ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE RADIATIF ET DU TRANSFERT D'ÉNERGIE

PAR

Georges TIERCY

---

1. — *Rappel.* Les problèmes qui se posent à propos de l'équilibre radiatif stellaire sont résolus à l'aide de quelques équations fondamentales, qui sont les suivantes:

a) l'équation de transfert d'énergie:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{d\tau} \cdot \cos\theta = \mathrm{B} - \mathfrak{J} \; ;$$

b) l'équation de l'équilibre radiatif:

$$\frac{\varepsilon}{k} = \mathrm{B} - \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{J}(\tau, \theta) \, . \, d\omega \; ;$$

c) l'expression du flux radial:

$$\mathrm{F} = \int \mathfrak{J}(\tau, \theta) \, . \cos\theta \, . \, d\omega \, .$$

Lorsque la matière présente une symétrie sphérique autour du centre, on utilise volontiers la solution que voici[1] :

$$\mathcal{J} = \mathrm{B} - \frac{\cos\theta}{k\rho} \cdot \frac{d\mathrm{B}}{dr} = \mathrm{B} - \frac{d\mathrm{B}}{d\tau} \cdot \cos\theta \ , \tag{1}$$

(solution de l'équation de transfert) ,

$$\mathcal{U} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathrm{B} \ , \quad \text{(densité d'énergie)} \ , \tag{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{k} = - \frac{1}{3k\rho} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{k\rho} \cdot \frac{d\mathrm{B}}{dr}\right) , \tag{3}$$

(solution de l'équation d'équilibre radiatif) ,

$$\mathrm{F}_r = - \frac{4\pi}{3k\rho} \cdot \frac{d\mathrm{B}}{dr} = - \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{d\mathrm{B}}{d\tau} \ , \tag{4}$$

(expression du flux radial) ,

$$p' = \frac{4\pi}{3c} \cdot \mathrm{B} \ , \quad \text{(pression de radiation)} \ ; \tag{5}$$

$\mathcal{J}$ est l'intensité de la radiation, B celle du rayonnement noir, caractérisé, comme on sait, par la relation:

$$\mathrm{B} = \frac{\sigma}{\pi} \cdot \mathrm{T}^4 \ , \tag{6}$$

où T est la température absolue; $4\pi\varepsilon$ est l'énergie libérée par unité de masse et par seconde; c la vitesse de la lumière, et k le coefficient d'absorption avec l'hypothèse du corps gris. On utilise couramment la variable τ définie par l'égalité:

$$d\tau = k\rho dr \ ; \tag{7}$$

les équations (1), (3) et (4) s'écrivent alors respectivement:

$$\mathcal{J} = \mathrm{B} - \cos\theta \ . \ \mathrm{B}'(\tau) \ , \tag{8}$$

$$\frac{\varepsilon}{k} = - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{d\tau}\left(r^2 \frac{d\mathrm{B}}{d\tau}\right) , \tag{9}$$

$$\mathrm{F} = - \frac{4\pi}{3} \mathrm{B}'(\tau) \ ; \tag{10}$$

[1] G. Tiercy, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Gauthier-Villars, Paris, 1935, p. 151.

et dans le cas où il est possible de négliger la courbure de la surface, c'est-à-dire dans les couches périphériques d'une étoile de grand rayon, l'équation de l'équilibre radiatif prend la forme très simple relative à la stratification en couches planes:

$$\frac{\varepsilon}{k} = -\frac{B''(\tau)}{3} . \qquad (11)$$

Il est évident que ε est une fonction de τ. En première approximation, les choses se simplifient notablement, grâce au fait que, dans les conditions stellaires, la valeur de ε est très petite par rapport à celle de $B(\tau)$, comme l'a montré M. Eddington; dans la partie périphérique de l'étoile, on a $\varepsilon = 0$ et l'on peut poser:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau , \qquad (12)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes; cette forme est encore valable, avec une bonne approximation, loin au-dessous de la surface, à cause de la petitesse de ε.

