Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 22 (1940)

Artikel: Étude sur la probabilité des comètes à orbite hyperbolique [suite et fin]
Autor: Taalimi, Mohamed
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741664

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ÉTUDE
SUR LA PROBABILITÉ DES COMÈTES A ORBITE HYPERBOLIQUE

PAR

Mohamed TAALIMI

(avec 11 fig.)

(suite et fin)

CHAPITRE IV

Nouvelle étude du problème. Exposé de la méthode.

18. — *Hypothèse fondamentale.*

Avec G. Tiercy prenons comme point de départ l'idée que les comètes naissent à une distance très éloignée du Soleil (par exemple 40.000 ou 50.000 fois la distance Terre-Soleil). Ce nombre est arbitraire; simplement, cette distance initiale est choisie très grande par rapport aux dimensions du système solaire, mais assez faible pour que l'attraction du Soleil l'emporte de beaucoup sur l'action des étoiles.

On se place donc dans le cas de la provenance lointaine des comètes. Celles-ci, à l'origine étrangères au système solaire, y pénétreraient un beau jour, tombant sous l'influence du Soleil, pour un temps ou pour toujours. C'est, comme on voit, l'idée de Laplace. Mais l'hypothèse

sera complétée par les conditions que nous formulerons ci-après concernant la vitesse et la direction de celle-ci.

Condition de visibilité. — Les comètes, comme on sait, sont peu lumineuses; elles ne deviennent visibles que dans le voisinage immédiat du Soleil, c'est-à-dire un peu avant et un peu après l'époque de leur passage au périhélie, et à condition que la distance périhélie soit suffisamment petite. Pour toutes les comètes observées jusqu'ici, la distance périhélie est comparable à la distance Terre-Soleil; si l'on désigne la distance périhélie par q, le 95 % des valeurs de q connues sont inférieures à 2 fois la distance Terre-Soleil; 4 % de ces valeurs sont comprises entre 2 et 3 unités astronomiques; 1 % seulement sur 600 cas sont supérieures à 3:

4,04	pour	la	comète	de	1729,
3,34	»	»	»	»	1905 IV,
3,75	»	»	»	»	1914 III,
5,51	»	»	»	»	1925 II,
4,18	»	»	»	»	1925 VI,
3,68	»	»	»	»	1927 V.

La condition de visibilité est donc que q soit inférieure à 4 ou 5. Disons, pour fixer les idées, $q < 4$. A ce sujet, disons en passant, qu'il nous paraît certain que les conditions d'observation exercent une influence non négligeable sur les éléments des orbites des comètes découvertes; mais c'est là un autre aspect de la question, dont nous ne nous occuperons pas ici.

Nous adopterons pour la suite les notations suivantes:

r = distance de Soleil au point d'émergence C,

q = distance périhélie,

$s = \dfrac{r}{q}$,

β = angle de la vitesse relative v avec la ligne CS.

Si donc $r = 40.000$ unités astronomiques, et si $q < 4$, on voit que le rapport s doit, pour que la comète soit visible, être supérieur au nombre $n = 10.000$. La condition de visibilité peut donc s'écrire:

$$s > n \ .$$

Cette condition est nécessaire; mais, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, elle n'est pas forcément suffisante, puisqu'il faudrait encore tenir compte des conditions d'observation. Nous l'emploierons cependant telle quelle. Cela revient à dire que nous sommes, par la force des choses, obligés de ne pas parler des corps nébuleux pour lesquels $q > 4$, qui existent certainement, mais qui échappent complètement à l'observation parce qu'ils sont trop faiblement lumineux.

Hypothèses supplémentaires sur β *et* v. Les conditions qui précèdent ne suffisent pas pour bien situer le problème. Il faut encore tenir compte du fait que la comète qui naît en C a une vitesse *relative* v, faisant un angle β avec la ligne CS qui joint le point C d'émergence au Soleil *(fig. 5)*.

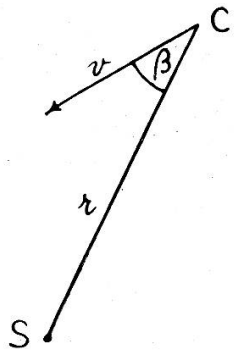

FIG. 5.

Si la distance périhélie q est fixée d'avance, les inconnues du problème sont l'excentricité e et l'angle β qui assure la valeur q demandée.

On a souvent considéré tous les angles β aigus comme également vraisemblables et par conséquent aussi fréquents les uns que les autres. Nous aurons l'occasion de préciser par la suite que cette hypothèse est très arbitraire, et qu'il y a même des valeurs de β qui sont exclues.

En ce qui concerne la vitesse relative v, nous admettrons l'existence d'une certaine vitesse U dite «normale», dont la fréquence sera maximum; la probabilité de voir réalisée une autre valeur v différente de U sera d'autant plus faible, que v s'écartera davantage de U. Ainsi, la loi de probabilité d'une vitesse v pourrait être du type suivant:

$$\lambda(v)\,dv = e^{-k(v^m - \mathrm{U}^m)^{2p}}, \qquad (47)$$

où k est une constante; cette formule correspond à une courbe de probabilité en forme de cloche.

Nous laisserons de côté l'hypothèse $\lambda(\varphi) = \text{const.}$, qui était d'ailleurs celle de Laplace, et qui ne semble pas devoir être retenue.

Telles sont les hypothèses qui sont à la base de notre problème. Si les données initiales sont r, β, φ, il s'agit de trouver les éléments de l'orbite cométaire, notamment l'excentricité e et la distance périhélie q (ou, ce qui revient au même, le rapport s).

19. — *L'analyse approchée de* W. Trabert.

Avant d'aller plus loin, relevons que ce problème a été posé, à peu près sous la forme indiquée ci-dessus, par W. Trabert [1].

Cet auteur se donne q ou s, et regarde les directions β qui assurent cette valeur de q comme également probables. Nous avons déjà remarqué que cette dernière hypothèse est très arbitraire; nous verrons plus loin comment elle est restreinte par le jeu même des données du problème.

Voici en substance le raisonnement de Trabert. Si l'équation générale des coniques est écrite sous la forme:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

on voit qu'à la distance $\rho = r$ supposée très grande, la quantité

$$1 + e \cos \theta = \frac{p}{r} \tag{48}$$

doit être un très petit nombre; autrement dit, $e \cos \theta$ est négatif et presque égal à -1. Cette remarque vaut aussi bien pour les orbites elliptiques que pour les hyperboliques. Il en résulte que, pour les trajectoires lointaines elliptiques ($e < 1$), la petitesse du premier membre de (48) ne peut être réalisée que si l'excentricité e est proche de l'unité; autrement dit, l'ellipse sera extrêmement allongée; et, au

[1] W. Trabert, *Lehrbuch der kosmischen Physik* (Teubner, Berlin, 1911).

voisinage de son périhélie, cette orbite sera très proche d'un arc parabolique.

Pour les orbites hyperboliques ($e > 1$), il semble, à première vue, qu'on pourrait envisager des valeurs de e dépassant de beaucoup l'unité; cela n'empêcherait pas de rendre le premier membre de (48) très petit; il suffirait de choisir θ suffisamment grand.

Mais nous allons voir qu'au contraire, l'excentricité des hyperboles cométaires, comme celle des ellipses, ne s'écarte jamais beaucoup de l'unité; de sorte qu'au voisinage du périhélie, la courbe se rapprochera aussi beaucoup d'une parabole.

Outre l'équation (48), on a les égalités bien connues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{v^2}{2} - \dfrac{f}{\rho} = \mathrm{C} \ , \\ \rho \cdot v \sin \beta = c \ ; \end{array} \right. \tag{49}$$

v est la vitesse relative, β l'angle qu'elle forme avec la ligne comète-Soleil, et $v \sin \beta$ la composante tangentielle ou latérale de v. Ce sont là les équations générales, dont nous nous servirons encore par la suite dans notre nouvelle étude.

On sait d'ailleurs qu'entre les constantes c et C d'une part, et les éléments p et e d'autre part, il y a les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 = fp \ , \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2\,c^2\mathrm{C}}{f^2}} \ , \end{array} \right. \tag{50}$$

en négligeant, cela va sans dire, la masse de la comète devant la masse du Soleil prise comme unité.

