Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 21 (1939)

Artikel: Sur l'intégration de l'équation (_1^4 (^2)/(x^2i) - l^2) Q = - en utilisant la méthde de Sommerfeld

Autor: Stueckelberg, Ernest-C.-G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742225

SUPPLÉMENT AUX ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES
1939

COMPTE RENDU DES SÉANCES

DE LA

SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE

DE GENÈVE

Vol. 56, N° 2. 1939 Avril-Juillet

Séance du 20 avril 1939.

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Sur l'intégration de l'équation* $\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - l^2\right) Q = -\rho$ *en utilisant la méthode de Sommerfeld*[1].

Soient X_1, X_2, X_3, les trois coordonnées cartésiennes de l'espace et $t = -iX_4$, le temps (mesuré dans un système d'unités où la vitesse de la lumière vaut 1). Alors l'équation homogène pour $Q(X_1, X_2, X_3, X_4)$

$$\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - l^2\right) Q = 0 \tag{1}$$

est l'équation d'onde relativiste de Schroedinger. Nous nous proposons d'abord de trouver une solution $\varphi(R)$ de cette équation ne dépendant que de

$$R^2 = \sum_1^4 X_i^2 = X_4^2 + r^2 , \quad r^2 = \sum_1^3 X_i^2 \tag{2}$$

et qui disparaît pour $R^2 \to \infty$. On vérifie facilement que

$$\varphi(R) = lR^{-1} K_1(lR) \tag{3}$$

[1] FRANK und v. MISES, *Diff. Gleich. der mathematischen Physik*, 2me éd., vol. 2, page 243.

où $K_1(z)$ est une fonction de Bessel de la deuxième espèce pour un argument imaginaire définie par exemple en Watson [1]. (3) n'est défini d'abord que pour des valeurs réelles de X_4, tandis que le contenu physique d'espace-temps demande les valeurs de $\varphi(R)$ pour $X_4 = it$. Mais le prolongement analytique de (3) est possible sur une surface de Riemann. Ses coupures allant de $X_4 = \pm i \cdot r$ jusqu'à $X_4 = \pm i\infty$, r étant défini par la racine positive de (2). Pour des valeurs réelles de R (racines positives de (2)) $\varphi(R)$ satisfait (1) partout sauf pour $R = 0$.

Pour résoudre l'équation inhomogène

$$\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - l^2\right) Q = -\rho(X_1, X_2, X_3, t) \tag{4}$$

qui devient l'équation des potentiels retardés de la théorie de Maxwell pour $l = 0$, et qui, avec $l \neq 0$ joue un rôle analogue pour les forces nucléaires (théorie de Yukawa [2]), nous appliquons le théorème de Green dans l'espace euclidien quadridimensionnel (X_4 = réel).

On trouve:

$$Q(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4\, \varphi(R)\, \rho(X_1\, X_2\, X_3, -iX_4) \tag{5}$$

du fait que φ devient ∞ comme $\frac{1}{R^2}$ pour $R = 0$. L'intégration sur dX_4 en (5) est à exécuter sur l'axe réel du plan X_4 de $-\infty$ à $+\infty$. En se rappelant [3] que φ a la forme:

$$\varphi(R) = \frac{1}{R^2} + \frac{l}{2R} I_1(lR) \log R^2 +$$
$$+ \text{série de puissances positives de } R^2 \tag{6}$$ [4]

on peut déformer le chemin d'intégration en un lacet allant de $X_4 = -\eta - i\infty$ à $X_4 = \eta - i\infty$ autour du point $X_4 = -ir$. L'intégration (5) du premier terme de (6) se réduit

[1] Watson, *Theory of Bessel Functions*, page 80 (Cambridge, 1922).

[2] Pour la littérature cf. Stueckelberg, H.P.A. *11*, 225 et 299, 1938; Phys. Rev., *54*, 889, 1938.

[3] Watson, *loc. cit.*

[4] Watson, *loc. cit.*

à un contour (pris au sens négatif) autour du point $X_4 = -ir$ et le théorème de Cauchy peut être appliqué. La partie de (5) due au second terme de (6) est à exécuter sur le plan de Riemann. $\log R^2$ augmente de $-2\pi i$ en passant autour du point. L'intégrale de la série ne donne pas de contribution. Utilisant la définition[1] de $\frac{1}{iZ} I_1(iZ) = \frac{1}{Z} J_1(Z)$, on obtient pour Q l'expression

$$4\pi Q(0) = \iiint dX^3 \frac{\rho(X_1 X_2 X_3 t = -r)}{r} -$$

$$- \iiint dX^3 \int_{-\infty}^{-r} dt\, l \frac{J_1(l\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \rho(X_1 X_2 X_3, t) \qquad (7)$$

qui, pour $l = 0$, se réduit à la formule bien connue des potentiels retardés de Maxwell. La solution correspondant au potentiel avancé s'obtient en déformant le chemin d'intégration en un lacet autour de $X_4 = +i \cdot r$. Le résultat est (7) si on pose $t = +r$ dans le premier terme et remplace les limites $-\infty$ et $-r$ par r et $+\infty$ dans le deuxième terme. Introduisant la fonction de Dirac $\delta(r + t)$ et $\delta(r - t)$ et la fonction $\gamma(r, t)$ qui n'est différente de 0 que si $t \geqslant r$ et vaut 1 dans ce cas, on voit que formellement la « fonction »

$$D(r, t) = \frac{1}{r}\{\delta(r + t) - \delta(r - t)\} +$$

$$+ l \frac{J_1(l\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \{\gamma(r, t) - \gamma(r, -t)\}$$

est solution de l'équation homogène (1). Elle ne diffère de 0 que pour des événements X_1, X_2, X_3, t à l'intérieur et sur l'hypersurface du cône de lumière $r^2 - t^2 = 0$.

La fonction D joue un rôle important dans la quantification des champs Q [2] [3]. Elle a été utilisée aussi dans la théorie des positrons par Dirac [4].

[1] Watson, *loc. cit.*
[2] Stueckelberg, *loc. cit.*
[3] Fierz, Helv. Phys. Acta, *12*, 3, 1939.
[4] Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc, *30*, 150, 1934.