**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
**Band:** 22 (1940)

**Artikel:** Étude sur la probabilité des comètes à orbite hyperbolique
**Autor:** Taalimi, Mohamed
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-741660

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 25.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# ÉTUDE

# SUR LA PROBABILITÉ DES COMÈTES A ORBITE HYPERBOLIQUE

PAR

**Mohamed TAALIMI**

(avec 11 fig.)

---

## INTRODUCTION

1. — Depuis longtemps, les astronomes se sont demandé si les comètes doivent être rattachées au système solaire, ou doivent être regardées comme des astres tout à fait étrangers à ce système.

Laplace [1] les considérait comme provenant d'un espace interstellaire; Kant [2] les rattachait au système solaire.

Plus récemment Faye confirmait l'hypothèse de Kant; tandis que Davis [3] conservait l'idée que les comètes viennent, au début, des profondeurs de l'espace pour devenir des membres attitrés de notre système.

Actuellement, les astronomes ne sont pas encore d'accord sur cette question; les uns sont de l'avis de Kant, comme Elis Strömgren [4] et Miss Clerke [5]; d'autres, comme

[1] *Connaissance des temps*, 1816: Sur les Comètes.
[2] Voir les Hypothèses cosmogoniques, de M. C. Wolf.
[3] *Philosophical Magazine*, septembre 1870 et janvier 1871: On the probable character of Cometary orbits.
[4] *Publications de l'Observatoire de Copenhague*, nos 19 et 28.
[5] History of Astronomy during the 19th century.

G. Tiercy[1] partagent l'opinion de Laplace, tout en faisant quelques réserves.

La théorie suivant laquelle les comètes viennent d'un espace interstellaire est, à première vue, très séduisante, parce qu'elle explique facilement la variété des plans des orbites et les mouvements indifféremment directs ou rétrogrades; mais permet-elle d'expliquer l'absence ou la rareté d'orbites hyperboliques ?

Telle est la question. On a essayé à plusieurs reprises d'y répondre. Avant de la reprendre de plus près, il est utile de rappeler ici, en résumé, ce que les observations ont donné.

2. — On connaissait un millier de comètes jusqu'en 1925. Une grande majorité avait des orbites de la forme parabolique. Sur 400 orbites établies jusqu'en 1910, environ 300 sont presque paraboliques; une centaine sont nettement elliptiques; et une vingtaine sont plus ou moins hyperboliques, tout en ne différant que très peu de la forme parabolique.

Parmi les comètes nettement elliptiques, une cinquantaine ont une période inférieure à un siècle; une vingtaine ont une période qui varie entre cent et mille ans, une trentaine enfin ont une période comprise entre 1000 et 10.000 ans; ces dernières périodes sont évidemment incertaines.

D'après Russell-Dugan-Stewart[2] les orbites paraboliques ont les pourcentages suivants:

$$q < 1,\ 63\%$$
$$1 < q < 2,\ 32\%$$
$$2 < q < 3,\ 4\%$$
$$q > 3,\ 1\%$$

[1] Voir *Publications de l'Observatoire de Genève*, série A, fascicule 19.
[2] *Astronomy*, I, p. 422.

en désignant par $q$ la distance périhélie. Nous pouvons conclure des données de ce tableau que les comètes à grandes distances périhélies sont rares.

D'après ce que nous avons vu, une vingtaine de comètes ont des orbites hyperboliques, du moins à leur passage dans le voisinage du soleil. L'écart le plus sensible avec le type parabolique a été enregistré, d'après Russell-Dugan-Stewart, pour la comète 1886 III avec une excentricité $e = 1{,}013$ ; mais cette comète n'ayant été observée que pendant 33 jours, son orbite n'a pu être déterminée d'une façon suffisamment précise, et l'excentricité en est douteuse. Il y a aussi parmi les orbites « hyperboliques » un certain nombre de cas peu sûrs. Par contre, il en est d'autres dont l'hyperbolicité ne fait aucun doute.

Mais ici surgit une autre question. L'orbite d'une comète, calculée à l'aide des observations, n'est valable, comme on sait, que pour un certain laps de temps, celui justement pendant lequel on a pu faire les observations; ce laps de temps est celui pendant lequel la comète était au voisinage de son périhélie; c'est donc à l'aide d'une très petite portion de l'orbite que l'on calcule l'orbite entière; on obtient ainsi en réalité une orbite osculatrice à la trajectoire effective.

Mais quelle est cette trajectoire effective ? C'est seulement vers le début du XX^e siècle qu'on s'est posé cette question, pourtant élémentaire: les grandes planètes de notre système solaire n'ont-elles pas exercé une influence importante sur la marche des comètes durant toute la période d'approche vers le Soleil ?

Ces attractions secondaires n'ont-elles pas dérangé le mouvement de la comète ?

Il s'agit là, on le voit, du calcul des « perturbations » planétaires, qui est, depuis plus de deux siècles, le problème essentiel de l'astronomie théorique. Il est pour le moins assez curieux qu'on ait attendu le XX^e siècle pour penser à l'appliquer aux trajectoires cométaires.

On a donc cherché à débarrasser les excentricités primitivement obtenues des perturbations dues aux principales

planètes. Et l'on a trouvé qu'en général les parties lointaines des orbites sont, non pas nettement hyperboliques, mais plutôt elliptiques ou très faiblement hyperboliques.

Voici, à titre d'exemple, quelques-unes des conclusions de G. Fayet [1] qui a étendu cette recherche des perturbations à un assez grand nombre de comètes:

1° Sur 24 comètes dont les observations avaient conduit à une hyperbole, on trouve qu'avant les perturbations,

14 étaient elliptiques,
9 moins hyperboliques,
1 avait la même excentricité.

2° Sur 23 comètes elliptiques au moment de l'apparition, 18 l'étaient davantage dans le passé et 5 l'étaient légèrement moins; mais aucune n'était hyperbolique.

3° Sur 99 paraboles, 84 seraient des ellipses transformées; les 15 autres semblent avoir une orbite antérieure légèrement hyperbolique.

4° Sur une dizaine de comètes hyperboliques, dont le caractère s'est maintenu lorsqu'on eut débarrassé l'excentricité des perturbations, plusieurs ont des orbites incertaines, basées sur des observations trop courtes; leur caractère hyperbolique peut être mis en doute; c'est le cas des comètes 1806 II, 1818 III, 1855 IV, 1885 II et 1887 III, cette dernière ayant une excentricité antérieure égale à 1,000108 avec une incertitude indiquée de 0,000427. Pour la comète de 1890 II, Fayet indique une excentricité antérieure de 1,0001039 et ajoute que L. Fabry avec un calcul plus rigoureux trouve une valeur inférieure à l'unité. Pour les comètes 1844 III, 1863 VI, 1898 VII et 1899 I voici les résultats de Fayet:

[1] G. Fayet, *Recherches concernant les excentricités des comètes.* Paris, 1906.

| Comète | Excentricité antérieure | Remarques |
|---|---|---|
| 1844 III | 1,0003876 en 1831, puis 0,997302 | Bond avait commis une erreur de calcul |
| 1863 VI | 1,0000176 en 1846 | Incertitude donnée par Rosen 0,0000651 |
| 1898 VII | 1,0000893 en 1873 | L'écart avec I est de l'ordre de l'incertitude |
| 1899 I | 1,0000272 en 1873 | Id. |

Malgré ces résidus « hyperboliques », Fayet pense qu'il faut considérer toutes les comètes comme appartenant à notre système.