De (50), on tire:

$$c = \sqrt{pf}$$

$$\mathrm{C} = \frac{f}{2\,p}(e^2 - 1) \ ;$$

de sorte que les équations (49) s'écrivent comme suit:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{f}{\rho} + \dfrac{f}{2p}(e^2 - 1) \ , \\ v\rho \sin \beta = \sqrt{fp} \ ; \end{array}\right. \tag{51}$$

ou encore, puisque par (48) on a $p = q(1 + e)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{f}{\rho} + \dfrac{f}{2q}e - 1) \ , \\ v\rho \sin \beta = \sqrt{fq(1 + e)} \ . \end{array}\right. \tag{52}$$

Telles sont les équations définissant l'orbite du corps qui passera à la distance périhélie q.

Plaçons-nous maintenant à la distance r très grande à laquelle se trouve le point d'émergence du corps; et continuons à désigner la vitesse relative de celui-ci par v. On a:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{f}{r} + \dfrac{f}{2q}(e - 1) \ , \\ vr \sin \beta = \sqrt{fq(1 + e)} \ . \end{array}\right. \tag{53}$$

Pour les orbites elliptiques, pour lesquelles $e < 1$, on a $(e - 1) < 0$. Comme le second membre de la première équation doit être positif, on a la condition:

$$\frac{f}{r} > \frac{f}{2q}(1 - e) \ ,$$

$$\frac{2q}{r} > 1 - e \ ;$$

C'est-à-dire que $(1 - e)$ est très petit, ou encore que e est très près de l'unité; nous l'avons déjà indiqué.

Pour les orbites hyperboliques, on a $e > 1$. Si e ne dépasse 1 que de très peu, v^2 est une petite quantité d'après la première équation (53), puisque r est très grand. Si au contraire e dépasse de beaucoup l'unité, le second terme $\frac{f}{2q}(e - 1)$ du premier membre l'emporte largement sur le premier.

L'idée essentielle de Trabert est de négliger celui-ci et d'écrire:

$$v^2 = \frac{f}{q}(e - 1) \ . \tag{54}$$

Comme $\frac{f}{q}$ est un coefficient connu, puisque la distance q est donnée, on voit que v sera petite si e est voisine de l'unité, tandis que pour une grande vitesse relative v l'excentricité s'écartera beaucoup de 1.

Mais on peut relever ici qu'il ne faut pas s'attendre à voir réalisées de très grandes excentricités, parce que celles-ci nécessiteraient des valeurs inadmissibles de v. La seconde équation (53) donne ensuite:

$$v \sin \beta = \frac{\sqrt{fq(1 + e)}}{r} \ , \tag{55}$$

où r est très grand; de sorte que, de toute façon, c'est-à-dire pour toutes les orbites, la quantité v . sin β a une très petite valeur, puisque e n'est jamais considérable, nous venons de le constater.

Alors, de (54) et (55), on tire par division:

$$\sin \beta = \frac{q}{r}\sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \ ; \tag{56}$$

c'est là une formule essentielle de l'analyse de Trabert.

Mais il est bien évident qu'elle n'est qu'approchée, puisque l'égalité (54) l'est elle-même.

On constate d'ailleurs immédiatement que, pour une excentricité très voisine de l'unité, la formule (56) risquerait de conduire à une valeur inadmissible de sin β. Il faut donc voir la chose de plus près.

On peut essayer de tourner la difficulté comme suit. De la première équation (53), on a:

$$e = 1 + \frac{qv^2}{f} - \frac{2q}{r} \ ;$$

portant cette expression dans (55), on trouve:

$$v \sin \beta = \frac{\sqrt{fq}}{r} \cdot \sqrt{2 + \frac{qv^2}{f} - \frac{2q}{r}} \ ; \tag{57}$$

sous le radical, nous pouvons négliger $\frac{2q}{r}$ devant 2; de sorte qu'il reste à très peu près:

$$v \sin \beta = \frac{\sqrt{fq}}{r} \cdot \sqrt{\frac{2f + qv^2}{f}} = \frac{\sqrt{q}}{r} \sqrt{2f + qv^2} ,$$

$$v \sin \beta = \frac{qv}{r} \sqrt{1 + \frac{2f}{qv^2}} ; \tag{58}$$

et enfin:

$$\sin \beta = \frac{q}{r} \sqrt{1 + \frac{2f}{qv^2}} , \tag{59}$$

expression qui peut remplacer (56). On voit ainsi que, v étant donnée, à toute valeur de q correspond un certain angle β.

Si v a une très grande valeur (e très différente de l'unité) on peut réduire (59) à:

$$\sin \beta = \frac{q}{r} ,$$

qui est très petit.

Si v a une petite valeur (e voisine de l'unité), on peut négliger 1 sous le radical de (59) et écrire :

$$v \sin \beta = \frac{qv}{r} \sqrt{\frac{2f}{qv^2}} = \frac{\sqrt{2fq}}{r} ,$$

qui est très petit; on le savait déjà par (55). Mais nous ne sommes pas mieux renseignés que par (56) sur l'angle β lui-même. La difficulté n'est donc pas levée.

Cette analyse, basée sur des égalités approchées, est donc insuffisante.

20. — *Les restrictions concernant l'angle β indiquées par G. Tiercy.*

Reprenons l'équation générale des coniques sous la forme:

$$\rho = \frac{q(1 + e)}{1 + e \cos \theta} \tag{60}$$

où e est positive. β étant l'angle formé par la vitesse relative v avec la ligne comète-Soleil, on a:

$$\operatorname{tg} \beta = \rho \frac{d\theta}{d\rho} \cdot \tag{61}$$

En remplaçant ρ et $\frac{d\theta}{d\rho}$ par leurs valeurs tirées de l'équation (60), il vient:

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{(e \sin \theta)^2} \cdot \tag{62}$$

D'autre part, avec la notation indiquée au n° 18, la condition de visibilité est donnée par l'expression:

$$\frac{r}{q} = s \,, \qquad s > n \;;$$

de (60) on a, pour $\rho = r$:

$$\frac{r}{q} = s = \frac{1 + e}{1 + \cos \theta} \;;$$

d'où:

$$\cos \theta = \frac{1 + e - s}{e\, s \cos \theta} \,,$$

et par (62):

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1 + e}{e(s^2 - 1) - (s - 1)^2} \,, \tag{63}$$

ou aussi:

$$\sin^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{e + 1}{(e - 1)s^2 + 2s} \,, \tag{64}$$

expression valable au point d'émergence. La distance q étant connue (ou s, ce qui revient au même), e ne peut varier qu'entre:

$$e = \frac{(s - 1)^2}{s^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad e = \infty \;;$$

l'angle β correspondant variera de:

$$\beta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{à} \qquad \beta = \beta' \,,$$

la valeur de β' étant donnée par:

$$\operatorname{tg}^2 \beta' = \frac{1}{s^2 - 1}, \qquad \text{ou} \qquad \beta' = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}.$$

Remarquons immédiatement que toutes les directions comprises entre $\beta = 0$ et β' sont exclues; aucune de ces directions ne peut donner la valeur de q demandée. Il en résulte que l'hypothèse de la vraisemblance égale des directions donnant une certaine valeur de q n'est pas soutenable. Autrement dit, à cause de la condition de visibilité $q < 4$, le domaine de variation de β est limité *(fig. 6)*.

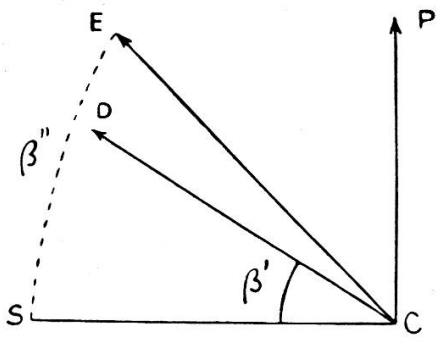

FIG. 6.

Dans la figure (6), les directions possibles sont comprises dans l'angle DCP $= 90° - \beta'$, dans lequel nous admettrons une égale vraisemblance de toutes les directions restantes, admission très arbitraire encore, mais qu'il est pour l'instant impossible de remplacer par une autre. Parmi ces directions, les unes donnent des orbites elliptiques, les autres des hyperboles ; les deux secteurs sont séparés par la ligne CE, correspondant à $e = 1$ et à l'angle β''; on a:

$$\operatorname{tg} \beta'' = \frac{1}{\sqrt{s - 1}},$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}.$$

Comme s est très grand, β' et β'' sont très petits. Il en résulte que le seul secteur utile $\widehat{PCD}$ est presque uniquement relatif aux trajectoires elliptiques, avec une excentricité e qui varie entre $\frac{(s-1)^2}{s^2 - 1}$ et l'unité. Pour les

trajectoires hyperboliques qui correspondent aux directions comprises dans l'angle $\widehat{ECD} = \beta'' - \beta'$, les excentricités peuvent varier théoriquement de 1 jusqu'à l'infini.

