Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 22 (1940)

Artikel: Sur la diffraction par un corps noir quelconque de la lumière provenant d'une source punciforme et équirayonnante : intégrale complète portée aux quadratures

Autor: Barreca, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741668

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la diffraction par un corps noir quelconque de la lumière provenant d'une source punctiforme et équirayonnante.

Intégrale complète portée aux quadratures.

PAR

P. BARRECA

Privat-docent à l'Université de Messine (Italie).

---

1. — *Résumé.* — Dans le présent travail on obtient l'intégrale complète de l'équation indéfinie de l'optique pour le cas exposé dans le titre et on indique brièvement la façon d'en déduire, peut-être et dans des cas particuliers simples, l'intégrale générale lorsqu'on aura pu exécuter la quadrature. Nous appelons complètes (suivant J.-L. Lagrange) les intégrales générales lorsque leurs fonctions arbitraires dégénèrent en constantes (arbitraires). La surface du corps est supposée avoir une équation unique. Le problème considéré n'avait pas été encore résolu.

2. — La solution de l'équation indéfinie optique:

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} V \qquad (1)$$

est bien connue [1]. Pour la lumière monochromatique, agissant

[1] E. T. Whittaker, On the partial differential equations of mathematical Physics. *Math. Ann.*, t. 57, p. 342, 1903.

avec une intensité constante depuis un temps infini, et pour une source punctiforme, elle est:

$$V = \int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm \frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(x-m)\cos\theta_0 + (y-n)\sin\theta_0\cos\varphi_0 + (z-p)\sin\theta_0\sin\varphi_0\right\}} Y(\theta_0, \varphi_0, \ldots)\, d\varphi_0 \quad . \quad (2)$$

Les x, y, z sont les coordonnées cartésiennes des points de l'espace et m, n, p celles de la source. Lorsque la solution est ainsi écrite, une translation parallèle des axes n'a évidemment pas d'effet. Y est une fonction arbitraire, en général complexe, λ la longueur d'onde, θ_0 et φ_0 sont deux variables auxiliaires, lesquelles disparaissent lorsque la quadrature est accomplie. Pour l'usage du double signe, on peut supposer notre corps-obstacle écarté, et envisager un point éloigné de la source, tous deux sur l'axe des x ($y = 0$, $z = 0$, $n = 0$, $p = 0$). Lorsque la lumière se propage selon les x croissants, le signe doit être négatif.

3. — Songeons à Y dans l'intégrale complète. Dans le deuxième de nos mémoires cités ici [1], nous avons démontré, d'une manière générale, qu'il y a trois régions de l'espace: 1° la région des seules ondes sphériques, 2° la région comprise entre l'onde qui touche l'obstacle pour la première fois et celle qui va quitter l'obstacle, 3° la région au delà de ce dernier contact. Dans la première, Y ne présente pas d'intérêt, car son V est bien connu. Dans la deuxième, *et pour l'intégrale complète*, Y varie à chaque surface d'onde qu'on change, car si on supprime la partie du corps qui n'est pas encore entrée en contact avec une onde donnée parmi toutes ces ondes, et si on remplace la partie supprimée, cela ne portera effet que sur la partie suivante de l'espace. Il faut donc, dans l'intégrale complète, avoir des constantes arbitraires qui varient de chaque surface d'onde à la suivante et caractérisent les Y de chaque

[1] P. Barreca, Sur la diffraction par un corps de révolution éclairé selon son axe par une source lumineuse punctiforme. *Archives des Sciences physiques et naturelles*, 1936, page 88.
Idem, même titre, deuxième mémoire, 1937, p. 237; *ibidem*.

surface d'onde. Mais cela ne s'applique pas à l'intégrale générale, car là les constantes arbitraires sont remplacées par des fonctions arbitraires, lesquelles changent aussi de chaque surface d'onde à la suivante, mais automatiquement, c'est-à-dire qu'on peut les envisager comme étant uniques.

Dans la troisième région, Y est partout le dernier Y de la deuxième région.

4. — Chercher Y de la deuxième région, c'est donc amener l'équation (2) à la quadrature. Le problème a déjà été résolu par nous pour un cas particulier (mémoires cités), qui est un cas à deux dimensions où on envisage un corps noir de révolution éclairé selon son axe qui est supposé aussi être l'axe des x. Dans l'intégrale complète, on voit deux constantes arbitraires, qui sont deux (x_s, y_s) des trois coordonnées x_s, y_s, z_s d'un point de la trace de l'onde [1]. Nous pouvons appeler ce point *le point conjugué* $(\mathrm{x}_s, \mathrm{y}_s, \mathrm{z}_s)$ *de la surface d'onde ou du point donné* (x, y, z). Mais si on fait usage de l'équation de la ligne méridienne du corps (c'est une donnée du problème qui change d'un cas à l'autre), lesdites constantes arbitraires deviennent une seule.

Dans ce cas particulier et symétrique, ce point conjugué était indifféremment un point quelconque de sa trace d'onde (qui était plane et circulaire). Dans la solution rappelée, il existe aussi d'autres paramètres, c'est-à-dire les coordonnées du point (ou des points) de contact de la dernière onde encore sphérique avec le corps et les rayons vecteurs de la source à certains anneaux parfaitement obscurs (réels ou imaginaires) sur la surface du corps [2], mais ces paramètres changent seulement si on modifie le corps ou sa position, et ils ne changent pas avec la surface d'onde qui passe en (x, y, z). Voilà pourquoi, dans un passage à l'intégrale générale, ils ne deviendront pas des fonctions de x, y, z. Un point conjugué était aussi conjugué à lui-même.

Essayons maintenant de voir s'il y a avantage, ici aussi,

[1] Intersection de la surface d'onde avec la surface de l'obstacle.
[2] Ils étaient donnés par certaines équations.

à envisager un point conjugué (du point donné) placé sur sa trace d'onde, c'est-à-dire si un tel point existe et si ses coordonnées x_c, y_c, z_c sont des paramètres de l'intégrale complète, utilisables pour toute sa surface d'onde, selon le § 3. En cas de réussite, il se peut qu'il y aura également d'autres paramètres ne changeant pas avec la surface d'onde.

5. — Remarquons tout de suite qu'un tel point, s'il existe, doit produire la valeur exacte (1) de $\Delta_2 V$, soit qu'on considère ses coordonnées x_c, y_c, z_c comme de véritables constantes, soit qu'on les considère comme des fonctions inconnues de x, y, z. En outre, cela nous autorisera à en faire usage comme paramètres. Nous démontrerons ici encore que s'il existe, de tels paramètres confèrent une valeur extrême (maximum ou minimum) au mod. V. Appelons A l'intégrale complète et Φ celle générale. Si le point conjugué existe, on a:

$$\begin{aligned} V &= A\{x, y, z;\ x_c = \text{const},\ y_c = \text{const},\ z_c = \text{const}\} = \\ &= \Phi\{x, y, z;\ x_c(x, y, z),\ y_c(x, y, z),\ z_c(x, y, z)\} \end{aligned} \tag{3}$$

en désignant par A et Φ des valeurs numériques égales, ainsi que des opérations identiques, effectuées sur les arguments. On obtient $\Delta_2 V$ de chacune séparément en calculant d'abord les dérivées premières, ensuite les deuxièmes et en faisant l'addition des deuxièmes. Or si x_c, y_c, z_c obéissent aux équations:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\frac{\partial x_c}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial z_c}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\frac{\partial x_c}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial z_c}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\frac{\partial x_c}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial z_c}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

les dérivées premières de V exprimé par Φ, par rapport à x, y, z, sont les mêmes dérivées de A. Désignons ces dérivées, qu'on obtient sans faire usage des règles des fonctions de

fonction, par:

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right) \tag{5}$$

en faisant usage de doubles crochets.