Il faut cependant remarquer que l'expression (12) a été obtenue en admettant que $B(\tau)$ fût développable en série suivant les puissances de τ; cette hypothèse est tout à fait admissible en ce qui concerne l'intérieur de la masse stellaire, c'est-à-dire tant que τ ne prend pas des valeurs infiniment petites; lorsque τ est très petit, c'est-à-dire pour la « pellicule » de surface, il se produit, comme nous l'avons montré [1], une chute brusque de température; et le développement de $B(\tau)$ en série de Taylor n'est plus admissible; la fonction admet une singularité pour $\tau = 0$, en ce sens que sa dérivée $B'(\tau)$ devient infinie, $B(0)$ restant finie.

Lorsqu'il s'agit du flux de surface, cette singularité n'est guère gênante, car $B(0)$ possède une valeur bien connue, qui est seule importante.

2. — *Du jeu des équations.* — La solution courante des problèmes s'obtient essentiellement en combinant les équations de

[1] *Loc. cit.*, p. 386.

transfert et d'équilibre radiatif[1]; admettant la forme réduite

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau$$

comme solution de l'équation d'équilibre, on porte cette forme dans l'expression qui donne la solution de l'équation de transfert:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = e^{-\tau \sec\theta} \int_{\tau_1}^{\tau} B(t) \, . \, e^{t \sec\theta} \, . \, \sec\theta \, . \, dt + \mathcal{J}(\tau_1, \theta) \, . \, e^{-(\tau - \tau_1)\sec\theta} ,$$

où l'on fait $\tau_1 = 0$ à la frontière du corps:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = \int_0^{\tau} B(t) \, . \, e^{(t-\tau)\sec\theta} \, . \sec\theta \, . \, dt + \mathcal{J}(0, \theta) \, . \, e^{-\tau \sec\theta} \; ;$$

on tient alors compte du fait qu'il doit y avoir raccord entre le flux ainsi calculé et le flux de surface; on trouve, après deux approximations successives[2]:

$$\left.\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{7}{16}\mathcal{F} + \frac{27}{32}\mathcal{F} \, . \, (-\tau) = \frac{7}{16}\mathcal{F} \, . \left(1 - \frac{27}{14}\tau\right) , \\ \mathcal{J}(\tau, \theta) &= \frac{7}{16}\mathcal{F} - \frac{27}{32}\mathcal{F} \, . \left(\tau - \cos\theta\right) , \\ T^4 &= \frac{7}{16} T_e^4 \left(1 - \frac{27}{14}\tau\right) , \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

où $\mathcal{F}$ est déterminé par $F = \pi \mathcal{F}$, F étant le flux total. On a donc déterminé les valeurs de a_1 et a_2; les formules (13) sont celles qui nous ont servi à établir un raccord numérique entre la solution polytropique valable au cœur de l'étoile jusqu'à $r' = \frac{3}{4} r_0$ et la solution valable dans la couche périphérique.

Le jeu consiste donc à passer de l'une à l'autre des deux équations principales, en procédant par approximations successives.

Mais on voit bien le défaut du procédé: d'une part, ε n'est nul que dans la partie périphérique; d'autre part, la fonction B (τ) présente une singularité de surface.

[1] G. Tiercy, *loc. cit.*, p. 153 et p. 383.
[2] *Ibid.*, p. 385.

3. — *Considérations sur* ε *et* B. Reprenons l'équation approchée (3) de l'équilibre radiatif:

$$\frac{\varepsilon}{k} = -\frac{1}{3\,k\rho}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{k\rho}\cdot\frac{d\mathrm{B}}{dr}\right),$$

au lieu de l'équation réduite (11) des couches planes. On peut envisager ici deux problèmes: ou bien donner la valeur de ε/k en fonction de τ et chercher l'expression correspondante de B, ou bien trouver la fonction $\varepsilon(\tau)$ en tirant parti de renseignements connus sur B.