21. — *Les équations.*

Il faut deux équations pour tirer l'excentricité e et la distance périhélie q, si on donne v et β. La première est l'équation (64) qui donne l'angle β au point C d'émergence de la comète. La deuxième équation peut être tirée, soit du théorème des forces vives, soit du théorème des aires. Prenons ici le théorème des forces vives, comme au n° 19. On peut l'écrire comme suit:

$$\frac{v^2}{f} - \frac{2}{\rho} = C \tag{65}$$

où C est une constante; la constante f est liée par une relation simple à la constante c des aires; on a en effet:

$$f = \frac{c^2}{p},$$

où p est le paramètre de l'orbite, pour lequel on sait qu'on a:

$$p = q(1 + e) .$$

Soit u la vitesse avec laquelle la comète passe à son périhélie; dans ces conditions la constante des aires vaut:

$$c = uq ;$$

f devient donc:

$$f = \frac{u^2 q}{1 + e} ;$$

d'où:

$$\frac{u^2}{f} = \frac{1 + e}{q} .$$

En portant la valeur de $\frac{u^2}{f}$ dans l'équation (65) nous aurons:

$$C = \frac{u^2}{f} - \frac{2}{q},$$

ou bien:

$$C = \frac{1 + e}{q} - \frac{2}{q} = \frac{e - 1}{q} .$$

L'équation (65) devient ainsi:

$$\frac{v^2}{f} . r - \frac{2r}{\rho} = \frac{r}{q}(e - 1) = s(e - 1) .$$

Mais au point d'émergence de la comète $r = \rho$; d'où:

$$\frac{v^2}{f} . r - 2 = s(e - 1) . \tag{66}$$

La constante képlérienne est donnée par:

$$f = v_0^2 r_0 ,$$

où v_0 est la vitesse moyenne de la Terre sur son orbite et r_0 la distance moyenne de la Terre au Soleil.

L'équation (66) s'écrit alors:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \frac{r}{r_0} - 2 = s(e - 1) . \tag{67}$$

Posons ici:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \frac{r}{r_0} - 2 = A ; \tag{68}$$

A est une donnée du problème, puisque dans le premier membre (68) tout est connu; v est la vitesse de la comète au point d'émergence, et r est la distance au Soleil, que nous avons supposée égale à: $r = 40.000$. A pourra varier suivant la grandeur de $\frac{v}{v_0}$; il pourra prendre toutes les valeurs possibles de -2 jusqu'à un nombre N considérable, 40.000 ou 80.000 par exemple.

Ainsi, les deux équations qui nous donneront les éléments de l'orbite cométaire sont:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{1 + e}{e(s^2 - 1) - (s - 1)^2} \\ \text{ou:} \qquad \sin^2 \beta &= \frac{1 + e}{(e - 1) s^2 + 2s} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

et

$$s(e-1) = A . \tag{70}$$

En éliminant s entre les deux dernières équations nous aurons:

$$e^2 = 1 + A(A+2)\sin^2\beta , \tag{71}$$

qui donne l'excentricité e.

De l'équation (70), nous pourrons tirer la distance périhélie puisqu'on a:

$$\frac{r}{q} = s = \frac{A}{e-1} . \tag{72}$$

Nous avons déjà indiqué que l'angle β varie entre 90° et β':

$$\beta' \leqslant \beta \leqslant 90° ,$$

où β' est tel que:

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}} ;$$

et nous savons que A est compris entre -2 et N:

$$-2 \leqslant A \leqslant N .$$

Il est entendu que la condition de visibilité est que:

$$s > n \quad \text{où} \quad n = 10\,000 .$$

22. — *Cas de l'ellipse.*

Supposons qu'au point d'émergence C la vitesse v soit très petite; alors A sera négatif. Posons: $-A = B$, où B est par conséquent positif.

Les deux équations (71) et (72) deviennent:

$$\left\{\begin{aligned} e^2 &= 1 - B(2-B)\sin^2\beta , && (73)\\ s &= \frac{B}{1-e} . && (74)\end{aligned}\right.$$

B ne pouvant pas dépasser 2, l'équation (73) montre que $e < 1$; on a donc affaire à une ellipse. La condition de visibilité $s > n$, s'écrit à cause de (74) :

$$\frac{B}{1 - e} > n ,$$

d'où:

$$e > 1 - \frac{B}{n} .$$

C'est la condition pour que la comète soit visible à son passage au périhélie. En remplaçant e par sa valeur tirée de (73), nous aurons:

$$\sin^2 \beta < \frac{\frac{2}{n} - \frac{B}{n^2}}{2 - B} . \qquad (75)$$

Comme le numérateur est positif, le second membre est une fonction croissante de B, et varie de $\frac{1}{n}$ jusqu'à l'infini quand B varie de zéro à 2. Pour $B = \frac{2n}{n+1}$ le second membre devient égal à l'unité. Cela veut dire que, pour B compris entre 2 et $\frac{2n}{n+1}$, l'angle β n'est pas limité par la condition (75), ou encore que pour toute vitesse suffisamment faible au point d'émergence, la comète sera visible à son passage au périhélie, quel que soit l'angle β entre β' et 90°. Par contre, si B est inférieur à $\frac{2n}{n+1}$, l'angle β sera limité par l'inégalité (75) et seules seront visibles les comètes pour lesquelles v fait un angle suffisamment petit avec la ligne comète-Soleil.

23. — *Cas de l'hyperbole.*

Supposons maintenant que v ait une plus grande valeur, de sorte que A soit positif, compris entre 0 et la limite supérieure N. La condition de visibilité peut alors s'écrire:

$$e < \frac{A}{n} + 1 .$$

En remplaçant e par sa valeur (71), cette condition devient:

$$\sin^2 \beta < \frac{\frac{2}{n} + \frac{A}{n^2}}{2 + A} . \tag{76}$$

Le second membre est une fonction décroissante de A, qui varie de $\frac{1}{n}$ jusqu'à $\frac{1}{n^2}$ quand A varie de zéro à l'infini.

Par conséquent l'angle β reste compris entre deux limites extrêmement rapprochées. Ainsi la comète hyperbolique ne sera visible que si sa vitesse initiale est très peu inclinée sur CS.

24. — *Résumé et graphique.*

Nous pouvons résumer la discussion précédente sous la forme d'un graphique. Pour cela, portons en abscisse la quantité A et en ordonnée $\sin^2\beta$ *(fig. 7)*.

Comme nous avons vu précédemment, A ne peut varier qu'entre — 2 et N; pour la visibilité, $y = \sin^2 \beta$ doit être comprise entre l'axe des A et la courbe KBCD.

Cette courbe se compose, du segment KB parallèle à Ox d'abscisse variant de $x = -2$ à $x = -\frac{2n}{n+1}$ et d'ordonnée 1, et de l'hyperbole BCD représentée par l'équation:

$$y = \frac{\frac{2}{n} + \frac{x}{n^2}}{2 + x} , \tag{77}$$

qui admet pour asymptote une droite $y = \frac{1}{n^2}$, qui, parallèle à l'axe des x, en diffère à peine.

Dans le graphique (7), l'ordonnée du point C est égale à $y = \frac{1}{n}$, valeur correspondant à $A = 0$ et $e = 1$.

Dans le domaine elliptique $\sin^2 \beta$ est plus grand que $\frac{1}{s}$ où $s > n$; la limite inférieure de $\sin^2 \beta$ sera donc une parallèle à CC′, située au-dessous de CC′ ou confondue au plus avec CC′.

Pour les hyperboles, la limite inférieure est donnée par $\sin^2 \beta = \frac{1}{s^2}$. L'excentricité e, donnée par:

$$e^2 = 1 + A(A + 2) \sin^2 \beta ,$$

diffère le plus de l'unité quand on place $\sin^2 \beta$ sur la courbe KBCD de la *figure* (7).

Si nous portons l'excentricité e sur l'axe des y ($\sin^2 \beta$) et la valeur A comme précédemment sur l'axe des x, la valeur extrême de e sera représentée sur le graphique *(fig. 7)* par la ligne brisée KEGF.

Il est visible que dans la région elliptique, l'excentricité e diffère très peu de l'unité, tandis que dans la région hyperbolique elle la dépasse sensiblement.