Pour avoir les dérivées deuxièmes, il faut dériver la première (5) totalement par rapport à x, la deuxième totalement par rapport à y, la troisième par rapport à z. Nous aurons en premier lieu les mêmes dérivées deuxièmes qu'on obtiendrait en laissant x_c, y_c, z_c constants:

$$\left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)\right). \tag{6}$$

Ensuite, il faudra exécuter sur les (5) les mêmes opérations qui, dans les équations (4), sont exécutées sur Φ. Remplaçons donc dans les premiers membres des (4), Φ par les grandeurs (5), ligne à ligne. On obtient:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial x_c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial y_c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial z_c}{\partial x}\\
&\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial x_c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial y_c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial z_c}{\partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial x_c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial y_c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z_c}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial z_c}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Mais ce ne sont que les dérivées par rapport à x, y, z, des membres premiers des équations (4), lesquels sont zéro. Nous avons donc seulement les (6), c'est-à-dire la valeur de $\Delta_2 V$ est identique pour A et pour Φ. On voit aisément que c'est aussi la valeur donnée par (1). *Il existe pour chaque trace d'onde des points conjugués (au moins un, jusqu'à présent)*, car en général les équations (4) doivent avoir des racines.

Remarque. — Lorsqu'on passe d'une surface d'onde à celle infiniment proche, un point conjugué doit se déplacer infiniment peu, donc il y a sur l'obstacle des *lignes de points conjugués.* Le point (ou les points) de premier contact des ondes et le point (ou les points) de dernier contact, doivent aussi être des points

conjugués de leurs surfaces d'onde et d'eux-mêmes. Ils constituent donc les points extrêmes de ces lignes.

Nous ferons usage de l'index c pour les points conjugués, et de l'index S pour des points quelconques de la surface S de l'obstacle. Lorsque cette surface est de révolution et éclairée selon son axe, et lorsqu'on suppose cet axe être un des axes cartésiens, tous ses points sont conjugués.

6. — Il est aisé de voir par les équations (4) que x_c, y_c, z_c font devenir extrémal mod A = mod Φ = mod V. En effet, lorsque nous aurons l'intégrale complète A, avant d'en faire usage il nous faudra choisir un cas particulier, c'est-à dire une équation de la surface de l'obstacle, par exemple:

$$z_s = Z(x_s, y_s) \ , \qquad \text{ou:} \qquad z_c = Z(x_c, y_c) \ , \tag{7}$$

et ensuite faire disparaître en A une des coordonnées paramétriques x_c, y_c, z_c, par exemple z_c. Nous avons donc les trois équations (4) et l'équation (7) pour en déduire trois inconnues seulement, mais nous allons voir tout de suite qu'il n'y aura pas contradiction. En effet, lorsqu'on décompose le troisième terme des équations (4), on en tire:

$$\frac{\partial x_c}{\partial x}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial x_c}\right\} + \frac{\partial y_c}{\partial x}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial y_c}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial x_c}{\partial y}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial x_c}\right\} + \frac{\partial y_c}{\partial y}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial y_c}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial x_c}{\partial z}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial x_c}\right\} + \frac{\partial y_c}{\partial z}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial y_c}\right\} = 0 \ .$$

Ici encore, nous avons fait usage de doubles crochets pour distinguer les dérivées directes, ou immédiates, des autres. Il est donc suffisant qu'on ait seulement:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial x_c} = 0 \\ &\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_c}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_c}\frac{\partial Z}{\partial y_c} = 0 \ . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Or, ces équations, lorsqu'elles sont résolues par rapport à x_c et y_c font devenir extrémal Φ, car les nombres complexes (8) étant zéro, leurs modules sont zéro, après quoi ces mêmes dérivées (8) de Φ ne font plus changer Φ lorsqu'on augmente x_c et y_c infiniment peu (sans toucher à x, y, z).

Remarque I. — Dans le cas des corps de révolution éclairés selon leurs axes qui sont aussi les axes des Ox, on a seulement deux coordonnées: x, y, x_c, y_c. Les traces d'onde sont planes et circulaires. Dans une trace d'onde donnée, tous les y_c sont égaux ainsi que les x_c, et la valeur extrémale de Φ est par cela remplacée par une valeur unique tout le long de la trace, qui est à la fois une valeur maximum et minimum.

Remarque II. — Pour tirer de l'intégrale complète l'intégrale générale, il suffira de remplacer les paramètres z_c, x_c, y_c, par leurs valeurs tirées des équations (7) et (8), sous réserve des difficultés d'exécution.

Remarque III. — Il y a, le long de la trace d'onde, autant de points avec Φ maximum que de points avec Φ minimum. Pour cette raison, si la résolution des équations (8) ne fournit pas une formule unique donnant tous les x_c (ou les y_c), on aura éventuellement plusieurs solutions.

Remarque IV. — Dans les équations (8), on peut remplacer Φ par A, voir équation (3). On a alors deux équations dont on peut tirer, pour chaque point donné (x, y, z) de l'espace, les deux coordonnées x_c, y_c, caractérisant son point conjugué qui est placé sur la surface-obstacle. La troisième, z_c, peut être calculée au moyen de l'équation de cette surface.

Mais on peut aussi en tirer *les deux équations de toute ligne conjuguée*, c'est-à-dire sans les x, y, z (ni point donné). A cet effet, laissons de côté l'équation de la surface du corps, déjà utilisée ici, et souvenons-nous de ce qu'un point conjugué d'une surface d'onde est aussi conjugué à lui-même (§ 5), c'est-à-dire que, dans les équations (8), *après avoir accompli ses dérivations*, on peut poser le cas particulier suivant:

$$x = x_c \,, \qquad y = y_c \,, \qquad z = z_c \,.$$

Les deux équations nécessaires et suffisantes de la ligne, qu'on en tire, sont donc:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\left(\frac{\partial A}{\partial x_c}\right)\right)_{\substack{x=x_c\\y=y_c\\z=z_c}} + \frac{\partial Z}{\partial x_c}\left(\frac{\partial A}{\partial z_c}\right)_{\substack{x=x_c\\y=y_c\\z=z_c}} = 0 \\ &\left(\left(\frac{\partial A}{\partial y_c}\right)\right)_{\substack{x=x_c\\y=y_c\\z=z_c}} + \frac{\partial Z}{\partial y_c}\left(\frac{\partial A}{\partial z_c}\right)_{\substack{x=x_c\\y=y_c\\z=z_c}} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (8\,bis)$$

sans plus de x, y, z.

Détermination de Y pour l'intégrale complète.