Le premier de ces problèmes a été soulevé par J.-H. Jeans en 1926 [1]; on trouve la solution [2]:

$$\mathrm{B}''(\tau) = -3\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) + \frac{9}{5}\cdot\frac{d^2\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)}{d\tau^2} + \frac{36}{175}\cdot\frac{d^4\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)}{d\tau^4} + \ldots$$

en appliquant la méthode du retour des séries à la relation établie pour le cas de la stratification en couches planes:

$$\frac{\varepsilon}{k} = -\left[\frac{\mathrm{B}''(\tau)}{3} + \frac{\mathrm{B}^{(4)}(\tau)}{5} + \ldots\ldots + \frac{\mathrm{B}^{(2n)}(\tau)}{2n+1} + \ldots\right],$$

et qui donne l'équation (11) par abandon des dérivées de B d'ordre supérieur au deuxième.

Nous aborderons ci-après le second problème; nous cherchons donc à exprimer ε en fonction de τ, en utilisant l'équation (3) et ce que l'on sait de B (τ).

L'équation (3) peut être écrite comme suit:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{k\rho}\cdot\frac{d\mathrm{B}}{dr}\right) + \frac{2}{r}\cdot\frac{1}{k\rho}\cdot\frac{d\mathrm{B}}{dr}\cdot = -3\varepsilon\rho\ . \tag{14}$$

Posons alors:

$$\frac{1}{k\rho}\cdot\frac{d\mathrm{B}}{dr} = \frac{d\mathrm{B}}{d\tau} = \frac{d\mathfrak{U}}{dr}, \tag{15}$$

en rappelant que ρ et k sont des fonctions de r, et que le rapport ρ/T^3 reste constant dans toute la masse lorsque la classe polytropique est $n = 3$.

[1] *Monthly Notices*, 86.
[2] G. Tiercy, *loc. cit.*, p. 140.

L'équation de l'équilibre radiatif devient:

$$\frac{d^2\mathfrak{U}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{U}}{dr} + 3\varepsilon\rho = 0 \;, \tag{16}$$

dont les deux premiers termes ont la même forme que ceux de l'équation d'Emden rencontrée dans l'étude des équilibres polytropiques.

Le problème à résoudre est le suivant: peut-on trouver une expression de ε en fonction du rayon, telle qu'on ait $\varepsilon = 0$ à partir d'une certaine valeur du rayon ? L'étude de la constitution d'une étoile montre que l'énergie L_r libérée par une sphère de rayon r passe par un maximum $L_{r''}$ pour un rayon r''; cette valeur r'' est elle-même inférieure à la valeur $r' = \frac{3}{4} r_0$ qui marque la limite d'applicabilité de la solution polytropique dans le noyau [1]; le calcul montre que r'' atteint à peine $0{,}5\, r_0$; $L_{r''}$ étant maximum, on a alors pour le taux de libération d'énergie: $4\pi\varepsilon = 0$.

Nous avons d'ailleurs montré, dans l'ouvrage cité, que $L_{r'}$ vaut [2] environ les 3/5 de la radiation maximum $L_{r''}$; comme il ne saurait être question de faire $\varepsilon < 0$ en dehors de la sphère r'', on est amené à considérer $L_{r''}$ comme égale à la puissance effectivement rayonnée et mesurée L, et à faire $\varepsilon = 0$ à l'extérieur de la sphère r''; de telle sorte que la solution polytropique du noyau ne serait en réalité applicable que jusqu'à r'', et non pas jusqu'à r'. A partir de r'', il faudrait adopter une autre solution, conservant la valeur $L_{r''} = L$ de la puissance rayonnée et se raccordant sur la sphère r'', en ce qui concerne les T et les ρ, avec la solution polytropique valable dans la partie centrale. Mais, comme $L_{r'}$ est du même ordre de grandeur que $L_{r''}$, on voit vite que la distribution des températures entre r'' et r', quelle que soit la solution adoptée à l'extérieur de la sphère r'', ne serait pas très différente de la distribution obtenue en appliquant la solution polytropique jusqu'à la valeur $r' = \frac{3}{4} r_0$ du rayon; les valeurs respectives de T' seraient comparables. Aussi, pratique-

[1] Voir G. Tiercy, *loc. cit.*, p. 234 à 240.