Faisons la remarque suivante : dans le cas d'une orbite hyperbolique au moment du passage de la comète au périhélie, si l'attraction des planètes n'apporte pas une modification de retardement au mouvement de la comète sur la branche de fuite dans la même mesure à peu près où ce mouvement a été accéléré sur la branche d'approche, cette comète quittera le système solaire sur une orbite hyperbolique et ne reviendra plus. Il en résulte que, dans l'hypothèse où les comètes appartiennent depuis toujours au système solaire, celui-ci perdra de plus en plus ses membres cométaires à moins qu'il ne fasse de nouvelles captures.

## CHAPITRE PREMIER

### Hypothèse de l'appartenance au système solaire. Le doute subsiste.

3. — Admettons tout d'abord les conclusions de ceux qui, comme Fayet et Strömgren, pensent que toutes les comètes observées appartiennent, depuis toujours, au système solaire. Nous avons dit plus haut, au n° 2, que selon Fayet, la persistance de quelques orbites très légère-

ment hyperboliques, même après le calcul des perturbations planétaires, n'est pas une raison suffisante pour abandonner l'idée que toutes les comètes observées font partie de notre système.

Strömgren va plus loin; selon lui, il ne reste pas une seule hyperbole à grande distance du Soleil; de sorte que toutes les comètes seraient « périodiques », à courtes ou à longues périodes. Il faut constater que cette conclusion se base sur les résultats obtenus à la suite d'une série de calculs exacts sur les perturbations; c'est là une qualité indéniable. Mais cette qualité est-elle suffisante et décisive ? On peut en douter.

Répétons d'abord qu'il n'est pas absolument certain que toutes les orbites perdent, à grande distance du Soleil, leur caractère hyperbolique; nous avons rappelé plus haut qu'il semble subsister quelques orbites lointaines légèrement hyperboliques. C'est là déjà un motif d'incertitude. Il y en a d'autres.

Faisons par exemple la remarque suivante: c'est que les particularités systématiques qu'on pourrait relever dans les mouvements cométaires semblent pouvoir s'expliquer aussi bien dans l'hypothèse de la provenance lointaine que dans celle de l'appartenance au système solaire. Ces particularités systématiques ne sauraient donc être invoquées en faveur de l'une ou de l'autre des hypothèses. D'ailleurs, Holetschek [1] a montré que certaines de ces particularités ne sont qu'apparentes et qu'elles peuvent s'expliquer par les conditions dans lesquelles s'effectuent les observations faites de la Terre.

Notons cependant que la théorie de l'appartenance au système solaire peut exiger la mise en jeu d'une hypothèse auxiliaire pour expliquer telle ou telle particularité; par exemple, supposons qu'on ait démontré que les comètes viennent principalement de régions particulières du ciel; si l'on veut s'en tenir à la théorie en question, il faudra sup-

[1] HOLETSCHEK, *Sitzungsberichte Akad. Wien. Mathem. Naturw. Kl.*, 1883, 1889, 1890.

poser que, très loin dans notre nébuleuse, il s'est formé, par-ci par-là, des concentrations de matière, qui par la suite se sont mises en mouvement en direction du centre. Mais, si l'on admet que ces concentrations n'existent que dans notre système solaire et non au dehors, on remarquera que c'est là une hypothèse supplémentaire; c'est, si l'on veut, un nouveau motif d'incertitude.

Mais il y a encore, à notre avis, une autre cause de doute, que nous exposerons rapidement dans le numéro suivant.

4. — Nous nous plaçons dans l'hypothèse de l'appartenance au système solaire, où toutes les comètes connues décrivent des trajectoires elliptiques à plus ou moins longues périodes. Il va sans dire que ce point de vue ne saurait exclure la possibilité de voir une fois une comète nouvelle entrer dans notre système solaire en provenance du dehors, c'est-à-dire de l'espace interstellaire.

Mais alors, puisque, d'après Strömgren, aucune orbite n'est hyperbolique dans sa partie lointaine, on peut se demander pourquoi de telles arrivées du dehors ne se produisent pas.

On a tenté de donner une explication à cette carence admise. L'idée fondamentale est due à Charlier; elle repose sur certains théorèmes de la théorie des gaz, appliqués par analogie aux amas stellaires; Charlier propose, en somme, une application extensive de ces théorèmes aux masses du système galactique. Mais il faut alors mettre en jeu une hypothèse nouvelle; et c'est une nouvelle cause d'incertitude. Voyons la chose.

Comme on sait, l'idée essentielle des théories cosmogoniques actuelles est que les objets célestes proviennent des condensations qui se sont produites dans une matière nébuleuse primitivement diffuse. Il semble donc très normal d'admettre qu'il existe encore de la matière diffuse dans notre système solaire, particulièrement dans les régions très éloignées du Soleil.

Mais alors, et pour la même raison, il faut s'attendre à rencontrer de la matière nébuleuse diffuse dans les espaces

interstellaires de notre galaxie. Et s'il en est bien ainsi, cette matière nébuleuse lointaine donnera naissance à de nouvelles comètes entrant dans la sphère d'activité solaire. L'explication de Charlier tend à établir qu'il n'y a pas de matière nébuleuse dans les espaces interstellaires.

On connaît la distribution des étoiles dans les amas globulaires que l'on observe dans notre propre galaxie; les étoiles sont très fortement concentrées dans la partie intérieure de l'amas; elles se raréfient de plus en plus au fur et à mesure que la distance au centre est plus grande. Toutes ces étoiles sont continuellement en mouvement, en vertu de la loi d'attraction universelle. L'observation a montré qu'on peut décomposer les mouvements de ces étoiles de la façon suivante: tout d'abord chacune d'elles est animée d'un mouvement commandé par l'attraction collective de l'amas; en outre, il arrive que deux étoiles se rapprochent suffisamment l'une de l'autre pour que leur attraction mutuelle l'emporte sur l'attraction collective; leurs orbites sont profondément modifiées dans ces conditions.

Ces constatations ont donné lieu à une comparaison intéressante; on a remarqué qu'il y avait là une curieuse analogie avec ce qui se passe dans une masse gazeuse, où le molécules se rencontrent et voient leurs orbites modifiées de ce fait.

D'ailleurs l'étude des mouvements des molécules de gaz a montré que, dans une masse gazeuse globulaire, les molécules s'arrangent en fin de compte de sorte que la densité de la masse a son maximum au centre et diminue au fur et à mesure que la distance au centre est plus grande.

C'est exactement la constatation faite dans le cas des amas stellaires globulaires.

Il était naturel d'exploiter cette analogie; et l'on a étendu aux amas stellaires cet autre théorème de la théorie des gaz, suivant lequel les molécules les plus grosses prennent finalement de faibles vitesses, tandis que les molécules les plus petites prennent de grandes vitesses.

Ainsi, dans un amas, après un temps plus ou moins long, les choses s'arrangeront de telle sorte que les étoiles les

plus grandes seront animées de faibles vitesses, tandis que les étoiles de petites masses auront pris de grandes vitesses.