7. — Expliquons d'abord par quel moyen restrictif nous allons déterminer Y. La formule (2) est par trop générale (voir aussi le § 3 de notre premier mémoire cité), car elle donne bien la valeur juste de $\Delta_2 V$, mais elle fait usage d'une fonction arbitraire Y, qui est absolument *quelconque*, pourvu qu'il en résulte dans (2) une intégrale ayant une valeur unique et déterminable. Le résultat de ladite formule ne dépend justement pas de θ_0 et φ_0, qui ne sont pas des données du problème physique, mais cette indépendance est due aux deux intégrations définies avec limites fixes, et pour cette raison c'est la somme des infinis infiniment petits qui est indépendante, et non pas ces derniers. Mais, au point de vue physique, il faudrait que l'expression même à intégrer le fût. Mais en supposant qu'on obtienne cela, alors l'intégration par rapport à θ_0 et φ_0 devient inutile, de même que la formule de M. Whittaker.

Dans le présent mémoire, aussi bien que dans le deuxième cité, nous suivons pour ainsi dire une route intermédiaire, c'est-à-dire que nous ferons usage de cette formule avantageuse, mais nous affranchirons de θ_0 et de φ_0 l'expression à intégrer, en tous les points d'une ligne. Pour faire cela, nous envisagerons une surface qui caractérise chaque cas particulier, laquelle est donnée aussi, c'est-à-dire la surface S de l'obstacle, et sur cette surface nous songerons *à une ligne conjuguée*. Cela fera appa-

raître x_c, y_c, z_c dans les formules. Aux autres points de l'espace, V est aussi indépendant de θ_0 et φ_0, mais seulement par l'effet des intégrations définies. Pour le cas déjà rappelé (corps de révolution, etc., mémoire cité), nous avons jadis affranchi l'expression à intégrer sur toute la surface S, mais cela est tout à fait analogue, car tout point de S y était un point conjugué (§ 5).

8. — Développons. Laissons Y inconnu dans l'équation (2). Prenons des coordonnées géographiques: colatitude θ_c des points conjugués (avec origine sur l'axe positif des x), longitude φ_c (avec le plan xoy en premier méridien), rayon vecteur ρ_c du pôle (placé dans la source). Employons cette équation (2) pour des points conjugués quelconques, dont on tirera aussi des paramètres de Y (§ 5, leurs coordonnées), car un point conjugué (de toute la surface d'onde) est aussi conjugué à lui-même. Partageons Y en deux parties, une qui ne donne que des ondes sphériques (pour lesquelles nous appellerons O la valeur de V) et une autre F. On obtient:

$$V_c - O_c = \int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_c}{\lambda}\left\{\cos\theta_c \cos\theta_0 + \sin\theta_c \cos\varphi_c \sin\theta_0 \cos\varphi_0 + \sin\theta_c \sin\varphi_c \sin\theta_0 \sin\varphi_0\right\}} F\left(\theta_0, \varphi_0, \theta_c, \varphi_c, \frac{\rho_c}{\lambda}\right) d\varphi_0 \tag{9}$$

car il est:

$$x_c = \rho_c \cos\theta_c\,, \qquad y_c = \rho_c \sin\theta_c \cos\varphi_c\,, \qquad z_c = \rho_c \sin\theta_c \sin\varphi_c\,.$$

Démontrons tout de suite que l'affranchissement, de θ_0 et de φ_0, de la fonction à intégrer ne peut être obtenu qu'en posant:

$$\left\{\begin{aligned} F &= Qe^{iR}\left(\theta_c, \varphi_c, \frac{\rho_c}{\lambda}\right) \times G \\ G &= e^{\mp 2\pi i \frac{\rho_c}{\lambda}\left\{\cos\theta_c \cos\theta_0 + \sin\theta_c \cos\varphi_c \sin\theta_0 \cos\varphi_0 + \sin\theta_c \sin\varphi_c \sin\theta_0 \sin\varphi_0\right\}}\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Nous appelons Qe^{iR} une fonction, qu'on doit encore déterminer, des seules variables θ_c, φ_c, $\frac{\rho_c}{\lambda}$, qui sont les coordonnées

du point conjugué. En effet, cette position simplifie l'intégrale et donne tout de suite:

$$V_c - O_c = 2\pi^2 Q e^{iR} , \qquad (10\,bis)$$

car maintenant la fonction à intégrer ne dépend pas de θ_0 et de φ_0, pour des valeurs quelconques des variables indépendantes θ_c, φ_c, ρ_c, λ, θ_0, φ_0.

On ne peut se débarrasser de θ_0 et de φ_0 par d'autres moyens, car l'équation (9) étant vraie indépendamment des hypothèses qu'on peut faire sur F, et F étant dans l'équation (9) la seule grandeur qui ne soit pas explicite et connue, on ne peut extraire que de F un diviseur efficient.

En outre, si on compare ce cas avec le cas particulier du corps de révolution éclairé selon son axe qu'on choisit aussi comme axe Ox, on voit que la solution est analogue (deuxième mémoire, page 256). En effet, la partie en dehors des signes d'intégration est, dans cette formule, une fonction seulement de θ_s, $\frac{\rho_s}{\lambda}$, car il n'y avait que deux dimensions, et (§ 5) tout point de S y était un point conjugué. L'intégrale, au lieu de devenir comme ici:

$$\int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm\frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(x-x_c)\cos\theta_0+(y-y_c)\sin\theta_0\cos\varphi_0+(z-z_c)\sin\theta_0\sin\varphi_0\right\}} d\varphi_0$$

y était:

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{bes}_0\left(2\pi\frac{y}{\lambda}\sin\theta_0\right)}{\mathrm{bes}_0\left(2\pi\frac{y_s}{\lambda}\sin\theta_0\right)} e^{\pm 2\pi i\frac{x-x_s}{\lambda}\cos\theta_0} d\theta_0$$

ce qui est aussi l'intégrale du quotient de deux fonctions qui seraient égales, s'il n'y avait l'index S. Nous avons écrit bes_0 pour fonction de Bessel d'ordre zéro.

9. — Avec ces opérations, le problème n'est pas encore résolu. Il faut encore déterminer Qe^{iR}. A cet effet, nous voulons

ignorer volontairement le facteur G des positions (10) et le supposer encore inconnu (cela est légitime) afin de n'avoir pas l'élimination de l'exponentielle dans l'équation (9), et pouvoir ainsi la traiter par des procédés plus généraux. Nous écrivons donc l'équation (9):

$$V_c - O_c = Qe^{iR} \int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_c}{\lambda}\left\{\cos\theta_c \cos\theta_0 + \sin\theta_c \cos\varphi_c \sin\theta_0 \cos\varphi_0 + \sin\theta_c \sin\varphi_c \sin\theta_0 \sin\varphi_0\right\}} G\left(\theta_0, \varphi_0, \theta_c, \varphi_c, \frac{\rho_c}{\lambda}\right) d\varphi_0 \ . \tag{11}$$

Nous prendrons ici des deux membres de cette équation les dérivées:

$$\frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c \, \partial \varphi_c} \qquad \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \varphi_c \, \partial \eta_c} \qquad \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \eta_c \, \partial \theta_c}$$

en appelant:

$$\eta_c = \text{arc tang} \frac{\rho_c}{\lambda}$$

et nous en tirerons Qe^{iR}.