[2] r' est le rayon pour lequel $T = 10^6$; en dehors de la sphère r', il n'y a plus que le 0,83% de la masse de l'étoile.

ment, pourra-t-on utiliser la solution polytropique jusqu'à la sphère r', sur laquelle T' est de l'ordre de grandeur de 10^6 degrés, comme on sait. Ainsi ε est positif à l'intérieur de la sphère r'', et devient nul pour r'' (ou pour r', comme on vient de voir); mais, d'autre part, on sait que le coefficient k d'absorption augmente lorsqu'on va du centre à la périphérie; il s'ensuit que le quotient ε/k est fonction du rayon, fonction qui s'annule pour r'' (ou r'); si l'on pouvait préciser le type de cette fonction, il serait possible de trouver la distribution de T en profondeur. C'est bien là notre problème.

La question se complique du fait que la fonction B(τ) présente une singularité à la surface, comme on l'a rappelé au n° 1.

4. — *Résolution de l'équation* (16):

$$\frac{d^2\mathfrak{U}}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d\mathfrak{U}}{dr} + 3\varepsilon\rho = 0\ . \tag{16}$$

Posons:

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dr} = \frac{dB}{d\tau} = X\ ;$$

l'équation devient:

$$\frac{dX}{dr} + \frac{2}{r}\cdot X + 3\varepsilon\rho = 0\ . \tag{17}$$

Une solution particulière de l'équation privée de second membre:

$$\frac{dX'}{dr} + \frac{2}{r}X' = 0$$

est:

$$X' = \frac{1}{r^2}\ ;$$

ensuite, en posant X = X'.Y, il vient:

$$X'.\frac{dY}{dr} = -3\varepsilon\rho\ ,$$

$$\frac{dY}{dr} = -3\varepsilon\rho r^2\ , \tag{18}$$

$$Y = -3\int_0^r \varepsilon\rho r^2 dr\ ; \tag{19}$$

d'où:

$$X = X'. Y = \frac{dB}{d\tau} = -\frac{3}{r^2}\int_0^r \varepsilon\rho r^2 dr , \qquad (20)$$

expression qui se réduit à $X = \frac{\text{const.}}{r^2}$ dans le cas où $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus aucune énergie libérée; c'est ce qui arrive en dehors de la sphère de rayon r'' dont nous avons parlé au numéro précédent; alors, on voit, d'après l'équation (4), que le flux radial varie comme $1/r^2$, comme cela doit être puisque la puissance rayonnée L ne varie plus.

Si, en plus, le rayon est assez grand pour qu'on puisse négliger la courbure des couches intéressées et considérer celles-ci comme planes, l'expression de X se réduit à une constante a_2 et l'on a:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau ,$$

sous réserve de la singularité de surface, dont nous reparlerons plus loin.

La solution (20) sera valable jusqu'à r'' (ou r'), valeur à partir de laquelle on a $\varepsilon = 0$.

Rappelons qu'on a aussi: $B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$, et que ρ/T^3 reste constant dans toute la masse du noyau, si la classe polytropique est 3; ce qui donne, avec $d\tau = k\rho dr$:

$$\frac{dB}{d\tau} \sim \frac{dT}{kdr} \qquad \text{ou} \qquad dB \sim \rho dT .$$

5. — *De la forme de* B (τ) *imposée par les faits de surface.* Prenons le cas de $\varepsilon = 0$, pour lequel $X = \frac{\text{const.}}{r^2}$; nous écrirons:

$$X = a_2 \cdot \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{dB}{d\tau} , \qquad (21)$$

expression qui se réduit à $\frac{dB}{d\tau} = a_2$ pour la surface. Pour l'hypothèse des couches planes, cette dernière valeur de la dérivée reste valable en profondeur et l'on a:

$$B = a_1 + a_2\tau \qquad (22)$$

sous la réserve indiquée pour $\tau = 0$; cette solution approchée ne s'applique pas, en effet, à la périphérie *extrême* de la photosphère; la nécessité d'obtenir une valeur infiniment grande de $\frac{dB}{d\tau}$ à la surface entraîne à compléter (22) en lui ajoutant un terme logarithmique:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau + A\tau \operatorname{Log}(-\tau) \; ; \tag{23}$$