Rapportons l'hyperbole limitative BCD aux axes IN et IK, que nous prenons dès maintenant comme axes des x et des y; l'équation de la courbe devient:

$$x\left(y - \frac{1}{n^2}\right) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) . \tag{78}$$

Son asymptote parallèle à l'axe des x est la droite $y = \frac{1}{n^2}$.

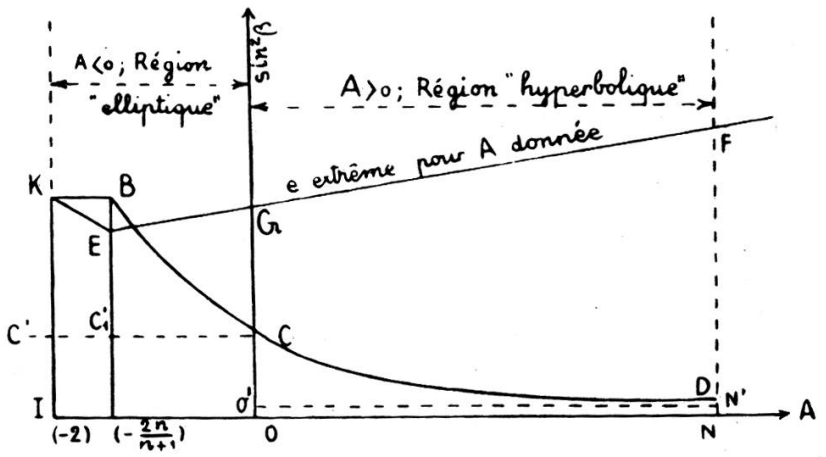

FIG. 7.

25. — Nous allons étudier la fréquence des orbites elliptiques et des orbites hyperboliques. Remarquons que, pour les premières, A et β sont données par un point de la sur-

face IKBCO *(fig. 7)*; pour les secondes, par un point de la surface OCDN.

La probabilité de choisir un élément de surface $dy.dx$ est de la forme:

$$f(x, y)\, dx\, dy \ .$$

D'après les hypothèses adoptées plus haut sur la fréquence des angles β et des vitesses v, il nous faut prendre pour $f(x, y)$ une fonction de la forme:

$$f(x, y) = \frac{\Lambda(x)}{\sqrt{x(1-y)}} \ .$$

En effet, nous avons admis que toutes les directions β autour du point d'émergence sont également possibles tant que nous restons dans le domaine $\beta' < \beta \leqslant 90°$; mais, si l'on se place dans un plan défini, normal au rayon vecteur mené au point d'émergence, elles cessent de l'être et leur fréquence sera exprimée par:

$$\sin \beta\, d\beta = -d(\cos \beta) \ ;$$

cette expression n'est autre que la probabilité de choisir β entre β et $\beta + d\beta$; comme nous avons posé:

$$y = \sin^2 \beta \ ,$$

d'où:

$$\cos \beta = \sqrt{1-y} \ ,$$

il vient:

$$d \cos \beta = \frac{dy}{2\sqrt{1-y}} \ .$$

D'autre part, la loi de fréquence de la vitesse v est donnée par une fonction $\lambda(v)\, dv$. Comme, avec les axes adoptés, on a:

$$x = A + 2 = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \frac{r}{r_0} \ ,$$

on aura une relation comme:

$$\lambda(v)\, dv = \frac{\Lambda(x)\, dx}{\sqrt{x}} \ .$$

De sorte que, d'après nos hypothèses, les fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques visibles sont dans le même rapport que les intégrales doubles:

$$\int\int \frac{\Lambda(x)\,dx\,dy}{\sqrt{x(1-y)}},$$

étendues aux surfaces OIKBC et OCDN.

CHAPITRE V

Premier exemple de $\lambda(v)$.

26. — Nous admettrons, comme loi de probabilité de la vitesse v de la comète à son point d'émergence dans la sphère d'influence du Soleil, l'expression suivante:

$$\lambda(v) = e^{-k(v^m - \mathrm{U}^m)^{2p}}, \tag{79}$$

où U est une certaine vitesse, dite « vitesse normale », et dont la fréquence est maximum; une autre vitesse v a d'autant moins de probabilité qu'elle s'écarte davantage de la vitesse normale.

D'après l'hypothèse ainsi faite sur la vitesse v, nous allons calculer le rapport des fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques pour les comètes visibles, c'est-à-dire pour celles qui ont une distance périhélie $q < 4$.

27. — *Etude de la courbe de probabilité de la vitesse v.*

Nous poserons $\mathrm{U} = 0^{\mathrm{km}},2$, valeur suggérée par les observations et que nous trouverons plus loin par le calcul. Prenons dans la formule (79):

$$k = 10^4\,,\quad m = 4\,,\quad p = 2\,,\quad \mathrm{U} = 0{,}2$$

et posons $\lambda(v) = z$; on a:

$$z = e^{-10^4(v^4 - 0{,}2^4)^4} \tag{80}$$

Voici les valeurs numériques de z correspondant à quelques valeurs de la vitesse v:

v	z	v	z
0	0,9999999735	0,5	0,86245
0,1	0,999999999491	0,7	$0,0^{13}1266$
0,2	1	1	$0,0^{43}372$
		$\pm\infty$	0

Si l'on porte v en abscisse et z en ordonnée, l'égalité (80) donne une cloche non symétrique par rapport à l'axe des z et dont le brin de droite descend très vite vers l'axe des v *(fig. 8)*.

Cette courbe correspond d'ailleurs aux observations faites sur les comètes; ce qui revient à dire qu'elle ne concerne que le cas des comètes visibles.

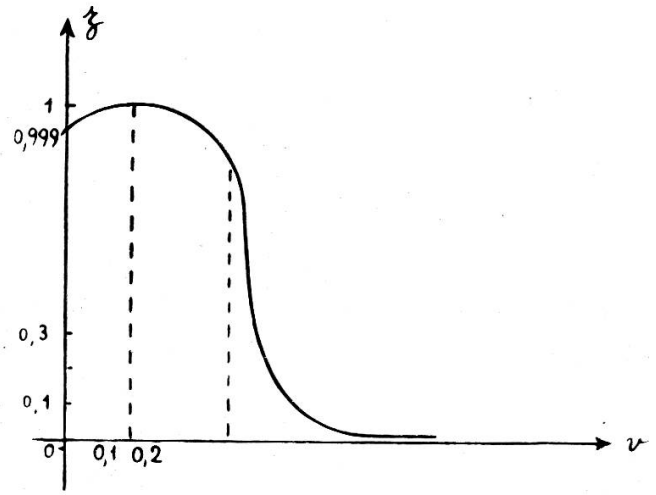

FIG. 8.

La probabilité d'avoir une vitesse comprise entre v et $v + dv$, est ainsi:

$$\lambda(v)dv = e^{-k(v^m - 0,2^m)^{2p}} dv \ . \qquad (81)$$

Dans cette dernière formule, remplaçons v en fonction de x; avec les axes adoptés au n° 24 pour l'hyperbole limi-

tative, on a, comme on a vu:

$$x = A + 2$$

$$A = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2 \ ;$$

d'où:

$$x = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} \ ; \tag{82}$$

mais:

$$\frac{r}{r_0} = 40\,000 \qquad \text{et} \qquad v_0 = 30 \text{ kilom.}$$

En différentiant l'équation (82), il vient:

$$v = \frac{3}{20}\sqrt{x} \ .$$

$$dv = 0{,}075 \frac{dx}{\sqrt{x}} \ .$$

L'expression (81) devient:

$$\lambda(v)\,dv = 0{,}075\, e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2 - (0{,}2)^4\right]^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} \ . \tag{83}$$

28. — Suivant les hypothèses que nous venons de faire sur l'angle β et la vitesse v, les fréquences des orbites elliptiques et hyperboliques des *comètes visibles* sont dans le même rapport que les deux intégrales doubles suivantes:

$$I = \int\int_{CC'KBC} \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2 - (0{,}2)^4\right]^4}}{\sqrt{x(1-y)}}\, dx\, dy \ ,$$

$$I' = \int\int_{O'CDN'} \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2 - (0{,}2)^4\right]^4}}{\sqrt{x(1-y)}}\, dx\, dy \ ,$$

les domaines d'intégration étant à lire sur la figure (7).