Jusque-là, rien que de très admissible. Mais voici maintenant l'idée de Charlier qui constitue une extension de ce théorème à toute notre galaxie: les masses nébuleuses diffuses qui subsisteraient dans les espaces interstellaires seraient (mais c'est là une hypothèse) les plus petites masses indépendantes de notre lentille galactique; en conséquence, en vertu du théorème rappellé plus haut, elles prendraient avec le temps de grandes vitesses ; et même ces vitesses deviendraient si considérables que ces masses seraient expulsées de la galaxie.

Ainsi, il n'y aurait plus de matières nébuleuses diffuses dans les espaces interstellaires ; de sorte qu'il n'y aurait plus aucune possibilité de voir une fois une comète nouvelle entrer dans notre système solaire en provenance du dehors.

L'explication est ingénieuse. Mais on a remarqué qu'elle est basée sur une hypothèse nouvelle; et c'est là une nouvelle cause évidente de doute.

Ainsi, pour nous, le doute subsiste. Et il vaut la peine de reprendre l'idée de la provenance lointaine des comètes, afin d'en examiner à nouveau les résultats.

## CHAPITRE II

### Formules de Laplace retouchées par L. Fabry [1].

5. — Prenons une comète venant d'un espace lointain, au moment où elle entre dans la sphère d'activité du Soleil. Nous désignerons par $v$ sa vitesse et par $r$ sa distance d'émergence au Soleil, $a$, $e$, $q$, le demi grand axe, l'excentricité et la distance périhélie de l'orbite qu'elle va décrire autour du Soleil.

[1] L. Fabry, *Etude sur la probabilité des comètes hyperboliques* (Paris, 1895). Masson.

Désignons enfin par $\beta$ l'angle de la vitesse $v$ avec le rayon vecteur $r$, la direction de ce rayon étant prise de la comète vers le Soleil. L'équation générale d'une conique est de la forme:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \omega} .$$

Les trois sortes de coniques sont caractérisées par les valeurs de $e$:

$e < 1$ ellipse,
$e = 1$ parabole,
$e > 1$ hyperbole.

La théorie du mouvement des corps célestes donne [1]:

$$a(1 - e^2) = \frac{k^2}{f} ,$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{f} .$$

D'autre part, on a les relations:

$$k = rv \sin \beta ,$$
$$q = a(1 - e) ;$$

la valeur $a$ est positive dans le cas d'un mouvement elliptique, et négative dans le cas d'une orbite hyperbolique. Si nous cherchons la valeur de $\sin \beta$ en remplaçant $q$, $r$, $f$, par leurs valeurs respectives, nous aurons:

$$\sin^2 \beta = \frac{f}{r^2 v^2}\left(2q - \frac{2q^2}{r} + \frac{q^2 v^2}{f}\right) ; \qquad (1)$$

d'où :

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = \frac{1 - \frac{q}{r}}{r^2 v^2}\left[r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf\right] , \qquad (2)$$

et

$$1 - \cos \beta = 1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf} . \qquad (3)$$

[1] Voir le *Traité de mécanique céleste* de M. TISSERAND, tome I, page 99.

La formule (3) s'applique aux valeurs de $\beta$ comprises entre zéro et 90°; pour une valeur de $\beta$ variant entre 90° et 180°, il faut dans le second membre changer le signe du radical. La probabilité pour que la direction d'une vitesse fasse avec le rayon vecteur un angle compris entre $\beta$ et $\beta + d\beta$ est:

$$\frac{2\pi \sin \beta \, d\beta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \beta \, d\beta \, . \tag{4}$$

Le nombre des cas favorables et le nombre des cas possibles sont entre eux comme la surface découpée dans la sphère de rayon 1, ayant pour centre la comète, par deux cônes de révolution dont les génératrices font avec le rayon vecteur les angles $\beta$, $\beta + d\beta$ et la surface entière de la sphère de rayon 1.

La probabilité que la vitesse fasse avec le rayon vecteur un angle entre zéro et $\beta$ est donc:

$$\frac{1}{2} \int_0^\beta \sin \beta \, d\beta = \frac{1}{2} (1 - \cos \beta) \, . \tag{5}$$

Pour $\beta$ variant entre 90° et 180° la comète commence par s'éloigner du Soleil; si l'orbite est hyperbolique, elle s'éloignera de plus en plus, si l'orbite est elliptique il y a des chances qu'elle sorte complètement de la sphère d'activité du Soleil et qu'elle tombe dans le champ d'activité d'autres étoiles. Nous considérerons donc toute comète, pour laquelle $\beta$ est entre 90° et 180°, comme ne devant pas venir passer près du Soleil; par conséquent nous prendrons les seules valeurs de $\beta$ inférieures à 90°.

Pour une valeur donnée de la vitesse $v$, $\beta$ variant entre zéro et 90°, $q$ augmente continuellement avec $\beta$; en effet en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport au paramètre $q$ nous aurons:

$$\frac{d \sin^2 \beta}{dq} = \frac{2f}{r^2 v^2} \left(1 - \frac{q}{a}\right) \cdot \tag{6}$$

Comme la quantité :

$$\frac{q}{a} = 1 - e$$

est toujours plus petite que 1 lorsque $a$ est positif, et négative lorsque $a$ est négatif, l'équation (6) est toujours une quantité positive, donc $q$ augmente constamment lorsque $\beta$ augmente de zéro à 90°. Il en résulte que, $v$ ayant une valeur fixe donnée, la probabilité qu'il y a pour que la comète vienne passer près du Soleil avec une distance périhélie inférieure à $q$ est la même que la probabilité pour que la direction de sa vitesse soit entre zéro et $\beta$, la valeur de $\beta$ étant celle donnée par l'équation (1) qui correspond à une distance périhélie donnée. Donc cette probabilité de visibilité est :

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv}\sqrt{r^2 v^2\left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf}\right]. \qquad (7)$$

Le nombre des comètes ayant une vitesse comprise entre $v$ et $v + dv$, qui se trouvent à l'intérieur d'une unité de volume située dans la région considérée de l'espace, vers la limite de la sphère d'activité du Soleil, peut être représenté par $\varphi(v)\,dv$; $\varphi(v)$ est une certaine fonction de $v$. Le nombre des comètes visibles s'obtient en multipliant l'expression (7) par $\varphi(v)\,dv$. On entend par comètes *visibles* celles qui ont une distance périhélie plus petite que $q$, $q$ étant choisi, par exemple $q = 4$.

D'après ce que nous venons de dire le nombre des comètes visibles dont la vitesse est comprise entre $v$ et $v + dv$ qui se trouvent dans une unité de volume dans la région de l'espace considéré est :

$$\frac{\varphi(v)}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv}\sqrt{r^2 v^2\left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf}\right] dv\,. \qquad (8)$$

Le nombre des comètes visibles, dont la vitesse initiale est entre deux limites choisies $v_1$ et V, et se trouvant dans l'unité de volume est:

$$\int_{v_1}^{V} \frac{\varphi(v)}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf} \right] dv \ . \quad (9)$$

6. — Laplace suppose que la vitesse $v$ peut prendre toutes les valeurs possibles de zéro jusqu'à une certaine limite U, de manière que la fonction $\varphi(v)$ est constante pour les valeurs de $v$ inférieures à U et nulle pour $v > U$. Le nombre total des comètes situées à l'intérieur de chaque unité de volume, dans la région considérée de l'espace, est:

$$\int_{0}^{U} \varphi(v)\, dv = U\varphi \ , \quad (10)$$

$\varphi$ désignant la valeur constante de $\varphi(v)$.