10. — *Evaluation de* $\dfrac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c \, \partial \varphi_c}$.

Posons quatre variables nouvelles:

$$\alpha = \theta_c + \theta_0 \ , \quad \beta = \theta_c - \theta_0 \ , \quad \psi = \varphi_c + \varphi_0 \ , \quad \tau = \varphi_c - \varphi_0 \ . \tag{12}$$

Comme les degrés de liberté doivent être les mêmes qu'auparavant, choisissons-en deux, par exemple les 1re et 3me (ou 2me et 4me) comme variables automatiques d'intégration. Les deux autres, au contraire, auront des valeurs fixes arbitraires. On tire:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \theta_0 = \dfrac{\alpha - \beta}{2} \ , & \text{c'est-à-dire: soit } d\theta_0 = \dfrac{d\alpha}{2} \ , & \text{soit } d\theta_0 = -\dfrac{d\beta}{2} \\ \varphi_0 = \dfrac{\psi - \tau}{2} \ , & \quad \text{»} \quad : \text{soit } d\varphi_0 = \dfrac{d\psi}{2} \ , & \text{soit } d\varphi_0 = -\dfrac{d\tau}{2} \end{array} \right. \tag{13}$$

et les limites des intégrations seront:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Pour} & \theta_0 = 0 \quad , & \text{soit } \alpha' = \theta_c \quad , & \text{soit } \beta' = \theta_c \\ & \theta_0 = \pi \quad , & \text{soit } \alpha'' = \theta_c + \pi \ , & \text{soit } \beta'' = \theta_c - \pi \\ & \varphi_0 = -\pi \ , & \text{soit } \psi' = \varphi_c - \pi \ , & \text{soit } \tau' = \varphi_c + \pi \\ & \varphi_0 = +\pi \ , & \text{soit } \psi'' = \varphi_c + \pi \ , & \text{soit } \tau'' = \varphi_c - \pi \ . \end{array}\right. \tag{14}$$

Dans les deux cas, on a:

$$\left\{\begin{array}{l} V_c - O_c = \dfrac{Qe^{iR}}{4} \displaystyle\int_{\alpha'=\theta_c}^{\alpha''=\theta_c+\pi} d\alpha \int_{\psi'=\varphi_c-\pi}^{\psi''=\varphi_c+\pi} \overset{\text{exposant}}{e}\, G\left\{\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\psi-\tau}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\psi+\tau}{2}, \frac{\rho_c}{\lambda}\right\} d\psi \\ \text{exposant de } e = \pm\, 2\pi i \dfrac{\rho_c}{\lambda}\left\{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\psi+\tau}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\psi-\tau}{2} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\psi+\tau}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\psi-\tau}{2}\right\} \\ V_c - O_c = \dfrac{Qe^{iR}}{4} \displaystyle\int_{\beta'=\theta_c}^{\beta''=\theta_c-\pi} (-d\beta) \int_{\tau'=\varphi_c+\pi}^{\tau''=\varphi_c-\pi} \overset{\text{même exposant}}{e}\, G\left\{\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\psi-\tau}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\psi+\tau}{2}, \frac{\rho_c}{\lambda}\right\} (-d\tau) \ . \end{array}\right. \tag{15}$$

De même dans Qe^{iR} il faut supposer avoir exprimé θ_c et φ_c par les nouvelles variables.

Remarquons que la deuxième intégration de chaque équation se fait en gardant toujours constants α, β, et en plus encore une des deux grandeurs τ et ψ. L'intégration, soit par rapport à ψ, soit par rapport à τ, doit s'étendre le long d'un cercle entier. Songeons maintenant à ce que les grandeurs qui varient pendant cette intégration sont seulement:

$$\cos\frac{\psi+\tau}{2}\cos\frac{\psi-\tau}{2} = \frac{1}{2}\cos\tau + \frac{1}{2}\cos\psi$$

$$\sin\frac{\psi+\tau}{2}\sin\frac{\psi-\tau}{2} = \frac{1}{2}\cos\tau - \frac{1}{2}\cos\psi$$

et partageons le cercle en deux parties à fonctions égales, car ces cosinus ont des valeurs deux fois positives et deux fois

négatives. (Chaque partie aura des valeurs positives et des négatives.) La séparation doit être faite dans les points à cosinus $+1$ et -1, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \psi'''' &= \pi = \varphi_c + \varphi_0'''' , & \psi''' &= 0 = \varphi_c + \varphi_0''' ; \\ \tau'''' &= \pi = \varphi_c - \varphi_0'''' , & \tau''' &= 0 = \varphi_c - \varphi_0''' . \end{aligned} \tag{16}$$

De la sorte, les équations (15) deviennent:

$$\left\{ \begin{aligned} V_c - O_c &= \frac{Qe^{iR}}{2} \int_{\alpha'=\theta_c}^{\alpha''=\theta_c+\pi} d\alpha \int_{\psi'''}^{\psi''''} \mathrm{e}^{\text{même exposant qu'auparavant}} G \text{ (mêmes arguments) } d\psi \\ V_c - O_c &= \frac{Qe^{iR}}{2} \int_{\beta'=\theta_c}^{\beta''=\theta_c-\pi} d\beta \int_{\tau'''}^{\tau''''} \mathrm{e}^{\text{exposant, etc.}} G \text{ (mêmes arguments) } (d\tau) . \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Nous pouvons faire disparaître les signes d'intégration par des dérivations par rapport aux limites inférieures, selon la règle:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} E(x, y)\, dy = + E(x_1, y_1)$$

x et y étant deux variables indépendantes. Faisons les opérations en deux temps successifs: premièrement, dérivons par rapport aux limites inférieures α', ψ'''; β', τ''', *sans songer à des valeurs déterminées des dites limites.* Comme Qe^{iR} est en dehors des signes d'intégration, il n'est pas assujetti aux dites limites en général et par cela ne subira pas de changement, c'est-à-dire que ses arguments α, ψ, β, τ ne doivent pas recevoir d'apex. C'est que les limites d'intégration sont des variables indépendantes des variables d'intégration et des autres, dans les formules où elles apparaissent. Avec cette première opération, le premier membre des équations (17) devient:

$$\text{soit } \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \alpha' \, \partial \psi'''} , \qquad \text{soit } \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \beta' \, \partial \tau'''} .$$

Deuxième opération: remplaçons les dites limites (toutes les grandeurs avec apices) par leurs valeurs (16) et autres, et aussi les grandeurs sans apex par leurs valeurs (12). Le premier membre deviendra:

$$\frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c \, \partial \varphi_c} .$$

Dans l'autre membre, l'intégrale sera remplacée par la fonction à intégrer des limites, mais nous ferons usage des positions démontrées en (10); ainsi ce remplacement donnera tout de suite et toujours 1, car le remplacement des valeurs limites sera fait identiquement dans G et dans l'exponentielle.