nous conservons ici la notation de nos précédentes recherches, où τ est compté positivement vers l'extérieur [1]; comme on part de la surface ($\tau = 0$) pour s'enfoncer dans la masse, la quantité $(-\tau)$ est positive. Les valeurs a_1 et a_2 sont celles que nous avons déterminées en seconde approximation[2] :

$$B(\tau) = \frac{7}{16}\mathcal{F} \, . - \frac{27}{32}\mathcal{F} \, . \, \tau + A\tau \operatorname{Log}(-\tau) \; , \tag{24}$$

le flux net à la surface valant $F = \pi\mathcal{F}$; dérivant par rapport à τ, on a donc:

$$\frac{dB}{d\tau} = + a_2 + A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right] + \frac{dA}{d\tau} \cdot \tau \operatorname{Log}(-\tau) \, . \tag{25}$$

Conservons en profondeur, au moins jusqu'à $\tau = \tau'$, la forme (24) imposée par les faits relatifs à la pellicule limite; nous introduisons ainsi une correction au terme en τ de (22); mais il ne faut pas oublier que la forme (22) n'était qu'approchée en profondeur, où $B''(\tau)$ es très petit, mais non nul, et où la symétrie est sphérique. La correction revient à remplacer le coefficient a_2 par un coefficient variable:

$$B(\tau) = \frac{7}{16}\mathcal{F} + \tau\left[a_2 + A \operatorname{Log}(-\tau)\right] \, . \tag{26}$$

Remarquons que:

$$\lim_{\tau=0}\left[(-\tau)\operatorname{Log}(-\tau)\right] = 0 \; ,$$

de sorte que:

$$B(0) = a_1 \; ;$$

on obtient bien la valeur convenable de B pour la surface.

[1] *Loc. cit.*, p. 133, 155, 379.
[2] *Loc. cit.*, p. 385.

Dans l'expression (26), le terme complémentaire $A\tau$ Leg $(-\tau)$ est d'abord nul, pour $\tau = 0$. Considérons pour l'instant le cas de A *constant* et *positif*.

On connaît la courbe de variation de la fonction $y = x \operatorname{Log} x$; la valeur de y change de signe pour $x = 1$; le minimum a lieu pour $x = \frac{1}{e}$, la dérivée par rapport à x étant:

$$\operatorname{Log} x + 1 .$$

La fonction $Y = A\tau \operatorname{Log}(-\tau) = -A(-\tau)\operatorname{Log}(-\tau) = -Ax \operatorname{Log} x$, dont la dérivée par rapport à $(-\tau)$ est $Y'_\tau = -A\left[\operatorname{Log}(-\tau) + 1\right]$, présente un maximum $\frac{A}{e}$ pour $-\tau = \frac{1}{e} = 0{,}37$.

Ainsi, lorsqu'on s'enfonce sous la surface, alors que le terme $a_2\tau$, de valeur positive, de (26) devient de plus en plus grand en même temps que la température augmente, le terme complémentaire $A\,\tau \operatorname{Log}(-\tau)$ vient tout d'abord en addition du précédent jusqu'à $(-\tau) = 1$, après quoi il devient négatif et diminue l'effet du terme précédent.

Mais remarquons que le domaine de $(-\tau)$ qui va de 0 à 1 est fort peu de chose. On sait que, si l'on utilise la variable ξ d'Emden pour le rayon, on a [1]:

$$r = \frac{\xi}{\omega \cdot u_c} ,$$

où ω et u_c sont des constantes; celles-ci sont telles que le rayon total r_0 de l'étoile correspond à $\xi_0 = 6{,}9$; et dans la couche [2] allant de $\xi = 6{,}888$ à $\xi = 6{,}886$ la variable $(-\tau)$ passe de la valeur 0 à 14,72; or cette couche est la pellicule limite, dans laquelle se produit la chute brusque de température [3]; cette pellicule est très mince; cependant, la valeur $(-\tau) = 1$ ne représente que le $^1/_{15}$ environ de son épaisseur.