En divisant l'expression (9) par l'équation (10) et en y remplaçant $\varphi(v)$ par sa valeur constante nous obtenons:

$$\frac{1}{2U} \int_{v_1}^{V} \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf} \right) dv \ . \quad (11)$$

L'expression (11) représente le rapport du nombre des comètes visibles de vitesses comprises entre $v_1$ et V et renfermées dans une unité de volume, au nombre total des comètes renfermées dans la même unité de volume; et si nous admettons que la valeur de $\varphi$ est la même pour toutes les régions de l'espace situées vers la limite de la sphère d'activité du Soleil, nous pouvons dire que: si nous considérons, à une très grande distance du Soleil, dans les régions de l'espace où son attraction devient insensible, un volume quelconque, par exemple un volume limité par deux sphères de très grand rayon ayant le Soleil pour centre, l'expression (11) représente le rapport du

nombre des comètes visibles dont la vitesse est entre $v_1$ et V et qui sont contenues dans ce volume, au nombre total des corps cométaires qui s'y trouvent renfermés.

Laplace simplifie l'expression (11) en posant:

$$\sigma = V\sqrt{r}\,;$$

et, en utilisant un développement en série convenable, il remplace (11) par l'expression suivante:

$$\frac{\sqrt{2qf}}{2Ur}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{qf}{2\sigma Ur\sqrt{r}}\,. \tag{12}$$

D'après Laplace c'est cette expression qui représente la probabilité pour que la distance périhélie soit plus petite que $q$ et que la vitesse initiale soit inférieure à $\frac{\sigma}{\sqrt{r}}$.

Au moyen de la formule (12), on trouve finalement qu'on a une trajectoire cométaire sensiblement hyperbolique pour 5713 qui ne le sont pas.

7. — Utilisant des remarques de Gauss et de Schiaparelli, L. Fabry a fait plusieurs rectifications au calcul de Laplace. Il remplace finalement la formule (12) par la formule (13) dont nous ne voulons pas ici refaire le calcul de détail:

$$\frac{1}{2U}\left[\frac{\sqrt{2qf}}{r}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{q}{2r}\right)+\frac{1}{2}\frac{q^2}{2r^2}\left(V-\frac{2f}{Vq}\right)\right], \tag{13}$$

où la valeur de U ne peut pas être supposée infinie, comme Laplace l'admettait.

On peut alors calculer sans peine le rapport entre le nombre des comètes visibles à trajectoires non sensiblement hyperboliques et le nombre des comètes à orbites sensiblement hyperboliques; ce rapport est le suivant:

$$\frac{\sqrt{2qf}\,\frac{\pi}{2}\,(2r-q)+q^2\left(V-\frac{2f}{Vq}\right)}{q^2\left[U-V-\frac{2f}{q}\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\right)\right]}\,; \tag{14}$$

V est la vitesse qui correspond au demi-grand axe (— 100 R ou à tout autre demi-grand axe choisi pour séparer les orbites sensiblement hyperboliques de celles qui ne le sont pas). Quant à U, c'est la limite supérieure des vitesses, sur laquelle il faudra bien faire une hypothèse.

8. — Valeur numérique de la formule (14). — Prenons avec Laplace:

$$q = 2\,\mathrm{R}\ , \qquad r = 100\,000\,\mathrm{R}\ , \qquad a = -100\,\mathrm{R}\ ;$$

et donnons à U les valeurs successives: 1, 10, 100 ... fois la vitesse de la Terre qui n'est autre que $\sqrt{\frac{f}{\mathrm{R}}}$.

La vitesse V sera donnée par:

$$-\frac{1}{100\,\mathrm{R}} = \frac{2}{100\,000\,\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{V}^2}{f}\ .$$

En faisant R = 1 et $f = 1$, ce qui revient à prendre le rayon de l'orbite terrestre pour unité de longueur, et la vitesse de la Terre sur son orbite pour unité de vitesse, on aura:

$$\frac{1}{\mathrm{V}} = 9{,}99001\ .$$

En prenant les valeurs 1, 10 et 100 pour U, la formule (14) prend successivement les valeurs suivantes:

| | |
|---|---|
| pour U = 1 . . . . . | 15881,66 , |
| » U = 10 . . . . . | 7936,78 , |
| » U = 100 . . . . . | 1429,45 . |

Nous voyons donc que les orbites sensiblement hyperboliques sont très rares avec les suppositions que nous avons faites, car il ne devrait y avoir, dans les cas ci-dessus, qu'une orbite sensiblement hyperbolique pour 15881, ou 7936 ou 1429 qui ne le seraient pas.

En cherchant le rapport du nombre des comètes à trajectoires elliptiques au nombre des comètes à orbites

hyperboliques, on trouvera des nombres plus faibles, mais encore très grands. Dans ce cas on a:

$$V = \sqrt{\frac{2f}{r}} ;$$

et si on prend encore:

$$q = 2 , \quad r = 100\,000 , \quad R = 1 , \quad f = 1 ,$$

on trouve:

| | | |
|---|---|---|
| pour | U = 1 . . . . . | 701,49 , |
| » | U = 10 . . . . . | 671,75 , |
| » | U = 100 . . . . . | 484,73 . |

On voit donc que, pour U égale à 100 fois la vitesse terrestre, il y a 485 orbites elliptiques contre une seule hyperbolique.

Le facteur $r$, se trouvant dans le premier terme du numérateur de la formule (14) n'est autre que le rayon de la sphère d'activité du Soleil; on voit que les orbites hyperboliques sont d'autant plus rares que $r$ est grand. Tels sont les résultats qu'on obtient avec le calcul de Laplace retouché par Fabry. Il est bon de rappeler que ce calcul s'applique au cas où toutes les vitesses sont également probables, entre zéro et une certaine limite U; d'ailleurs le calcul ne tient pas compte du mouvement propre du Soleil dans l'espace.

## CHAPITRE III

### Les idées de Schiaparelli. Revision de l'analyse de L. Fabry.

9. — Schiaparelli [1] a, le premier, pris en considération le mouvement propre du Soleil, tandis que, dans le calcul

[1] SCHIAPARELLI, *a*) Sulla relazione fra le comete, le stelle cadenti ed i meteoriti; *b*) Note dans les *Rendiconti del Reale Istituto lombardo*, série II, t. VII; *c*) Note dans le *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 285.

de Laplace, on considérait le Soleil comme immobile. La méthode de Schiaparelli a été reprise par L. Fabry dans sa nouvelle étude de la question[1]. Le résultat essentiel des mémoires de Schiaparelli est résumé dans la phrase suivante: « Si les comètes observées ne donnent que de rares exemples d'orbites hyperboliques, on est conduit à admettre que le mouvement relativement au Soleil des corps cométaires répandus dans l'espace est très petit ».