Pour l'intégrale I, la variable x varie de zéro à deux; tandis que pour l'intégrale I′ elle variera de deux jusqu'à N, qui est un nombre très grand. Nous pouvons commencer le calcul de I en intégrant d'abord par rapport à y:

$$\mathrm{I} = \int_0^2 \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2 - (0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\, dx \int_{\frac{1}{n}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y}} \; ; \qquad (84)$$

mais:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \left[-2\sqrt{1-y}\right]_{\frac{1}{n}}^{y}$$

de même pour l'intégrale I′:

$$\mathrm{I}' = \int_2^{\mathrm{N}} \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2 - (0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\, dx \int_{\frac{1}{n^2}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y}} \cdot \qquad (85)$$

Le résultat numérique de l'intégrale I est proportionnel au nombre des orbites elliptiques, tandis que celui de l'intégrale I′ est proportionnel au nombre des orbites hyperboliques.

Rappelons que la condition de visibilité s'écrit:

$$s > n\,.$$

Pour le calcul de I, divisons l'intervalle d'intégration de x en deux parties, de zéro à $\frac{2}{n+1}$, et de $\frac{2}{n+1}$ jusqu'à 2.

On a d'ailleurs:

$$2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{n+1}\,,$$

qui est l'abscisse du point B.

L'intégrale I s'écrit:

$$I = \int_{x=0}^{x=2}\int \frac{e^{-104\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x(1-y)}}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{2}{n+1}}\int'' + \int_{\frac{2}{n+1}}^{2}\int'' . \tag{86}$$

Dans la première partie, qui correspond à la surface $C_1'C'KB$, y varie de $\frac{1}{n}$ à 1, comme on le voit par la figure (7); d'où, pour l'intégration relative à y:

$$\left[-2\sqrt{1-y}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2\sqrt{1-\frac{1}{n}} = 2\left(1-\frac{1}{2n}\right) = 2-\frac{1}{n}\ ; \tag{87}$$

Comme n est grand, on pourra négliger $\frac{1}{n}$ devant 2, sans commettre une erreur sensible; d'où:

$$\left[-2\sqrt{1-y}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \cong 2\ . \tag{88}$$

Quant à la partie CC_1BC, c'est-à-dire à la seconde partie de (86), il faut remplacer y en fonction de x à la limite supérieure de l'intégrale relative à y. L'équation de l'hyperbole limitative donne l'expression; on a:

$$x\left(y-\frac{1}{n^2}\right) = 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où:

$$y = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}\ . \tag{89}$$

L'intégrale (84) devient ainsi:

$$\left\{\begin{aligned} I = {} & \left(2-\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{2}{n+1}} \frac{e^{-104\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx + 2\left(1-\frac{1}{2n}\right)\int_{\frac{2}{n+1}}^{2} \frac{e^{-104\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx \\ & -2\int_{\frac{2}{n+1}}^{2} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}}\cdot e^{-104\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}\,dx\ ; \end{aligned}\right. \tag{90}$$

ou bien en négligeant $\frac{1}{n}$ devant 2 dans les facteurs devant les intégrales:

$$= 2\int_0^2 \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\cdot e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx\,. \tag{91}$$

Semblablement, on obtient, pour I′, en rappelant que y varie de $\frac{1}{n^2}$ à y:

$$\mathrm{I}' = -2\int_2^N \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}}\, e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}\cdot dx\, +$$

$$+\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\int_2^N \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx\;; \tag{92}$$

ou en négligeant $\frac{1}{n^2}$ devant 2 dans le facteur de la seconde partie:

$$\mathrm{I}' = -2\int_2^N \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}}\, e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}\,dx\, +$$

$$+\,2\int_2^N \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx\,. \tag{93}$$

Il s'agit maintenant de calculer le rapport des deux intégrales (91) et (93) de I et I′. Calculons, tout d'abord, les valeurs numériques de chacune.

29. — *Calcul numérique de l'intégrale I.*

On calculera $\frac{1}{2}$ I, d'après (91).

Posons:

$$H = \int_0^2 \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2 - (0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}} \cdot dx \; ; \qquad (94)$$

et faisons, dans cette intégrale, la substitution suivante:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \; ,$$

d'où: $\sqrt{x} = t$.

L'intégrale H devient:

$$H = 2 \int_0^{\sqrt{2}} e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4 - (0,2)^4\right]^4} \cdot dt \; . \qquad (95)$$

Comme nous ne pouvons pas intégrer suivant les méthodes connues, nous allons faire un calcul direct par la méthode des trapèzes. Pour cela, dessinons la courbe représentée par la fonction à intégrer.

Posons:

$$X = e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4 - (0,2)^4\right]^4} ,$$

ou bien:

$$X = e^{-\frac{1}{10^{12}}\left(\frac{3}{2}\right)^{16}\left[t^4 - \left(\frac{4}{3}\right)^4\right]^4} .$$

Le tableau de la page suivante est suffisant pour dessiner la courbe.

La courbe représentative est donnée par la figure (9).

On constate que, entre $t = 0$ et $t = 2$, l'ordonnée X ne varie pas d'une façon sensible; par contre, à partir du

x	$t = \sqrt{x}$	X
0	0	0,999999934464
$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	0,999999949375
$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	1
4	2	0,99998249375
9	3	0,76188
16	4	0,0682894
36	6	infiniment petit
$+\infty$	$+\infty$	0

point A, où $t = 2$, X diminue rapidement. Le calcul a été fait en prenant les quatre trapèzes, H_1, H_2, H_3, H_4:

$$H = 2 \int_0^{\sqrt{2}} e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4 - (0,2)^4\right]^4} dt = 2\,(1,41405858)\ , \qquad (96)$$

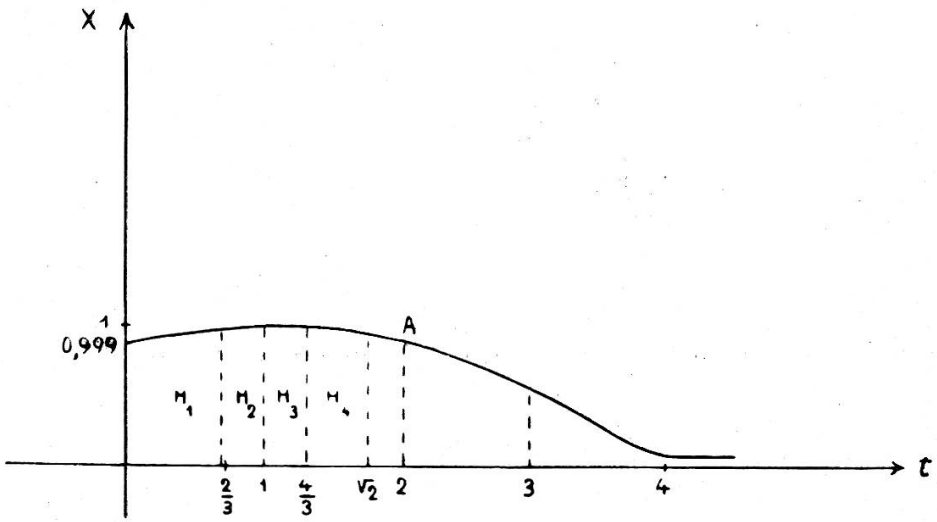

FIG. 9.

On a donc, pour la moitié de la première partie de (91):

$$\int_0^2 \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,(1,41405858)\ . \qquad (97)$$

Quant à la deuxième intégrale de (91), nous pouvons partager pratiquement son domaine d'intégration en deux parties, de $x = \frac{2}{n+1}$ à $\frac{1}{10}$, puis de $x = \frac{1}{10}$ à 2.

