Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 21 (1939)

Artikel: Sur l'intégration de l'équation (_1^4 (^2)/(x^2i) - l^2) Q = - en utilisant la méthde de Sommerfeld

Autor: Stueckelberg, Ernest-C.-G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742225

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUPPLÉMENT AUX ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES
1939

COMPTE RENDU DES SÉANCES

DE LA

SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE

DE GENÈVE

Vol. 56, N° 2. 1939 Avril-Juillet

Séance du 20 avril 1939.

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Sur l'intégration de l'équation* $\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - l^2\right) Q = -\rho$ *en utilisant la méthode de Sommerfeld*[1].

Soient X_1, X_2, X_3, les trois coordonnées cartésiennes de l'espace et $t = -iX_4$, le temps (mesuré dans un système d'unités où la vitesse de la lumière vaut 1). Alors l'équation homogène pour $Q(X_1, X_2, X_3, X_4)$

$$\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - l^2\right) Q = 0 \qquad (1)$$

est l'équation d'onde relativiste de Schroedinger. Nous nous proposons d'abord de trouver une solution $v(R)$ de cette équation ne dépendant que de

$$R^2 = \sum_1^4 X_i^2 = X_4^2 + r^2, \quad r^2 = \sum_1^3 X_i^2 \qquad (2)$$

et qui disparaît pour $R^2 \to \infty$. On vérifie facilement que

$$v(R) = lR^{-1} K_1(lR) \qquad (3)$$

[1] FRANK und v. MISES, *Diff. Gleich. der mathematischen Physik*, 2me éd., vol. 2, page 243.

où $K_1(z)$ est une fonction de Bessel de la deuxième espèce pour un argument imaginaire définie par exemple en Watson [1]. (3) n'est défini d'abord que pour des valeurs réelles de X_4, tandis que le contenu physique d'espace-temps demande les valeurs de $v(R)$ pour $X_4 = it$. Mais le prolongement analytique de (3) est possible sur une surface de Riemann. Ses coupures allant de $X_4 = \pm i \cdot r$ jusqu'à $X_4 = \pm i\infty$, r étant défini par la racine positive de (2). Pour des valeurs réelles de R (racines positives de (2)) $v(R)$ satisfait (1) partout sauf pour $R = 0$.

Pour résoudre l'équation inhomogène

$$\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - l^2\right) Q = -\rho(X_1, X_2, X_3, t) \tag{4}$$

qui devient l'équation des potentiels retardés de la théorie de Maxwell pour $l = 0$, et qui, avec $l \neq 0$ joue un rôle analogue pour les forces nucléaires (théorie de Yukawa [2]), nous appliquons le théorème de Green dans l'espace euclidien quadridimensionnel (X_4 = réel).

On trouve:

$$Q(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4\, v(R)\, \rho(X_1 X_2 X_3, -iX_4) \tag{5}$$

du fait que v devient ∞ comme $\frac{1}{R^2}$ pour $R = 0$. L'intégration sur dX_4 en (5) est à exécuter sur l'axe réel du plan X_4 de $-\infty$ à $+\infty$. En se rappelant [3] que v a la forme:

$$v(R) = \frac{1}{R^2} + \frac{l}{2R} I_1(lR) \log R^2 + \\ + \text{série de puissances positives de } R^2 \tag{6}$$ [4]

on peut déformer le chemin d'intégration en un lacet allant de $X_4 = -\eta - i\infty$ à $X_4 = \eta - i\infty$ autour du point $X_4 = -ir$. L'intégration (5) du premier terme de (6) se réduit

[1] WATSON, *Theory of Bessel Functions*, page 80 (Cambridge, 1922).

[2] Pour la littérature cf. STUECKELBERG, H.P.A. *11*, 225 et 299, 1938; Phys. Rev., *54*, 889, 1938.

[3] WATSON, *loc. cit.*

[4] WATSON, *loc. cit.*

à un contour (pris au sens négatif) autour du point $X_4 = -ir$ et le théorème de Cauchy peut être appliqué. La partie de (5) due au second terme de (6) est à exécuter sur le plan de Riemann. $\log R^2$ augmente de $-2\pi i$ en passant autour du point. L'intégrale de la série ne donne pas de contribution. Utilisant la définition[1] de $\frac{1}{iZ} I_1(iZ) = \frac{1}{Z} J_1(Z)$, on obtient pour Q l'expression

$$4\pi Q(0) = \iiint dX^3 \frac{\rho(X_1 X_2 X_3 t = -r)}{r} -$$

$$- \iiint dX^3 \int_{-\infty}^{-r} dt\, l \frac{J_1(l\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \rho(X_1 X_2 X_3, t) \qquad (7)$$

qui, pour $l = 0$, se réduit à la formule bien connue des potentiels retardés de Maxwell. La solution correspondant au potentiel avancé s'obtient en déformant le chemin d'intégration en un lacet autour de $X_4 = + i \cdot r$. Le résultat est (7) si on pose $t = +r$ dans le premier terme et remplace les limites $-\infty$ et $-r$ par r et $+\infty$ dans le deuxième terme. Introduisant la fonction de Dirac $\delta(r + t)$ et $\delta(r - t)$ et la fonction $\gamma(r, t)$ qui n'est différente de 0 que si $t \geqslant r$ et vaut 1 dans ce cas, on voit que formellement la « fonction »

$$D(r, t) = \frac{1}{r}\{\delta(r + t) - \delta(r - t)\} +$$

$$+ l \frac{J_1(l\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \{\gamma(r, t) - \gamma(r, -t)\}$$

est solution de l'équation homogène (1). Elle ne diffère de 0 que pour des événements X_1, X_2, X_3, t à l'intérieur et sur l'hypersurface du cône de lumière $r^2 - t^2 = 0$.

La fonction D joue un rôle important dans la quantification des champs Q [2] [3]. Elle a été utilisée aussi dans la théorie des positrons par Dirac [4].

[1] WATSON, *loc. cit.*
[2] STUECKELBERG, *loc. cit.*
[3] FIERZ, Helv. Phys. Acta, *12*, 3, 1939.
[4] DIRAC, Proc. Camb. Phil. Soc, *30*, 150, 1934.