vers une limite commune. Plus brièvement, le problème est celui de trouver une construction simple d'une courbe définie tangentiellement et ne comportant aucun point.

On ne peut songer à transformer simplement par dualité la construction de von Koch, car cela reviendrait à construire un triangle équiangle d'angle donné, ce qui est impossible.

3. — En géométrie sphérique, la construction de von Koch peut être étendue sans difficulté, relativement à un segment de grand cercle. La figure obtenue présente une différence avec celle du plan: les triangles équilatéraux successifs n'ont pas leurs angles égaux; ils tendent vers $\pi/3$ à mesure que leurs côtés diminuent de longueur. La courbe obtenue ne possède pas de grand cercle tangent.

Construisons le grand cercle polaire de chacun des points de la courbe. On engendre ainsi une variété continue de grands cercles dont les intersections ne tendent vers aucune limite lorsque leur angle décroît au delà de toute limite.

On peut encore exprimer une solution sphérique du problème par la considération de triangles équiangles, dont l'angle est le tiers d'un angle donné. Une condition nécessaire est que l'angle considéré soit supérieur à π. Cela est toujours possible, à condition de ne pas se contenter de la conception élémentaire de triangle sphérique, mais bien d'envisager celle de triangle sphérique général.

4. — On peut remplacer les constructions précédentes effectuées en géométrie sphérique par des opérations planes, par exemple en projetant stéréographiquement la sphère sur un plan: les angles sont conservés, la construction subsiste.

Cet artifice conduit à faire jouer à des cercles le rôle des droites; du point de vue de la géométrie élémentaire, on

obtient ainsi la solution d'un cas particulier du problème suivant: engendrer tangentiellement par des cercles, une courbe ne possédant aucun point.

5. — Pour construire dans le plan un lieu tangentiel de droites ordinaires, on peut recourir à la géométrie cayleyenne.

Dans cette géométrie, une conique, dite «absolu», joue un rôle essentiel dans la définition des longueurs et des angles. On appelle longueur d'un segment AB le produit, par une constante, du logarithme du rapport anharmonique des deux points A, B et des deux intersections de la droite AB et de l'absolu. De même, l'angle de deux droites est le produit par une constante du logarithme du rapport anharmonique des deux côtés de l'angle et des deux tangentes à l'absolu issues du sommet de l'angle.

A tout problème métrique de la géométrie cayleyenne relatif à des points, correspond un problème métrique corrélatif, relatif à des droites; les solutions en sont dualistiquement identiques. Comme en géométrie euclidienne, la construction de von Koch relative à un segment donne une courbe ponctuelle sans point. La construction corrélative donne le même résultat. D'ailleurs, à cause de l'identité des définitions des longueurs et des angles, on passe de l'un des lieux à l'autre par une corrélation relative à l'absolu. L'inexistence des tangentes à l'un entraîne l'inexistence des points de l'autre.

6. — La géométrie cayleyenne contient la géométrie euclidienne comme cas particulier: il suffit de supposer que l'absolu est une courbe de deuxième classe dégénérée en deux points, les points cycliques. Cette dégénérescence dualistiquement asymétrique fait disparaître la symétrie des métriques linéaire et angulaire. On peut, dans le plan euclidien, transformer la courbe ponctuelle de von Koch par une corrélation, en une courbe tangentielle sans point, mais la définition de la construction ne peut être donnée simplement en géométrie tangentielle. L'avantage d'avoir recours à la géométrie non euclidienne est précisément de permettre un énoncé immédiat en géométrie tangentielle.

7. — L'existence de variétés continues de droites ne possédant aucun point montre que les termes tels que « géométrie tangentielle », « courbe considérée comme lieu de ses tangentes », doivent être définis avec soin. L'emploi du mot tangente fait immanquablement songer à la notion de contact, donc à la dérivabilité. La terminologie de la géométrie des droites peut facilement conduire à des difficultés analogues à celles qu'a pu créer, il y a un siècle, l'opinion erronée, quoique très répandue, de la dérivabilité de toutes les fonctions continues.

Théodore Posternak et Hans Pollaczek, — *Dégradation enzymatique d'un peptide et d'un polyose phosphorylés.*

Au cours de la dégradation enzymatique de protéines et de polysaccharides contenant des groupes phosphoryles (phosphoprotéines, amidon de pomme de terre), on observe la formation de produits phosphorés de poids moléculaire parfois assez élevé (phosphopeptones et phosphopolyoses); ces produits sont remarquables par leur résistance à une action ultérieure des ferments.

Cette résistance à l'action des hydrolases peut être due: 1° à la présence des groupes phosphoryles, 2° à la nature et au mode de liaison des acides aminés ou des sucres qui entrent dans la composition de ces peptones ou de ces polyoses.

Dans le premier cas, le départ des groupes phosphoryles, sous l'action par exemple d'une phosphatase, devrait permettre une dégradation enzymatique normale.

Pour trancher la question, nous avons commencé par étudier l'action des ferments sur des substances phosphorylées de constitution simple. Comme modèle pour l'étude des peptidases, nous avons employé l'*acide dipeptide-phosphorique* de Levene et Hill [1], c'est-à-dire le composé formé de phosphosérine et d'acide glutamique qui s'obtient par hydrolyse acide ménagée de la phospho-peptone de la caséine. Pour établir l'ordre de liaison des deux acides aminés qui était encore inconnu, nous

[1] J. Biol. Chem., *101*, 711, 1933.