Pour la seconde partie de cette intégration numérique, c'est-à-dire de $x = \frac{1}{10}$ à $x = 2$, nous pouvons traiter le radical placé sous le signe d'intégration comme une constante, et lui donner sa valeur moyenne 0,9995. Le résultat ainsi obtenu ne comporte qu'une erreur inférieure au $^1/_{1000}$ de sa valeur; il est entendu que nous supprimerons le facteur 2. Cette partie de l'intégrale devient donc:

$$-\,0,9995 \int_{0,1}^{2} \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\,dx\ ;$$

et en reprenant la substitution faite sur la fonction H de (94), il vient:

$$-\,1,999 \int_{\sqrt{0,1}\,=\,0,3162}^{\sqrt{2}\,=\,1,4142} e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4-(0,2)^4\right]^4}\cdot dt\ . \qquad (98)$$

Tout calcul fait, nous obtenons le résultat numérique suivant:

$$-\,2,1927031\ .$$

Quant à la partie restante, c'est-à-dire l'intégrale comprise entre les limites $x = \frac{2}{n+1}$ et $x = \frac{1}{10}$, elle est (nous n'en

prenons toujours que la moitié):

$$-\int_{\frac{2}{n+1}}^{0,1} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \frac{e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 x^2-(0,2)^4\right]^4}}{\sqrt{x}}\, dx\,,$$

ou bien, avec $\sqrt{x} = t$ comme précédemment:

$$-2\int_{\sqrt{\frac{2}{n+1}}}^{\sqrt{0,1}} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \cdot e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4-(0,2)^4\right]^4} \cdot dt\,. \qquad (99)$$

Pour calculer la valeur numérique de cette intégrale, nous diviserons le domaine d'intégration en domaines partiels très petits en donnant à x les valeurs indiquées dans le tableau qui suit; et nous prendrons dans chacun des domaines partiels une valeur moyenne pour le radical qui se trouve sous le signe d'intégration. Par ce calcul approché, l'erreur commise est insignifiante. Dans chaque intervalle, nous calculerons la valeur numérique de l'intégrale dépouillée du radical. Remarquons que $\sqrt{1-y}$ devient nul pour:

$$x = \frac{2}{n+1}\,.$$

D'après le tableau de la page suivante la valeur numérique de l'intégrale (99) est:

$$-2\int_{\sqrt{\frac{2}{n+1}}}^{\sqrt{0,1}} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \cdot e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4-(0,2)^4\right]^4} \cdot dt = -0,566416\,. \qquad (100)$$

x	$t = \sqrt{x}$	$\sqrt{1-y}$	Valeur moyenne	$2\int_{t_1}^{t_2} e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4 - (0,2)^4\right]^4} dt$	Produit de l'intégrale par le radical
$\frac{2}{n+1}$	0,01414	0			
			0,1001	0,000579	0,000057
$\frac{1}{4800}$	0,01443	0,2002			
			0,2733	0,001299	0,000355
$\frac{1}{4400}$	0,01508	0,3465			
			0,4782	0,006399	0,003060
$\frac{1}{3000}$	0,01828	0,61			
			0,69	0,007999	0,005519
$\frac{1}{2000}$	0,0223	0,77			
			0,83	0,025399	0,021081
$\frac{1}{1000}$	0,035	0,90			
			0,925	0,019998	0,018498
$\frac{1}{500}$	0,04464	0,95			
			0,9724	0,185998	0,180864
$\frac{1}{50}$	0,143	0,9948			
			0,997	0,337996	0,336982
$\frac{1}{10}$	0,312	0,999			
					0,566416

L'expression (91) vaut donc, au total:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^{re} \text{ intégrale} & = +\ 2,8281172 \\ 2^{me} \text{ intégrale} \left\{\begin{array}{l} -\ 0,566416 \\ -\ 2,1927031 \end{array}\right\} & = -\ 2,7591191 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{I} = 0,0689981$$

30. — *Calcul numérique de l'intégrale* I′ (93).

Comme pour I, nous n'en prendrons que la moitié.

Nous pouvons considérer le radical $\sqrt{1-y}$ qui figure dans la première partie comme pratiquement constant dans l'intervalle $x = 2$ à $x = \mathrm{N} = 40000$.

En effet, pour $x = 2$ et $n = 10000$ on peut écrire:

$$\sqrt{1-y} = \sqrt{1-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} = 0{,}99995 \quad ;$$

et pour $x = 40000$:

$$\sqrt{1-y} = \sqrt{1-\frac{3}{2n^2}} = 0{,}999999998 \ .$$

Le radical ne varie donc pas beaucoup entre les deux limites indiquées; nous le traiterons comme une constante en lui donnant sa valeur moyenne: 0,999975; l'erreur commise n'est pas sensible.

Par suite l'expression (93) devient:

$$\mathrm{I}' = 2(1 - 0{,}999975)\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{N}}} e^{-10^4\left[\left(\frac{3}{20}\right)^4 t^4 - (0{,}2)^4\right]^4} \cdot dt \ . \qquad (101)$$

La courbe représentant la fonction à intégrer est la même que pour l'intégrale I.

Tous calculs faits nous obtenons la valeur:

$$\mathrm{I}' = 0{,}000094 \ .$$

31. — *Rapport des intégrales* (91) *et* (93).

Le rapport des deux intégrales I et I′ vaut à peu près:

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}'} = \frac{0{,}0689981}{0{,}000094} \sim 734 \ . \qquad (102)$$

Cette égalité montre que les orbites elliptiques sont 734 fois plus nombreuses que les orbites hyperboliques; mais il est bien entendu que cela ne concerne que les comètes visibles ($q < 4$).

32. — *Calcul de la vitesse* U, *dite vitesse relative normale.*

Nous avons établi précédemment l'expression:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2 = s(e-1) \ ,$$

où la condition de visibilité s'écrit $s > n$, ($n = 10.000$).

Dans le domaine des orbites elliptiques, la valeur de A est comprise entre -2 et zéro (voir fig. 7); par conséquent, on doit avoir:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} \leqslant 2 \ ,$$

c'est-à-dire:

$$v \leqslant v_0 \sqrt{\frac{2 r_0}{r}} \ .$$

Comme $\frac{r_0}{r} = \frac{1}{40000}$ et $v_0 = 30$ km., il faut que

$$v \leqslant 0^{\text{km}},22 \ ;$$

ainsi, la vitesse U = 0,2 adoptée précédemment est proche de cette valeur. Dans le domaine des orbites hyperboliques, comme A peut varier de zéro à N = 40000, la valeur de v peut dépasser de beaucoup la limite ci-dessus; on aura par exemple $v = 12$ km.

Il résulte de cela que si l'on prenait pour la vitesse normale U une valeur de 10 km., par exemple, la probabilité de voir réaliser des orbites elliptiques serait extrêmement minime. Mais retenons que le choix de la fonction $\lambda(v)$ est très arbitraire.

Il est à remarquer que les comètes visibles, observées jusqu'à nos jours, ont, en majorité, des orbites elliptiques ou paraboliques; les orbites hyperboliques sont très rares.

Après les corrections apportées par Fayet et Fabry aux calculs des orbites cométaires, il semble n'y avoir plus que quatre ou cinq cas d'orbites hyperboliques suffisamment distincts du type parabolique; or l'on a enregistré jusqu'à nos jours plus d'un millier de comètes. Par conséquent, avec la vitesse normale U = km 0,2, nos calculs sont en accord avec les observations. Cela n'a rien que de très naturel, puisque nous avons adopté pour U justement la valeur suggérée par les faits eux-mêmes. Nos conclusions s'appliquent, non seulement aux comètes dûment observées, mais encore à tous les corps cométaires qui sont théoriquement visibles ($q < 4$), et qui n'ont pu être observés.

CHAPITRE VI

Second exemple de $\lambda(v)$.

33. — Rappelons que nous avons donné comme loi de probabilité de la vitesse de la comète au point d'émergence, une fonction de la forme:

$$\lambda_1(v) = e^{-k(v^m - U^m)^{2p}} .$$

D'après le choix des valeurs de k, m, U, p, la forme et la position de la cloche de probabilité se modifieront; ce qui montre encore une fois combien le choix de la fonction $\lambda(v)$ est arbitraire.

Posons ici:

$$k = 100 , \quad m = 2 , \quad p = 1 , \quad U = 0{,}2 ;$$

La fonction $\lambda(v)$ devient:

$$\lambda_1(v) = e^{-100(v^2 - 0{,}2^2)^2} . \qquad (103)$$

La formule (103) donne graphiquement une cloche de probabilité dont l'ordonnée maximum est atteinte pour $v = 0{,}2$ *(fig. 10)*.

34. — La probabilité pour avoir une vitesse relative au point d'émergence comprise entre v et $v + dv$, est:

$$\lambda_1(v)\,dv = e^{-100[v^2 - (0,2)^2]^2} dv . \quad (104)$$

L'hyperbole limitative, dont nous avons parlé dans le précédent problème, reste la même; l'équation qui la représente est encore:

$$y = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} .$$

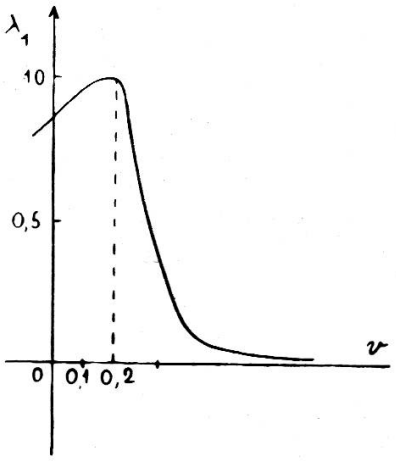

FIG. 10.