On a donc:

$$2 \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c \, \partial \varphi_c} = Q e^{iR} . \tag{18}$$

11. *Remarque I.* — Si au lieu de dériver de la façon exposée par rapport aux limites les deux membres de l'équation (11), on fait simplement la dérivation habituelle par rapport à θ_c et φ_c, on a maintenant, G étant connu:

$$\frac{\partial (V_c - O_c)}{\partial \theta_c} = Q e^{iR} \frac{\partial}{\partial \theta_c} 2\pi^2 + 2\pi^2 \frac{\partial}{\partial \theta_c} Q e^{iR} = 2\pi^2 \frac{\partial}{\partial \theta_c} Q e^{iR} .$$

Voir aussi l'équation (10 *bis*). On en tire:

$$\frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c \, \partial \varphi_c} = 2\pi^2 \frac{\partial^2 Q e^{iR}}{\partial \theta_c \, \partial \varphi_c} . \tag{19}$$

Mais nous verrons cela plus loin.

Remarque II. — Si, au lieu de dériver dans les équations (17) par rapport aux limites inférieures, on dérive par rapport aux limites supérieures, on obtient des équations analogues, car les α, β, ψ, τ sans apices ne changent point, tandis que les α'', β'', ψ'', τ'' remplacent les α', β', ψ', τ', mais n'en diffèrent que par quelques π en plus ou en moins, et le facteur G, qui doit subir les mêmes modifications des expressions qu'on obtient toujours à partir de (9) ou de (11), doit

initialement être encore ce (10). L'autre facteur reste, ici aussi, à déterminer.

Remarque III. — La dérivation des intégrales définies, qu'on vient de voir, donne toujours un monôme lorsque la fonction à intégrer est un monôme. Lorsque, dans cette fonction, il y a un facteur explicite qui ne dépend pas des variables d'intégrations primitives, il faut le porter avant tout en dehors des signes d'intégration. Lorsque ce même facteur est sous-entendu, il faut discuter les résultats finaux.

Remarque IV. — Nous avons dédoublé une certaine intégrale en passant des équations (15) aux équations (17). Sans cela nous aurions trouvé un Qe^{iR} avec une valeur double, mais cette solution ne serait pas conforme au cas particulier déjà résolu. Nous reviendrons sur ce point.

12. — *Evaluation de* $\frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \varphi_c \, \partial \eta_c}$. — D'une façon analogue à la précédente, nous pouvons poser:

$$\eta_c = \text{arc tang} \frac{\rho_c}{\lambda}$$

$$\sigma = \eta_c + \theta_0 \,, \quad \delta = \eta_c - \theta_0 \,, \quad \psi = \varphi_c + \varphi_0 \,, \quad \tau = \varphi_c - \varphi_0 \,.$$

Choisissons deux parmi ces quatre dernières variables [1], par exemple la première et la troisième (ou 2me et 4me) comme variables d'intégration et les deux autres comme arbitraires fixes. Faisons-en usage dans l'équation (11). La dérivation nous donnera deux équations analogues aux équatiosn ci-dessus écrites, dans lesquelles $\frac{\rho_c}{\lambda}$, lorsqu'on l'écrit explicitement, est devnue:

$$\text{tang} \left(\text{arc tang} \frac{\rho_c}{\lambda} \pm \text{une correction} \right) .$$

C'est une correction tout à fait analogue aux corrections qu'on aurait obtenues dans le paragraphe 10 pour θ_c et φ_c.

[1] Les deux dernières positions ne sont pas nouvelles.

L'arc φ_c subira aussi des corrections. Les arcs corrigés seront les mêmes dans chaque équation (aussi pour G), mais ils seront différents d'une équation à l'autre. Nous en tirerons des conclusions analogues, c'est-à-dire que G, ayant subi des modifications pareilles à celles de l'exponentielle, était même, initialement, son réciproque. Un autre facteur sera Qe^{iR}. Les deux dérivations par rapport aux limites, après le dédoublement de l'intégrale deuxième, (si on prend par exemple les limites inférieures:

$$\sigma = \eta_c \qquad \delta' = \eta_c \qquad \psi''' = \varphi_c \qquad \tau''' = \varphi_c)$$

transformeront l'équation (11) en:

$$2\,\frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \varphi_c\, \partial \eta_c} = Qe^{iR}$$

13. — *Evaluation de* $\dfrac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \eta_c\, \partial \theta_c}$. — Ici, nous pouvons choisir comme variables, deux variables du paragraphe précédent le dernier et deux nouvelles, c'est-à-dire:

$$\alpha = \theta_c + \theta_0\,, \quad \beta = \theta_c - \theta_0\,, \quad \xi = \eta_c + \varphi_0\,, \quad \zeta = \eta_c - \varphi_0\,.$$

(Le dernier terme de chacune est l'ancienne variable d'intégration, tandis que le premier est la grandeur par rapport à laquelle on veut dériver). Il en suit:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{soit} \quad d\theta_0 = \dfrac{d\alpha}{2}\,, & \text{soit} \quad d\theta_0 = -\dfrac{d\beta}{2} \\[2ex] \text{soit} \quad d\varphi_0 = \dfrac{d\xi}{2}\,, & \text{soit} \quad d\varphi_0 = -\dfrac{d\zeta}{2} \end{array}\right.$$

et les limites d'intégration seront:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Pour} & \theta_0 = 0\,, & \text{soit} \ \alpha' = \theta_c\,, & \text{soit} \ \beta' = \theta_c \\ \text{»} & \theta_0 = \pi\,, & \text{soit} \ \alpha'' = \theta_c + \pi\,, & \text{soit} \ \beta'' = \theta_c - \pi \\ \text{»} & \varphi_0 = -\pi\,, & \text{soit} \ \xi' = \eta_c - \pi\,, & \text{soit} \ \zeta' = \eta_c + \pi \\ \text{»} & \varphi_0 = +\pi\,, & \text{soit} \ \xi'' = \eta_c + \pi\,, & \text{soit} \ \zeta'' = \eta_c - \pi\,. \end{array}\right.$$

Dans les deux choix on a donc:

$$\left\{\begin{aligned}
V_c - O_c &= \frac{Qe^{iR}}{4}\int_{\alpha'=\theta_c}^{\alpha''=\theta_c+\pi} d\alpha \int_{\xi'=\eta_c-\pi}^{\xi''=\eta_c+\pi} \mathrm{e}^{\text{exposant}}\, G\left\{\frac{\alpha-\beta}{2},\ \frac{\xi-\zeta}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\xi+\zeta}{2},\ \operatorname{tang}\frac{\xi+\zeta}{2}\right\} d\xi \\
\text{exposant} &= \pm\, 2\pi i \operatorname{tang}\frac{\xi+\zeta}{2}\left\{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\xi+\zeta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\xi-\zeta}{2} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\xi+\zeta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\xi-\zeta}{2}\right\} \\
V_c - O_c &= \frac{Qe^{iR}}{4}\int_{\beta'=\theta_c}^{\beta''=\theta_c-\pi} (-\,d\beta) \int_{\zeta'=\eta_c+\pi}^{\zeta''=\eta_c-\pi} \mathrm{e}^{\text{même exposant qu'auparavant}}\, G\left\{\text{mêmes arguments}\right\} (-\,d\zeta)\ .
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

De même dans Qe^{iR} il faut supposer effectués les changements des variables.

Songeons seulement à la deuxième intégration de chaque équation. Il faut toujours laisser α, β (et en plus une des deux autres grandeurs ξ et ζ) constants. L'intégration, soit par rapport à ξ, soit par rapport à ζ, s'étend le long d'un cercle entier.