Autrement dit, lors de leur entrée dans la sphère d'activité du Soleil, les masses cométaires sont animées, par rapport au Soleil, d'une vitesse relative très petite. Si l'on tient compte du mouvement propre du Soleil, cette conclusion s'impose, en face des faits observés.

Elle se rapproche en tout cas de l'idée que G. Tiercy exprimait récemment[2] sous la forme suivante: « il serait naturel d'admettre une certaine vitesse relative, *normale* pour ainsi dire, dont la fréquence serait maximum; une autre vitesse aurait alors d'autant moins de probabilité qu'elle s'écarterait davantage de cette vitesse normale ». Nous reviendrons à cette idée dans les derniers chapitres de ce travail.

Pour l'instant, il convient de rappeler les propositions suivantes énoncées par Schiaparelli dans le Bulletin astronomique, en résultat de l'application de sa méthode: Si l'on suppose que toutes les valeurs des vitesses absolues des corps répandus dans l'espace sont également probables depuis zéro jusqu'à une certaine limite U et que le Soleil est animé d'une vitesse propre H, alors, pour les comètes qui approchent du Soleil à une distance moindre qu'une certaine limite fixe:

1° les hyperboles seront la forme la plus fréquente des orbites; elles seront d'autant plus prédominantes que la valeur de H sera plus grande;

2° les asymptotes de la branche descendante de ces hyperboles ne seront pas uniformément distribuées

[1] L. Fabry, loc. cit.
[2] G. Tiercy, loc. cit.

autour du Soleil; il y aura dans la direction de l'apex du mouvement solaire un maximum de fréquence d'autant plus prononcé que la vitesse H sera plus considérable.

Ces propositions de Schiaparelli ont été confirmées par les résultats de l'analyse de L. Fabry; nous en reparlerons plus loin.

Nous nous bornerons ici à insister encore sur la conclusion inévitable à laquelle on est amené, après la lecture des propositions ci-dessus rappelées, par la constatation qu'en fait les comètes observées ne fournissent que très peu d'exemples d'orbites hyperboliques: c'est que le mouvement, relativement au Soleil, de la matière cométaire répandue dans l'espace intersidéral est très petit.

Il convient maintenant de donner quelques détails sur l'importante analyse de Fabry.

10. — La première partie se rapporte encore au cas où l'on suppose le Soleil immobile dans l'espace comme dans les recherches de Laplace.

Désignons par C une comète située à une distance $r$ très éloignée du Soleil S, par $v$ sa vitesse et enfin par $\beta$ l'angle de la vitesse $v$ avec le rayon vecteur $r$. Soit $k$ le double de l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'unité de temps et $a$, $e$, $q$, respectivement le demi-grand axe, l'excentricité et la distance périhélie. On a, comme on a vu:

$$\left\{\begin{aligned} k &= rv \sin\beta \,, \\ a(1-e^2) &= \frac{k^2}{f} = \frac{r^2 v^2 \sin^2\beta}{f} \,, \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - \frac{v^2}{f} \,, \\ q &= a(1-e) \;; \end{aligned}\right. \tag{15}$$

d'où l'on tire pour la vitesse $v$:

$$v^2 = \frac{2fq\left(1-\frac{q}{r}\right)}{r^2\sin^2\beta - q^2} \,. \tag{16}$$

Prenons la dérivée de cette expression par rapport à la distance périhélie $q$, on obtient:

$$\frac{dv^2}{dq} = \frac{2f(r\sin\beta - q)^2 + 2qr\sin\beta(1 - \sin\beta)}{(r^2\sin^2\beta - q^2)^2}. \qquad (17)$$

L'angle $\beta$ étant compris entre 0° et 180°, le second membre de cette dernière équation est toujours positif; si donc $r$ et $\beta$ gardent les mêmes valeurs, $q$ augmente ou diminue suivant que $v$ augmente ou diminue; et pour que la distance périhélie de la comète soit inférieure à une distance donnée d'avance, il suffit que sa vitesse soit inférieure à la valeur donnée par l'équation (17). Fabry

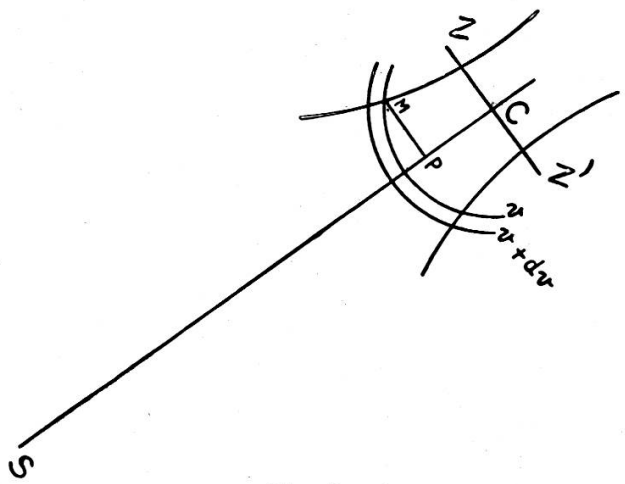


Fig. 1.

adopte ici la représentation géométrique de Schiaparelli.

En considérant $v$ et $\beta$ comme les coordonnées polaires d'un point du plan autour du point C, l'équation (17) représente une hyperbole ayant pour axe imaginaire la droite CS *(fig. 1)*.

Pour que la distance périhélie de la comète soit inférieure à une valeur $q$, il faut, et il suffit que l'extrémité de la droite représentant sa vitesse soit à l'intérieur de l'hyperboloïde de révolution à une nappe engendré par la rotation de cette hyperbole autour de l'axe CS.

Il suffit, comme il est facile de s'en rendre compte, de considérer les valeurs de $\beta$ comprises entre 0° et 180°,

c'est-à-dire les comètes pour lesquelles l'extrémité du vecteur vitesse est à l'intérieur de la moitié de l'hyperboloïde tournée vers le Soleil et limitée par un plan $zz'$ passant par C perpendiculairement à CS.

On appelle comètes *visibles* celles qui ont une distance périhélie au plus égale à un petit nombre de fois le demi-grand axe R de l'orbite de la Terre; par exemple: $q \leqslant 4\,\mathrm{R}$. De l'équation (16) on tire facilement les carrés des axes de l'hyperbole en question:

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= \frac{2fq}{r^2 - q^2}\left(1 - \frac{q}{r}\right) = \frac{2fq}{r^2\left(1 + \frac{q}{r}\right)}, \\ \mathrm{B}^2 &= \frac{2f}{q}\left(1 - \frac{q}{r}\right); \end{aligned}\right. \tag{18}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2} = 1 - \frac{q^2}{r^2}. \tag{19}$$

Le sinus de l'angle formé par les asymptotes de (16) avec l'axe CS vaut $\frac{q}{r}$, ce qu'on peut écrire $\frac{\mathrm{R}}{r} \cdot \frac{q}{\mathrm{R}}$; sa valeur est donc égale au produit par $\frac{q}{\mathrm{R}}$ de la parallaxe annuelle du point C. Il en résulte que l'*hyperboloïde de visibilité* est extrêmement allongé. Il résulte aussi de la petitesse de $\frac{q}{r}$ que les formules (18) peuvent s'écrire plus simplement comme suit, et cela sans erreur sensible:

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= \frac{2fq}{r^2}, \\ \mathrm{B}^2 &= \frac{2f}{q}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ces formules sont d'autant meilleures que $r$ est plus grand.