Nous poserons, comme dans le cas du chapitre V:

$$y = \sin^2 \beta \ ;$$

la probabilité de choisir une valeur de β, comprise entre β et $\beta + d\beta$ est ainsi de:

$$\frac{dy}{2\sqrt{1-y}} \ .$$

On a en outre:

$$x = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} \ ,$$

$$v = \frac{3}{20}\sqrt{x} \ ,$$

d'où:

$$dv = \frac{3}{40} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} \ .$$

En remplaçant, dans l'expression (104), dv et v par leurs valeurs respectives en fonction de x, la loi des fréquences de la vitesse relative au point d'émergence prendra la forme:

$$\lambda_1(v)\,dv = \frac{3}{40} \cdot e^{-100\left(\frac{9}{400}x-0{,}04\right)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{3}{40} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} \ . \qquad (105)$$

La probabilité qu'il y a de choisir un élément $dx\,dy$ de la surface limite de la figure (7) est donc de la forme:

$$f(x\,,y)\,dx\,dy = \mathrm{M} \,.\, \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x\,(1-y)}}\,dx\,dy \ ,$$

où M est une constante.

Ainsi, d'après les hypothèses faites sur les fréquences de v et de β, les fréquences relatives des orbites elliptiques

et hyperboliques des comètes visibles sont dans le même rapport que les deux intégrales suivantes:

$$I_1 = \int\int_{CC'KBC} \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x(1-y)}}\, dx\, dy \ ,$$

$$I_2 = \int\int_{O'CDN'} \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x(1-y)}}\, dx\, dy \ .$$

L'intégrale I_1 est proportionnelle au nombre des orbites elliptiques, et la variable x varie de $x = 0$ à $x = 2$.

Cette intégrale peut s'écrire:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{\left[-2\sqrt{1-y}\right]_{CC'KBC} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\, dx \ . \qquad (106)$$

L'intégrale I_1 proportionnelle au nombre des orbites hyperboliques peut s'écrire:

$$I_2 = \int_2^N \frac{\left[-2\sqrt{1-y}\right]_{O'CDN} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\, dx \ . \qquad (107)$$

35. — *Calcul numérique des intégrales* I_1 *et* I_2:

L'intégrale I_1 peut se décomposer comme suit:

$$I_1 = \int_0^2 = \int_0^{\frac{2}{n+1}} + \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \ ; \qquad (108)$$

et, comme précédemment:

$$\left[-2\sqrt{1-y}\right]_{C_1'C'KB} = \left[-2\sqrt{1-y}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - \frac{1}{n}\cdot \qquad (109)$$

Dans la partie $CC_1'BC$ *(fig. 7)*, y doit être remplacé en fonction de x à la limite supérieure de l'intégrale relative à y. L'équation de l'hyperbole limitative rapportée aux axes IN, IK est encore :

$$y = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\cdot$$

I_1 devient:

$$I_1 = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{2}{n+1}} \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\,dx + 2\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\int_{\frac{2}{n+1}}^{2} \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\,dx -$$

$$- 2\int_{\frac{2}{n+1}}^{2} \frac{\sqrt{1-y}\cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (110)$$

en négligeant $\frac{1}{n}$ devant 2 dans les facteurs placés devant les intégrales, nous aurons:

$$I_1 = 2\int_0^2 \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int_{\frac{2}{n+1}}^{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}\cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\,dx\,. \qquad (111)$$

Quant à I_2 pour laquelle y varie de $\frac{1}{n^2}$ à y, on obtient:

$$I_2 = -2\int_2^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}}\, e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}\,dx + \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad (112)$$

ou bien, en négligeant $-\frac{1}{n^2}$ devant 2 dans le facteur de la seconde partie:

$$I_2 = -2\int_2^N \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2} dx + 2\int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx \,. \tag{113}$$

Posons ici:

$$x = \frac{16}{9} t^2 \;;$$

les deux intégrales deviennent:

$$I_1 = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}=1,0605} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \cdot dt - \frac{16}{3}\int_{\sqrt{\frac{9}{8(n+1)}}}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{9}{8t^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \cdot dt \;; \tag{114}$$

$$I_2 = \frac{16}{3}\int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^{\frac{3\sqrt{N}}{4}=150} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \cdot dt - \frac{16}{3}\int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^{\frac{3}{4}\sqrt{N}} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}-\frac{9}{8t^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \cdot dt \,. \tag{115}$$

Comme nous cherchons le rapport $\frac{I_1}{I_2}$, les constantes $\frac{16}{3}$ placées devant les signes d'intégration disparaissent.

Le calcul numérique de ces deux intégrales se fait comme dans le problème du chapitre précédent.

Posons:

$$z = e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \,.$$

Le tableau suivant de valeurs correspondantes de t et z

est suffisant pour tracer la courbe représentant la fonction z :

t	$z = e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2}$	t	$z = e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2}$
0	0,85214	1,6	0,67773
0,2	0,86329	1,8	0,44843
0,4	0,89315	2	0,23692
0,6	0,93659	2,2	0,09451
0,8	0,97951	2,4	0,026516
1	1	2,6	0,00494
1,2	0,96957	2,8	0,00055
1,4	0,86329	3	0,00004

La courbe prend la forme indiquée par la figure 11.

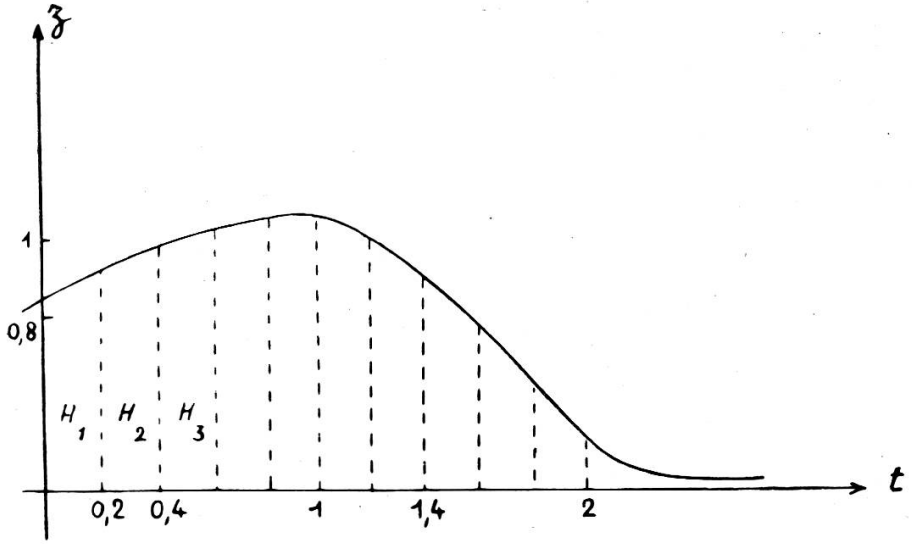

FIG. 11.