La fonction à intégrer est le produit des trois exponentielles (et des G correspondants):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}\frac{\xi+\zeta}{2}\left\{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}} \\
&\mathrm{e}^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}\frac{\xi+\zeta}{2}\left\{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\xi+\zeta}{2}\cos\frac{\xi-\zeta}{2}\right\}} \\
&\mathrm{e}^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}\frac{\xi+\zeta}{2}\left\{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\xi+\zeta}{2}\sin\frac{\xi-\zeta}{2}\right\}}
\end{aligned} \tag{20 bis}$$

L'exposant de la première est le produit d'une constante par la tang, laquelle changerait de signe quatre fois le long du cercle si l'arc était $\frac{\xi}{2}$ (ou $\frac{\zeta}{2}$ dans l'autre choix). Comme l'arc est ici ξ (ou ζ) elle changera de signe seulement deux fois

et dans des points diamétralement opposés, que nous allons appeler A et B.

L'exposant de la deuxième est le produit de la même tang par un exposant déjà vu dans le paragraphe (10), qui change de signe aussi deux fois et en d'autres points C et D. Un tel produit change donc de signe dans les quatre points A, B, C, D, du cercle, deux à deux diamétralement opposés et à des distances inégales. Les secteurs opposés ont le même signe. Enfin l'exposant de la troisième expression (20 *bis*) change de signe d'une façon analogue dans les mêmes quatre points A, B, C, D, diamétralement opposés deux à deux.

L'exposant total de toute la fonction à intégrer et aussi son G, change donc de signe dans ces quatre points.

Prenons deux secteurs consécutifs (c'est-à-dire un à signe positif et un à signe négatif de l'exposant) pour chacune des deux parties de l'intégrale, qui reste ainsi dédoublée.

Remarque I. — L'arc du cercle étant ξ (ou ζ), tandis qu'on a à faire à tang $\frac{\xi+\zeta}{2}$, le diamètre AB a une inclinaison qui dépend de ζ (ou de ξ).

Remarque II. — Pour la deuxième et la troisième exponentielle (20 *bis*), nous avons aussi fait usage de l'arc ξ (ou de ζ). Cela ne laisse pas de côté le cos ζ (ou le cos ξ) qu'on voit dans les équations qui précèdent les expressions (16). Car le produit cos ζ tang $\frac{\xi+\zeta}{2}$ $\left(\text{ou l'autre, } \cos\xi \text{ tang } \frac{\xi+\zeta}{2}\right)$ peut être réuni à la première exponentielle, sans que les diamètres AB, CD se déplacent.

On tire alors des équations (20):

$$\left\{\begin{aligned} V_c - O_c &= \frac{Qe^{iR}}{2}\int_{\alpha'=\theta_c}^{\alpha''=\theta_c+\pi} d\alpha \int_{\xi'''}^{\xi''''} \overset{\text{même exposant qu'auparavant}}{e}\, G\left\{\text{mêmes arguments}\right\} d\xi \\ V_c - O_c &= \frac{Qe^{iR}}{2}\int_{\beta'=\theta_c}^{\beta''=\theta_c-\pi} d\beta \int_{\zeta'''}^{\zeta''''} \overset{\text{exposant comme auparavant}}{e}\, G\left\{\text{comme auparavant}\right\} d\zeta\ . \end{aligned}\right. \tag{21}$$

En dérivant par rapport aux limites inférieures de chaque intégrale et en se souvenant de ce que G doit affranchir l'exponentielle de θ_0 et de φ_0 (et pour cela être toujours son réciproque), on tire:

$$2\,\frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \eta_c\, \partial \theta_c} = Q e^{iR}\,. \tag{22}$$

14. — Nous avons donc:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\,\dfrac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c\, \partial \varphi_c} = Q e^{iR} & 2\,\dfrac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \varphi_c\, \partial \eta_c} = Q e^{iR} \\ & 2\,\dfrac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \eta_c\, \partial \theta_c} = Q e^{iR} \end{array}\right. \tag{23}$$

et l'équation (10 *bis*):

$$\frac{V_c - O_c}{2\pi^2} = Q e^{iR}\,.$$

Dérivons la première par rapport à η_c, la deuxième par rapport à θ_c, la troisième par rapport à φ_c. Comme cela donne:

$$\frac{\partial Q e^{iR}}{\partial \eta_c} = \frac{\partial Q e^{iR}}{\partial \theta_c} = \frac{\partial Q e^{iR}}{\partial \varphi_c}$$

et que $(V_c - O_c)$ ne diffère de Qe^{iR} que par la constante $\frac{1}{2\pi^2}$, tous deux sont fonction du seul argument:

$$\text{const} \times (\theta_c + \varphi_c + \eta_c)\,.$$

En outre, on déduit des (23):

$$\frac{V_c - O_c}{4\pi^2} = \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \theta_c\, \partial \varphi_c} = \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \varphi_c\, \partial \eta_c} = \frac{\partial^2 (V_c - O_c)}{\partial \eta_c\, \partial \theta_c}\,.$$

On en tire donc:

$$V_c - O_c = \text{const.}\; e^{\frac{\theta_c + \varphi_c + \eta_c}{2\pi}} + \text{const.}$$

Cette équation, lorsqu'on en fait usage pour le point t de premier contact ($V_t = O_t$), qui est aussi un point conjugué, devient:

$$0 = \text{const.}\, e^{\frac{\theta_t + \varphi_t + \eta_t}{2\pi}} + \text{const.}$$

Soustrayons-la membre à membre de l'avant-dernière équation:

$$V_c - O_c = \text{const.}\left(e^{\frac{\theta_c + \varphi_c + \eta_c}{2\pi}} - e^{\frac{\theta_t + \varphi_t + \eta_t}{2\pi}}\right). \qquad (24)$$

Mais nous verrons, dans un paragraphe prochain, par une comparaison avec le cas particulier déjà résolu (des corps de révolution, etc.) que cette formule n'est vraie que sur une partie des lignes conjuguées, tandis que, pour une autre partie, elle a besoin de quelques modifications. Nous y déterminerons aussi la constante de l'équation (24), au lieu de le faire ici. Sans le dédoublement d'une certaine intégrale (§ 11, remarque IV), nous aurions eu une valeur double de Qe^{iR}, et le dénominateur des exposants dans l'équation (24) aurait été $2\pi\sqrt{2}$, mais cette solution ne serait plus conforme au cas particulier.

15. — Résumons, avant de faire cela, quelque peu les formules trouvées tout à l'heure. On tire de l'équation (11) et du § 11:

$$V = O + Qe^{iR} \int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm \frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(x-x_c)\cos\theta_0 + (y-y_c)\sin\theta_0\cos\varphi_0 + (z-z_c)\sin\theta_0\sin\varphi_0\right\}} d\varphi_0 . \qquad (25)$$

Lorsque (x, y, z) est un point de ligne conjuguée, il est aussi conjugué à lui-même et on en tire:

$$V_c - O_c = 2\pi^2 Qe^{iR} \qquad (25\ bis)$$

ce qui est conforme à une équation (19) que nous avons déjà vue.

Remarque I. — Par cette équation (25), $\Delta_2 V$ a toujours la valeur juste (1), car on doit se rappeler (§§ 5 et 6) qu'il ne faut pas dériver aussi par rapport à x_c, y_c, z_c.