11. — Quelles sont maintenant les comètes qui ont des orbites hyperboliques ? La solution de ce problème s'obtient en recherchant essentiellement les comètes dont la

vitesse est comprise entre deux limites $v_1$ et V, étant entendu qu'il faudra donner à $v_1$ et V des valeurs convenables.

Désignons par $\varphi(v)dv$ le nombre des comètes placées dans l'unité de volume en $C$, et dont la vitesse est comprise entre $v$ et $v + dv$.

Admettons en outre que les vitesses sont également distribuées dans toutes les directions (ce qui est d'ailleurs très arbitraire).

La sphère de rayon $v$ tracée autour de C est coupée par l'hyperboloïde de visibilité *(fig. 1)*, qui en détache une surface $s$.

Si l'on désigne par S la surface entière de la sphère, la fraction $\frac{s}{S}$ représente le rapport entre le nombre des comètes contenues dans l'unité de volume en C qui deviendront *visibles* et le nombre total des comètes de ce volume. Ainsi, le nombre des corps cométaires qui deviendront visibles ($q$ égale à quelques unités) est donné par le produit:

$$\varphi(v)\frac{s}{S}dv \quad . \tag{21}$$

Le rapport $\frac{s}{S}$ s'obtient sans difficulté à l'aide de la figure (1).

Du point M, intersection de l'hyperboloïde avec la sphère de rayon $v$, menons la perpendiculaire MP sur l'axe CS et désignons la longueur MP par $b$, on a:

$$s = 2\pi v(v - \sqrt{v^2 - b^2}) \ , \tag{22}$$

$$S = 4\pi v^2 \ ; \tag{23}$$

d'où:

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{v^2}}\right) \ ; \tag{24}$$

en outre, on tire de l'équation de l'hyperboloïde:

$$1 - \frac{b^2}{v^2} = \frac{B^2}{A^2 + B^2}\left(1 - \frac{A^2}{v^2}\right) \ ; \tag{25}$$

de sorte que l'expression (21) s'écrit:

$$\frac{1}{2}\varphi(v)\left(1-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right)dv\ ;$$

et, en remplaçant $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ par sa valeur (19):

$$\frac{1}{2}\varphi(v)\left(1-\sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right)dv\ . \qquad (26)$$

En représentant par I l'intégrale de l'expression (26) prise entre les deux limites $v_1$ et V, nous aurons une expression donnant le nombre des orbites dont le grand axe est compris entre certaines limites:

$$I=\int_{v_1}^{V}\frac{1}{2}\varphi(v)\left[1-\sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right]dv\ . \qquad (27)$$

12. — Il est à remarquer que la formule ci-dessus ne convient que si $v_1$ est inférieur à l'axe A; sinon, la sphère de rayon $v_1$ ne couperait plus l'hyperboloïde de visibilité. Pour les vitesses comprises entre 0 et A, le rapport $\frac{s}{S}$ est à remplacer par $\frac{1}{2}$; de sorte que l'intégrale correspondant à ces limites est:

$$\int_0^A\frac{1}{2}\varphi(v)\,dv\ . \qquad (28)$$

Si donc nous voulons le nombre des comètes visibles, de vitesses comprises entre 0 et V, et placées dans l'unité de volume en C, il faut écrire:

$$I'=\int_0^A\frac{1}{2}\varphi(v)\,dv+\int_A^V\frac{1}{2}\varphi(v)\left[1-\sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right]dv\ . \qquad (29)$$

Si maintenant nous considérons l'espace situé entre les deux sphères de rayons $r$ et $r + dr$ ayant le Soleil pour centre, le nombre des comètes visibles de vitesses comprises entre O et V qui s'y trouvent est égal à $4\pi r^2 dr.\mathrm{I}'$; si on le représente par $\mathrm{J}.dr$, on a, dans l'hypothèse que $\varphi(v)$ est indépendante de la direction:

$$\mathrm{J}.dr = \mathrm{I}' \times 4\pi r^2 dr \ . \tag{30}$$

Ainsi le nombre des comètes visibles, de vitesses comprises entre 0 et V, qui se trouvent dans la couche limitée par les sphères de rayons $r$ et $r + 1$, est donné par:

$$\mathrm{J} = 2\pi r^2 \int_0^{\mathrm{A}} \varphi(v)\, dv + \pi r^2 \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{V}} \varphi(v) \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{\mathrm{A}^2}{v^2}} \right] dv \ ; \tag{31}$$

cette formule est applicable au cas général, où $\mathrm{V} > \mathrm{A}$; si $\mathrm{V} < \mathrm{A}$ on aura plus simplement:

$$\mathrm{J} = 2\pi r^2 \int_0^{\mathrm{V}} \varphi(v)\, dv \ . \tag{32}$$

13. — L'application numérique de I' et J nécessite la connaissance de la fonction $\varphi(v)$; mais cette dernière n'est pas connue. Si l'on suppose $\varphi(v) =$ const., on retrouve des résultats analogues à ceux établis au n° 8. La conclusion essentielle en est que, si $\varphi(v)$ est constante, les comètes visibles à orbites hyperboliques sont très rares relativement à celles dont les orbites ne diffèrent qu'insensiblement de la parabole.

C'est, en somme, le résultat de Laplace. Il n'est pas suffisamment convaincant, puisque le Soleil a été tenu pour immobile, et que $\varphi(v)$ a été supposé constante.

Il va sans dire que si l'on fait sur $\varphi(v)$ une autre hypothèse, les résultats numériques dépendront de la nature de cette hypothèse. Nous reverrons ce point par la suite.

Tout cela se rapporte encore à la première partie de l'étude de Fabry, où l'on faisait abstraction du mouvement propre du Soleil. Il est temps maintenant de tenir compte de ce mouvement propre.

14. — Dans cette seconde partie, Fabry utilise encore la représentation géométrique de Schiaparelli.

Indiquons ici que, d'après les calculs récents, le Soleil se déplace avec une vitesse d'environ 20 km à la seconde, vers un point de la sphère céleste, dont les coordonnées sont les suivantes:

$$AR = 18^h ,$$
$$\delta = + 28^o .$$

Soit $h$ la vitesse absolue d'une comète née au point C *(fig. 2)*. Désignons par CE la vitesse $h$ et par CD = H la vitesse du Soleil transportée au point C. La vitesse relative de la comète par rapport au Soleil n'est autre que la composante $v$ représentée par la droite DE. Pour que la comète considérée en C vienne passer près du Soleil à une distance périhélie inférieure à $q$ il faut que l'extrémité de sa vitesse absolue soit à l'intérieur de l'hyperboloïde de visibilité, mais transporté parallèlement à lui-même de façon que son centre soit au point D, et non plus en C.

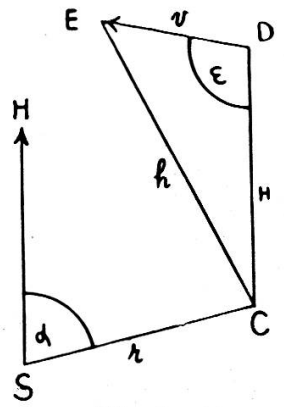

Fig. 2.