La première partie de l'intégrale I_1 s'obtient en faisant la somme des trapèzes H_i. On trouve :

$$\int_0^{1,0605} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} dt = \Sigma H_i = 0,9806 \ . \qquad (116)$$

La deuxième partie de la même intégrale peut se décomposer comme suit, en ce qui concerne la variable x:

$$\int_{\frac{2}{n+1}}^{2} = \int_{\frac{2}{n+1}}^{0,1} + \int_{0,1}^{2} .$$

Dans le domaine partiel de $x = 0,1$ à $x = 2$, comme nous l'avons montré, au chapitre V, on peut prendre une valeur moyenne égale à 0,9995 pour le radical se trouvant sous le signe d'intégration, sans que, pour cela, l'erreur commise soit supérieure à $\frac{1}{1000}$ de la valeur du résultat. Nous pouvons donc écrire, en passant à la variable auxiliaire t:

$$-0,9995 \int_{\frac{3}{4}\sqrt{0,1}=0,237}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}=1,0605} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} dt = -0,776491 . \qquad (117)$$

Pour le domaine de $x = \frac{2}{n+1}$ à $x = 0,1$, on a l'intégrale:

$$-\int_{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{n+1}}=0,010605}^{\frac{3}{4}\sqrt{0,1}=0,237} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{9}{8t^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} dt \; ; \qquad (118)$$

On partagera, comme précédemment, le domaine d'intégration en domaines partiels. Dans chacun d'eux on prendra une valeur moyenne pour $\sqrt{1-y}$; l'erreur ainsi commise n'est guère sensible. On calculera dans chacun de ces domaines partiels, l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \cdot dt .$$

L'ensemble de ce calcul est donné par le tableau suivant:

x	$t = \frac{3}{4}\sqrt{x}$	$\sqrt{1-y}$ $n = 10000$	Valeur moyenne	$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} dt$	Produit moyen du radical par l'intégrale
$\frac{2}{n+1}$	0,010605	0			
			0,1001	0,00018	0,000018
$\frac{1}{4880}$	0,0108225	0,2002			
			0,2733	0,00042	0,000114
$\frac{1}{4400}$	0,011310	0,3465			
			0,4895	0,00206	0,001008
$\frac{1}{3000}$	0,013710	0,6325			
			0,7035	0,00259	0,001822
$\frac{1}{2000}$	0,016725	0,7746			
			0,8368	0,00816	0,006828
$\frac{1}{1000}$	0,02625	0,899			
			0,9238	0,00620	0,005727
$\frac{1}{500}$	0,033480	0,9486			
			0,9717	0,06327	0,061479
$\frac{1}{50}$	0,10725	0,9948			
			0,999	0,11124	0,110906
$\frac{1}{10}$	0,237	0,990			
				Total:	0,187902

L'intégrale I_1 vaut donc:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^{re} \text{ partie:} & = +\,0{,}9806 \\ 2^{me} \text{ partie:} & \left\{\begin{array}{l} -\,0{,}776491 \\ -\,0{,}187902 \end{array}\right\} = -\,0{,}96439 \end{array}\right.$$

$$\frac{3}{16} \cdot I_1 = 0{,}01621 \ .$$

Calculons la valeur numérique de l'intégrale I_2 après division de (115) par la constante $\frac{16}{3}$; on a:

$$\frac{3}{16} \cdot I_2 = \int_{1,0605}^{150} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} \cdot dt - \int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^{\frac{3}{4}\sqrt{N}} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{9}{8t^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} dt \ .$$

Comme dans le cas du chapitre V, $\sqrt{1-y}$ ne varie pas d'une façon sensible dans l'intervalle de $x = 2$ à $x = N = 40000$. Par conséquent, en remplaçant le radical par sa valeur moyenne, entre ces deux intervalles, l'erreur commise est minime. L'intégrale I_2 devient:

$$\frac{3}{16} \cdot I_2 = (1 - 0,99975) \int_{1,0605}^{150} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5}\right)^2} dt \ . \qquad (119)$$

Tous calculs faits, on trouve:

$$\frac{3}{16} \cdot I_2 = 0,000028 \ .$$

Le rapport cherché vaut donc:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{0,01621}{0,000028} = 578 \ . \qquad (120)$$

Nous voyons donc que les orbites elliptiques sont 578 fois plus nombreuses que les orbites hyperboliques. Remarquons à nouveau que nos résultats concordent avec les faits observés jusqu'à maintenant, et qu'ils concernent les comètes visibles ($q < 4$).

36. — *Remarque. Variante au calcul du chapitre IV. Emploi du théorème des aires.*

Pour calculer les valeurs de q et e, on a, au chapitre IV, écrit deux équations qui sont: la condition de visibilité

sous l'une des formes (63) ou (64), et le théorème des forces vives (65). Montrons que l'emploi du théorème des aires rend les mêmes services que celui du théorème des forces vives et conduit à la même solution.

Reprenons l'équation de la trajectoire sous sa forme habituelle (60):

$$\rho = \frac{q(e+1)}{1 + e\cos\theta} . \tag{121}$$

Comme précédemment, partons de l'expression donnant la tangente de l'angle β formé par la vitesse relative v au point d'émergence avec la ligne comète-Soleil:

$$\operatorname{tg}\beta = \rho\frac{d\theta}{d\rho} . \tag{122}$$

Rappelons aussi qu'on a posé, en appelant r la distance au point d'émergence:

$$\frac{r}{q} = s$$

et que la condition de visibilité s'écrit:

$$s > n .$$

En remplaçant dans l'égalité (122) $\frac{d\theta}{d\rho}$ par sa valeur tirée de l'équation de la trajectoire, on trouve comme au nº 20, pour la valeur de β au point d'émergence:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\beta &= \frac{e+1}{e(s^2-1)-(s-1)^2} , \\ \sin^2\beta &= \frac{e+1}{s^2(e-1)+2s} . \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

Comme on l'a montré au chapitre IV, l'angle β est limité au domaine compris entre $\beta = 90°$ et une valeur β' donnée par:

$$\operatorname{tg}^2\beta' = \frac{1}{s^2-1} ,$$

l'excentricité passant en même temps de

$$e = \frac{(s-1)^2}{s^2-1} \quad \text{à} \quad e = \infty .$$

Le théorème des aires est :

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C_a \; ; \qquad (124)$$

C_a désigne la constante des aires, donnée, comme on sait, par l'expression :

$$C_a^2 = p\,K^2 = pf \; , \qquad (125)$$

où p est le paramètre de l'orbite $p = q\,(1 + e)$, et K la constante de Gauss.

Celle-ci est facilement calculée en partant de l'équation (51) des forces vives, que l'on applique au mouvement moyen de la Terre sur son orbite; on trouve :

$$K^2 = v_0^2\, r_0 \; ;$$

v_0 et r_0 désignent, respectivement, la vitesse moyenne de la Terre sur son orbite, et sa distance moyenne au Soleil.

La vitesse linéaire du corps mobile est, au point d'émergence $\rho = r$:

$$v \cdot \sin\beta = r\,\frac{d\theta}{dt} \; , \qquad (126)$$

tandis que l'expression (124) s'écrit alors :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_a \; ;$$

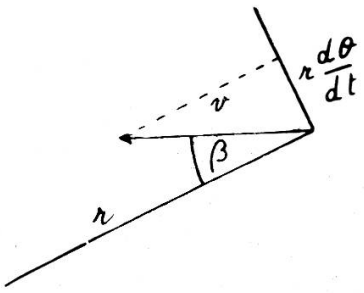

FIG. 12.

elle devient :

$$rv \cdot \sin\beta = C_a \; . \qquad (127)$$

On a alors :

$$\sin^2\beta \cdot r^2 v^2 = C_a^2 = p\,K^2 = p v_0^2\, r_0 \; ;$$

d'où :

$$\sin^2\beta \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} = \frac{q\,(1 + e)}{r} \; ; \qquad (128)$$

et comme $\frac{q}{r} = \frac{1}{s}$, on obtient finalement :

$$\sin^2\beta \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} = \frac{1 + e}{s} \; . \qquad (129)$$

Si, dans cette égalité, on remplace $\sin^2 \beta$ par sa valeur (123), on trouve :

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} = (e - 1)\, s + 2 \;;$$

on retombe donc sur l'équation du chapitre IV :

$$A = s(e - 1)\,, \tag{130}$$

où l'on a posé, comme autrefois :

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2 = A\,.$$

CONCLUSION

Laissons de côté l'influence des conditions terrestres d'observation. Les planètes, en particulier Jupiter, apportent des perturbations aux orbites des comètes, lorsque celles-ci approchent du Soleil. Il en résulte une difficulté évidente dans la détermination du caractère de l'orbite dans sa partie lointaine.

Certains astronomes, parmi lesquels il faut citer Faye et Schiaparelli, rejettent l'hypothèse d'une origine interstellaire des comètes, en invoquant l'absence ou la rareté d'orbites hyperboliques.

D'après nos hypothèses, suivant lesquelles ces astres « naissent » à une distance considérable du Soleil, distance cependant assez faible pour que l'action attractive du Soleil l'emporte de beaucoup sur l'action des étoiles, nous avons trouvé un nombre infime d'orbites hyperboliques.

Ces résultats concordent parfaitement avec les faits observés : sur un millier de comètes connues, quatre ou cinq seulement ont une orbite gardant un caractère hyperbolique.

Nous sommes donc amené à conclure en faveur de la théorie de la provenance interstellaire des comètes ; lorsque ces astres errants, par suite de circonstances particulières, entrent dans la sphère d'activité du Soleil, ils sont captés par celui-ci, temporairement ou définitivement.