Remarque II. — On a, de la sorte, une fonction arbitraire F différente pour chaque corps différent, car l'équation de sa surface (supposée équation unique de toute la surface) peut être écrite:

$$z_s = Z(x_s, y_s) \ , \quad \text{ou} \quad z_c = Z(x_c, y_c) \ . \tag{26}$$

De même si on a une fonction F, avec laquelle on peut écrire une équation analogue à l'équation (25), on peut théoriquement, et par comparaison avec l'équation (25), en déduire une équation (26), c'est-à-dire un corps. Ainsi le degré de généralité est tout juste ce qu'il faut.

Remarque III. — Nous pouvons résumer comme suit notre démonstration de la formule (25):

1° Il ne peut pas exister d'autres fonctions (en plus des fonctions exprimables par la formule de M. Whittaker) qui donnent la valeur juste (1) de $\Delta_2 V$, car cette formule est une intégrale générale;

2° Il est légitime et utile d'affranchir de θ_0 et de φ_0 sur les lignes conjuguées la fonction à intégrer dans cette formule;

3° On ne peut faire cet affranchissement qu'en divisant de la manière que nous avons adoptée (voir § 8);

4° Sauf une constante (équation 24) qu'il faut encore déterminer, on voit que les fonctions arbitraires de l'équation (25), c'est-à-dire x_c, y_c, z_c ne laissent pas d'incertitude sur l'intégrale complète.

Nous obtiendrons donc une formule générale d'intégrale complète.

Détermination de la constante de l'équation (24).

16. — Déterminons la constante de l'équation (24) par comparaison avec le cas particulier, déjà rappelé, des corps de révolution. Dans le deuxième mémoire cité, les équations

finales sont différentes pour les points conjugués « antérieurs » et les points « postérieurs ». La séparation des dits y est donnée par une ligne ayant pour équation:

$$e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}} = \max .$$

Ici l'élément analogue sera constitué par les points (sans continuité et détachés) des lignes conjuguées, dans lesquels on a:

$$e^{\frac{\theta_c+\varphi_c+\eta_c}{2\pi}} = \max , \quad \text{c'est-à-dire:} \quad \theta_c + \varphi_c + \eta_c = \max \qquad (26\,bis)$$

et pour cela, les coordonnées $\theta_{\max}$, $\varphi_{\max}$, $\eta_{\max}$ de ces points sont de nouveaux paramètres pour la distinction à faire ici.

En faisant usage de l'index c au lieu de S, les équations finales (18) et (18 *bis*) des dits mémoires deviennent:

$$\left\{\begin{aligned} V_{ca} - O_{ca} &= -\sqrt{2L}\,\frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_{2a}}{\lambda}}}{\rho_{2a}}\,\frac{\left|_{t}^{ca} e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}}\right.}{\left|_{t}^{2a} e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}}\right.} \\ V_{cp} - O_{cp} &= -\sqrt{2L}\,\frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_{2p}}{\lambda}}}{\rho_{2p}}\,\frac{\left|_{\max}^{cp} e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}} + \right|_{\max}^{t} e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}}}{\left|_{\max}^{2p} e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}} + \right|_{\max}^{t} e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}}} \end{aligned}\right. \qquad (27)$$

l'index S étant un index générique. L'index *ca* concerne les points conjugués antérieurs et l'index *cp* les postérieurs. L est la puissance lumineuse de la source. L'index *t* se rapporte au point de premier contact. L'index *max* concerne le point de la ligne où l'exponentielle est maximum. L'index 2 concerne les coordonnées géographiques de certains anneaux parfaitement obscurs (réels ou imaginaires) qu'on détermine par certaines équations. C'est-à-dire que 2*a* est l'index d'un anneau antérieur

et $2p$ d'un anneau postérieur. Le signe vertical de Cauchy [1] concerne le remplacement de l'index S par l'index des coordonnées et la soustraction des valeurs. La diversité des deux formules (27) est due à la nécessité de briser en deux parties une certaine intégrale définie et de prendre chacune avec un signe convenable.

Faisons donc la comparaison de la première des équations (27) avec l'équation (24). Nous pouvons ensuite répéter les mêmes raisonnements qui nous ont amené de la première (27) à la deuxième, afin de faire la même distinction ici aussi. Comme le problème particulier était à deux dimensions (θ, η), il n'y a pas de φ dans les équations (27), car il suffisait de connaître V dans le plan du premier méridien et tout point de S était conjugué ($\varphi_s = \varphi_c = 0$). En plus, ici il ne peut pas exister d'anneaux obscurs (réels ou imaginaires), mais seulement des points obscurs isolés (réels ou imaginaires) sur les lignes conjuguées, et caractérisables par trois coordonnées (à l'index 2). Les mêmes raisonnements faits dans le mémoire rappelé pour démontrer l'existence des anneaux (réels ou imaginaires), c'est-à-dire que certaines équations posant $V = 0$ doivent avoir des racines, ont ici leurs analogues. Par cela il est démontré qu'il existe trois paramètres à index $2a$ utilisables ici pour les points antérieurs, et six autres (trois à index $2p$, trois à index *max*) pour les points postérieurs:

$$\left\{\begin{aligned} V_{ca} - O_{ca} &= -\sqrt{2L}\,\frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_{2a}}{\lambda}}}{\rho_{2a}}\,\frac{\Big|_{t}^{ca} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}}{\Big|_{t}^{2a} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}} \\ V_{cp} - O_{cp} &= -\sqrt{2L}\,\frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_{2p}}{\lambda}}}{\rho_{2p}}\,\frac{\Big|_{\max}^{cp} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}} + \Big|_{\max}^{t} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}}{\Big|_{\max}^{2p} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}} + \Big|_{\max}^{t} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

[1] Introduit en Italie par G. Peano, *Calcolo infinitesimale*, Turin.

Remarque I. — Dans le mémoire rappelé, la fonction (24) a été trouvée par la condition que ses dérivées premières par rapport à θ_c et par rapport à η_c (il n'y avait pas de φ_c) devaient être égales. Ici la condition imposée est que les dérivées composées de deuxième ordre soient égales. Mais toutes les dérivées d'un même ordre sont égales.

Remarque II. — Cette fonction (24) ou (28) est symétrique par rapport aux grandeurs angulaires θ_c, φ_c, η_c, mais elle ne l'est pas du tout si on passe à des coordonnées cartésiennes ou lorsqu'on fait usage d'une surface-obstacle donnée, car si l'équation de la surface est, par exemple:

$$\theta_c = f(\varphi_c, \eta_c)$$

f peut n'être pas symétrique. En réalité, il ne faut pas faire usage de cette équation de la surface, mais (au contraire) des deux équations (8 *bis*) de toute ligne conjuguée, et celles-ci aussi peuvent n'être pas symétriques.