Cherchons, parmi les comètes placées au point C, celles dont la vitesse *relative* $v$ initiale est entre certaines limites données. Du point D décrivons deux sphères de rayons $v$ et $v + dv$, qui découpent, dans la moitié de l'hyperboloïde tournée vers le Soleil, le volume MNM'N' *(fig. 3)*. Pour avoir le nombre des comètes *visibles* placées en C dont la vitesse *relativement au Soleil* est entre $v$ et $v + dv$, il faut chercher le nombre des comètes dont l'extrémité de la vitesse est dans le volume MNM'N'. Ce volume est extrê-

mement petit, nous le savons. En appelant $b$ comme précédemment la distance du point M à l'axe de l'hyperboloïde, la valeur de ce volume est, à très peu près:

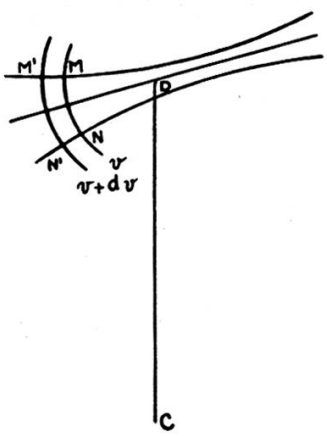


Fig. 3.

$$\pi b^2 d\rho \ .$$

Mais $b$ est déjà calculée, au n° 11; en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur on trouve:

$$\pi b^2 d\rho = \frac{2\pi f q}{r^2}\left(1 + \frac{q\rho^2}{2f}\right) d\rho \ . \qquad (33)$$

Cela posé, désignons par $\varphi(h)\,dh$ le nombre des comètes qui sont dans l'unité de volume autour du point C, et dont la vitesse absolue est comprise entre $h$ et $h + dh$. Les extrémités de ces vecteurs sont toutes dans l'intérieur du volume compris entre deux sphères de centre C et de rayons $h$ et $h + dh$; ce volume est égal à $4\pi h^2 dh$. On suppose encore que ces vitesses sont réparties également dans toutes les directions. Prenons alors un volume infiniment petit situé à une distance $h$ du point C, et appelons $u$ sa valeur; le nombre des comètes situées dans l'unité de volume en C et dont les extrémités des vitesses tombent dans $u$ est donc:

$$\varphi(h)\,dh \times \frac{u}{4\pi h^2 dh} = \frac{\varphi(h)}{4\pi h^2} u \ . \qquad (34)$$

Prenons alors pour $u$ le petit volume MNM'N' de valeur (33); le nombre de comètes ci-dessus devient $\chi$:

$$\chi = \varphi(h) \frac{fq}{2r^2 h^2}\left(1 + \frac{q\rho^2}{2f}\right) d\rho \ . \qquad (35)$$

C'est le nombre des comètes visibles placées dans l'unité de volume autour du point C et dont la vitesse relative au Soleil est comprise entre $\rho$ et $\rho + d\rho$.

Si l'on veut que les vitesses relatives soient comprises entre zéro et V, il faut intégrer l'équation (35) de $\rho = 0$

à $v = V$. Or $h$ est une fonction de $v$ donnée par la relation *(fig. 2)*:

$$h^2 = v^2 - 2vH \cos \varepsilon + H^2, \tag{36}$$

où $\varepsilon$ est l'angle CDE formé par la vitesse relative $v$ avec DC.

En désignant par $I_\varepsilon$ le nombre des comètes visibles situées dans l'unité de volume autour du point C et dont la vitesse relative est inférieure à V on a pour une valeur de $\varepsilon$:

$$I_\varepsilon = \frac{fq}{2r^2} \int_0^V \varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \varepsilon + H^2}) \times \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \varepsilon + H^2} dv \ . \tag{37}$$

En représentant la quantité écrite sous le signe d'intégration par $f(v, \varepsilon)$ on a:

$$I_\varepsilon = \frac{fq}{2r^2} \int_0^V f(v, \varepsilon) dv \ ; \tag{38}$$

et pour toutes les valeurs de $\varepsilon$, de 0 à $\pi$ on a:

$$I' = \frac{fq}{2r^2} \int_0^\pi \int_0^V f(v, \varepsilon) dv \, d\varepsilon \ . \tag{39}$$

Cherchons maintenant le nombre des comètes visibles, de vitesses relatives inférieures à V, se trouvant non plus dans l'unité de volume en C, mais dans l'espace limité par deux sphères centrées sur le Soleil et de rayons $r$ et $r + dr$.

On peut procéder ici comme au n° 12, où on a multiplié I′ par le volume $4\pi r^2 dr$ de la couche d'épaisseur $dr$.

Le nouvel I′ de la formule (39) comprend en effet sous le signe intégral une fonction $f(v, \varepsilon.)$ qui dépend de l'angle $\varepsilon$. Or cet angle $\varepsilon$ ne dépend pas de $\alpha$.

Prenons d'abord le volume de l'anneau limité par les sphères $r$ et $r + dr$ et par les cônes $\alpha$ et $\alpha + d\alpha$ tracés autour de la vitesse solaire H. Ce volume annulaire vaut $2\pi r \sin \alpha \, . \, r \, d\alpha . dr = 2\pi r^2 \sin \alpha \, d\alpha \, dr$. De sorte que le

nombre des comètes de vitesse relative inférieure à V et contenues dans cet anneau est I″:

$$I'' = \pi f q \sin\alpha \, dr \, d\alpha \int_0^{\pi} \int_0^{V} f(v, \varepsilon) \, dv \, d\varepsilon \; ; \qquad (40)$$

en intégrant cette expression entre les deux limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, nous aurons le nombre des comètes visibles de vitesse relative $< V$ et contenues dans la couche sphérique entre les deux rayons $r$ et $r + dr$.

En représentant ce nombre par $J \, . \, dr$, comme au n° 12, on a:

$$J = \pi f q \int_0^{\pi} \left[ \int_0^{V} \int_0^{\pi} f(v, \varepsilon) \, dv \, d\varepsilon \right] \sin\alpha \, d\alpha \; , \qquad (41)$$

où J est le nombre des comètes visibles de vitesse relative $< V$ contenues entre les sphères $r$ et $r + 1$.

La fonction $f(v, \varepsilon)$ est celle définie à la formule (37). On peut donc écrire:

$$J = 2 \pi f q \int_0^{\pi} \int_0^{V} f(v, \varepsilon) \, dv \, d\varepsilon \; , \qquad (42)$$

ce qui revient bien à multiplier I′ par $4 \pi r^2$.

15. — La formule à laquelle nous arrivons ici n'est pas celle de L. Fabry.

Cet auteur écrit en effet:

$$h^2 = v^2 - 2 v H \cos\alpha + H^2 \; ,$$

en précisant que H est la vitesse du Soleil, et $\alpha$ l'angle de cette vitesse avec la droite qui va du Soleil au point C, droite à laquelle l'axe de l'hyperbole est parallèle *(fig. 2)*.