Dans le cas tout à fait général, ces angles sont indépendants dans les formules, car on n'a pas encore choisi de surface; et pour cela, jusqu'à l'heure ou on choisira, ils peuvent donc avoir des valeurs quelconques et sans liaison déterminable. En faisant usage au contraire, dans les cas particuliers, des deux équations de toute ligne conjuguée, on éliminerait deux des trois variables. Nous ne ferons pas cette élimination et il faut aussi se rappeler que nous ne connaissons pas encore lesdites deux équations sous une expression explicite, les équations (8 *bis*) n'étant pas explicites. C'est pourquoi, étant ici en quête d'une intégrale complète pour le cas général, nous envisagerons θ_c, φ_c, η_c en paramètres indépendants arbitraires de cette intégrale, c'est-à-dire selon le langage du calcul, en paramètres qui peuvent prendre (le cas échéant) des valeurs opportunes. Seulement dans l'appendice consacré à l'intégrale générale, à la fin du mémoire, nous examinerons de plus près les θ_c, φ_c, η_c et leurs cas particuliers θ_2, φ_2, η_2; θ_{max}, φ_{max}, η_{max}, en fonction des données particulières et même par la considération de leurs deux liaisons (8 *bis*), toutefois sans résoudre les difficultés du calcul.

Remarque III. — Lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes x_c, y_c, z_c, au lieu des θ_c, φ_c, η_c, il faut retrancher les m, n, p des analogues x_c, y_c, z_c si la source n'est pas dans l'origine mais en (m, n, p).

Remarque IV. — Comme nous avons fait usage, dans le cas des corps de révolution, d'axes cartésiens spéciaux, on peut craindre que les équations (28) aussi ne soient vraies que pour des axes spéciaux. Remarquons à ce sujet qu'il s'agit seulement de déterminer une constante, celle de l'équation (24). Or, si on change les axes par des rotations quelconques et si on fait toujours usage des équations (28) pour un point à index 2 (qui est aussi un point conjugué, ayant $V_c = 0$), on voit aisément qu'elles deviennent:

$$V_c - O_c = - O_c \ ;$$

elles nous satisfont donc toujours. Il nous était même loisible de déduire tout de suite de l'équation (24) ladite constante par cette seule condition $V_c = V_2 = 0$, mais nous n'aurions alors ni résolu le doute sur le dénominateur des exposants, ni distingué les points antérieurs des postérieurs.

Résultats.

17. — Des équations (25) et (25 *bis*) on tire:

$$V = O + \frac{V_c - O_c}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm \frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(x-x_c)\cos\theta_0 + (y-y_c)\sin\theta_0\cos\varphi_0 + (z-z_c)\sin\theta_0\sin\varphi_0\right\}} d\varphi_0$$

et en faisant usage des équations (28) on déduit les intégrales complètes:

1° Pour les points à points conjugués antérieurs:

$$V_a = \frac{\sqrt{2L}\, e^{\pm 2\pi i \frac{\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2}}{\lambda}}}{\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2}} - \tag{29}$$

$$- \frac{\sqrt{2L}\, e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_{2a}}{\lambda}}}{2\pi^2 \rho_{2a}} \frac{\left|_t^{ca} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}\right.}{\left|_t^{2a} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}\right.} \int_0^{\pi} d\theta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm \frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(x-x_c)\cos\theta_0+(y-y_c)\sin\theta_0\cos\varphi_0+(z-z_c)\sin\theta_0\sin\varphi_0\right\}} d\varphi_0$$

2° Pour les points à points conjugués postérieurs:

$$V_p = \frac{\sqrt{2L}\, e^{\pm 2\pi i \frac{\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2}}{\lambda}}}{\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2L}\, e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_{2p}}{\lambda}}}{2\pi^2 \rho_{2p}} \frac{\left|_{max}^{cp} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}} + \right|_{max}^{t} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}}{\left|_{max}^{2p} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}} + \right|_{max}^{t} e^{\frac{\theta_s+\varphi_s+\eta_s}{2\pi}}} \times \text{même intégrale} . \tag{29 bis}$$

Dans ces deux formules, les coordonnées cartésiennes sont x, y, z pour le point donné de l'espace; elles sont x_c, y_c, z_c pour son point conjugué; elles sont m, n, p pour la source, et l'origine en est arbitraire; η_s est une abréviation pour arc tang $\frac{\rho_s}{\lambda}$. Les θ_s, φ_s, ρ_s sont les coordonnées géographiques, avec pôle dans la source (§ 8) des points; coordonnées qui peuvent aisément être calculées en partant de $(x_s - m)$, $(y_s - n)$, $(z_s - p)$, et leur index S devient:

c lors du point conjugué, $2a$ lors des points parfaitement obscurs antérieurs, $2p$ lors des analogues postérieurs, t lors du premier contact, *max* lors des points où devient max. la somme $\theta_s + \varphi_s + \eta_s$. L est la puissance lumineuse de la source, i l'unité des nombres imaginaires, e la base des logarithmes de Neper, λ la longueur d'onde, π le rapport d'Archimède.

APPENDICE.

Sur les procédés pour passer de l'intégrale complète à l'intégrale générale.

18. — Dans toute la troisième région de l'espace, souvent (éventuellement pour des raisons de symétrie géométrique) on connaît *a priori* les valeurs de x_c, y_c, z_c car elles sont les coordonnées du point de dernier contact des ondes avec l'obstacle. Dans ce cas, l'intégrale complète (29) ou (29 *bis*) est d'un usage plus aisé que l'intégrale générale, et il n'y a maintenant d'inconnu que les paramètres θ_2, φ_2, η_2 et pour ces points postérieurs aussi $\theta_{\max}$, $\varphi_{\max}$, $\eta_{\max}$ qui sont tous à déterminer dans chaque cas particulier donné et par le moyen des équations qu'on a ébauchées. Dans la deuxième région, s'il s'agit d'un corps de révolution éclairé selon son axe, on peut, lorsque le point donné (x, y, z) est très voisin du corps, prendre par approximation $x_c = x$, $y_c = y$, $z_c = z$. Cela supprime aussi la quadrature. Dans tous les autres cas, si on a fait la quadrature des formules (29) et (29 *bis*) par des moyens capables de donner des résultats simples, on peut passer à l'intégrale générale en remplaçant dans l'intégrale complète A les x_c et y_c par leurs expressions tirées des deux équations (8), c'est-à-dire de:

$$\frac{\partial A}{\partial x_c} = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial y_c} = 0 ,$$

après avoir fait usage aussi de l'équation de la surface de l'obstacle, soit:

$$z_c = Z(x_c, y_c)$$

car ces équations (8) (voir remarque IV du § 6) donnent x_c et y_c en fonction des x, y, z données.

Toujours dans des cas particuliers simples au moins, on pourra éventuellement faire usage des deux équations (8 *bis*) de toute ligne conjuguée et en déduire θ_{2a}, φ_{2a}, η_{2a} pour les points antérieurs et θ_{2p}, φ_{2p}, η_{2p}, $\theta_{\max}$, $\varphi_{\max}$, $\eta_{\max}$ pour les

points postérieurs; ces trois dernières grandeurs par l'équation aussi:

$$\theta_{max} + \varphi_{max} + \eta_{max} = \max$$

et les autres par un procédé analogue au procédé ébauché dans le deuxième mémoire cité sur les corps de révolution (voir son § 14, II).

Reggio en Calabre, ce 30 janvier 1940.

J'adresse à M. le prof. E. Cherbuliez, directeur des *Archives*, des remerciements sincères et très vifs pour la revision de mon texte au point de vue de la langue.