Or l'angle CDE du triangle n'est certainement pas égal à $\alpha$, du moins en général; nous l'avons désigné par $\varepsilon$.

Ce que nous avons appelé $f(\rho, \varepsilon)$ est donc, chez Fabry, $f(\rho, \alpha)$; de sorte que l'intégrale J s'écrit:

$$J = \pi f q \int_0^{\pi} \left[ \int_0^{V} f(\rho, \alpha)\, d\rho \right] \sin \alpha \, d\alpha \; ; \qquad (43)$$

l'angle $\alpha$ figure à deux endroits, ce qui complique le travail d'intégration.

Au contraire, si l'on distingue les angles $\alpha$ et $\varepsilon$ qui ne sont pas liés, on arrive à la formule (42) qui est un peu plus simple. Cette différence n'est d'ailleurs pas de nature à modifier les conclusions du raisonnement de Fabry; si l'on recherche les orbites elliptiques, il faudra donner à la limite supérieure V de l'intégrale une petite valeur, peu différente de la limite inférieure, aussi bien dans (42) que dans (43); la valeur de l'intégrale est alors elle-même très petite. De sorte que, si l'on regarde les comètes comme des corps étrangers, et si l'on tient compte du mouvement du Soleil, on trouve que les orbites elliptiques devraient être beaucoup moins nombreuses que les orbites nettement hyperboliques.

Pour retrouver le cas où le Soleil est considéré comme immobile, il suffirait de faire $H = 0$ dans les formules ci-dessus; et si en outre on suppose $\varphi(h) = \varphi(\rho) =$ const., l'intégrale à calculer est:

$$J = 2\pi f q \cdot \varphi(\rho) \int_0^{\pi} \int_0^{V} \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{q^2}{2f} \right) d\rho \, d\varepsilon \; ,$$

qui devient:

$$J = 2\pi^2 f q \, \varphi(\rho) \int_0^{V} \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{q^2}{2f} \right) d\rho \; , \qquad (44)$$

dont le premier terme donne, par intégration, une valeur infinie; les orbites elliptiques seraient, de beaucoup, les plus nombreuses.

16. — Admettons que, avec $H \neq 0$, on ait encore $\varphi(h) = \text{const}$. On doit donc examiner l'intégrale:

$$J = 2\pi f q\, \varphi(h) \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{V} \frac{1 + \frac{q\rho^2}{2f}}{\rho^2 - 2\rho H \cos\varepsilon + H^2}\, d\rho\, d\varepsilon \,. \qquad (45)$$

Le résultat est le suivant:

$$J = 2\pi f q\, \varphi(h) \cdot \int_0^{\pi} \left[ \begin{array}{c} \frac{qH}{2f} \cdot \cos\varepsilon \cdot \operatorname{Log}(\rho^2 - 2\rho H \cos\varepsilon + H^2) + \\ + \frac{1}{\sin\varepsilon}\left(\frac{qH\cos^2\varepsilon}{f} - \frac{qH}{2f} + \frac{1}{H}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho - H\cos\varepsilon}{H\sin\varepsilon} + \frac{q\rho}{2f} + \text{const} \end{array} \right]_0^V d\varepsilon \,:$$

ou:

$$J = 2\pi f q\, \varphi(h) \cdot \int_0^{\pi} \left[ \begin{array}{c} \frac{qH}{2f} \cdot \cos\varepsilon \operatorname{Log} \frac{V^2 - 2VH\cos\varepsilon + H^2}{H^2} + \frac{qV}{2f} + \\ + \frac{1}{\sin\varepsilon}\left(\frac{qH\cos^2\varepsilon}{f} - \frac{qH}{2f} + \frac{1}{H}\right) \cdot \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{V - H\cos\varepsilon}{H\sin\varepsilon} - \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right] d\varepsilon \,. \qquad (46)$$

Pour l'application numérique, on pourra faire par exemple $H = 0{,}6$ (en prenant la vitesse de la Terre comme unité) et $f = 1$.

Les orbites elliptiques correspondront par exemple à $V = 0{,}01$; tandis que, pour les orbites hyperboliques, il faudra donner à la limite supérieure V une plus grande valeur.

On effectuera ces deux calculs numériques en procédant par intégration mécanique approchée. On trouve sans difficulté que les orbites hyperboliques devraient être les plus nombreuses.

Ce résultat est d'accord avec ceux de L. Fabry et de Schiaparelli.

17. — Le résultat qui précède correspond à l'hypothèse $\varphi(h) = \text{const}$. C'est-à-dire que, dans ce cas, toutes les

vitesses absolues $h$ sont également admissibles. Il est douteux que ce soit bien le cas; et il va sans dire qu'on pourrait examiner toutes sortes de fonctions $\varphi(h)$.

Nous ferons plutôt la remarque suivante, et nous en examinerons les conséquences: c'est d'abord qu'il n'y a aucune raison pour que la vitesse absolue H du Soleil soit plus grande (ou plus petite) que la vitesse de tous les autres corps; nous la considérerons donc comme une valeur intermédiaire, sorte de moyenne des vitesses à envisager; cela semble tout-à-fait raisonnable.

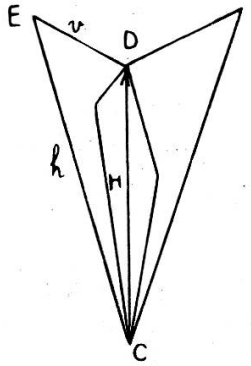

FIG. 4.

Ensuite, nous admettrons que les vitesses $h$ sont réparties de telle façon, à partir du point C, que les vitesses relatives $v$ sont «normalement» petites *(fig. 4)*. Cela revient à penser que toutes les masses nébulaires qui se trouvent dans une certaine région de la Galaxie (celle du Soleil, par exemple) sont animées de vitesses absolues du même ordre de grandeur et à peu près de même direction; autrement dit, elles sont entraînées, elles et le Soleil, par une sorte de courant général. L'hypothèse est parfaitement admissible. Si tel est le cas, les vitesses relatives $v$ sont effectivement petites, leurs valeurs numériques se répartissant autour d'une valeur en quelque sorte « normale », et leurs directions étant distribuées régulièrement autour du point D.

Dans ces conditions, l'hyperboloïde de visibilité placé en D comprendra dans son intérieur, malgré sa forme extrêmement effilée, une grande partie des petites vitesses $v$, mais au contraire une très petite fraction des grandes vitesses relatives. Ainsi les orbites elliptiques seraient beaucoup plus nombreuses que les orbites hyperboliques. Cela correspond évidemment à un choix convenable de la fonction $\varphi(h)$.

C'est le point de vue que nous prendrons dans les chapitres suivants, en adoptant la méthode de G. Tiercy.

Les résultats numériques sont alors comparables à ceux que l'observation fournit.

Remarquons dès maintenant que cela correspond bien à la conclusion de Schiaparelli, rappelée plus haut: si les comètes que nous voyons ne donnent que très peu d'exemples d'orbites hyperboliques, il faut en conclure, lorsqu'on tient compte du mouvement propre du Soleil, que le mouvement des comètes lointaines *relativement* au Soleil est très petit.

Nous admettrons pour la suite cette conclusion, que rien ne paraît devoir interdire.

*(à suivre)*

---