[1] G. TIERCY, *loc. cit.*

[2] G. TIERCY, *loc. cit.*, p. 387.

[3] La température passant, par exemple, de $T = 9700°$ à $T = 4200°$.

Considérons le dernier terme de (26): $A\tau \operatorname{Log}(-\tau)$; il est positif jusqu'à $(-\tau) = 1$; sa valeur maximum est $\frac{A}{e} = 0{,}37\ A$; elle est atteinte pour $(-\tau) = \frac{1}{e} = 0{,}37$.

Considérons maintenant la valeur correspondante du second terme de (26), c'est-à-dire $\frac{27}{32}\mathcal{F}.(-\tau)$, où $\mathcal{F} = \frac{\sigma}{\pi}T_e^4$ et $\sigma = (5{,}75).10^{-5}$; si l'on admet par exemple une température effective de 5000°, on trouve que $\mathcal{F} = (0{,}1144).10^{11}$; ainsi le second terme de (26) vaut, pour $(-\tau) = \frac{1}{e}$:

$$\frac{27}{32}(0{,}1144)\,10^{11}\,.\,\frac{1}{e} = (0{,}0357)\,.\,10^{11} \sim (0{,}4)\,.\,10^{10}\,.$$

On voit qu'en prenant $A < 0{,}4.10^{10}$, le dernier terme de (26) restera en valeur absolue, inférieur au second pour $(-\tau) = \frac{1}{e}$. Mais il n'en sera plus de même à la longue, c'est-à-dire lorsque $(-\tau)$ augmentera; le crochet de (26) pourra devenir positif pour $(-\tau)$ suffisamment grand; de telle sorte que $B(\tau)$ diminuera finalement lorsqu'on s'approchera du centre de l'étoile.

Cela veut dire que l'effet du terme complémentaire de (26), avec A constant positif, sera d'accentuer l'accroissement de température dans la pellicule de surface en pénétrant sous celle-ci (c'est bien ce qu'il faut), mais de provoquer une diminution de T près du centre [1]. Il faudra donc choisir A suffisamment petit pour que, malgré l'augmentation de $\operatorname{Log}(-\tau)$, le crochet de (26) reste négatif; mais, de toute façon, la valeur absolue de ce crochet diminuera dans les régions profondes de la masse. Nous verrons d'ailleurs au numéro suivant qu'une petite valeur numérique de A serait incompatible avec une nouvelle exigence que nous allons justement étudier, du moins lorsqu'on utilise les équations courantes de solution.

6. — *De la quantité $3\varepsilon\rho$ qui figure dans l'équation du n° 4.* Conservons un instant l'hypothèse de A constant et *positif;* quelle que soit la valeur attribuée à cette constante, la présence

[1] On s'arrêtera d'ailleurs au niveau $\tau = \tau'$.

du terme $\left[\tau \operatorname{Log}(-\tau)\right]$ dans (26) assure une valeur négative infiniment grande à $\frac{dB}{d\tau}$ quand on fait $\tau = 0$, ce qui est essentiel.

Il s'agit maintenant de voir si l'on peut trouver une loi de répartition de $\varepsilon\rho$ correspondant à (26), et permettant d'obtenir $\varepsilon = 0$ sur la sphère de rayon r'' ou r', comme on a dit au n° 3.

On a vu par (20) que:

$$X = X'.\, Y = \frac{dB}{d\tau}, \qquad \text{avec} \quad X' = \frac{1}{r^2};$$

il vient donc;

$$Y = r^2 X = r^2 \frac{dB}{d\tau}; \tag{27}$$

Or, (26) donne, avec A quelconque, fonction de τ:

$$\frac{dB}{d\tau} = a_2 + A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right] + \tau \operatorname{Log}(-\tau) \cdot \frac{dA}{d\tau}, \tag{28}$$

expression qui se réduit à la suivante dans l'hypothèse de A constant:

$$\frac{dB}{d\tau} = a_2 + A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right]. \tag{29}$$

Il vient ainsi:

$$Y = r^2 \left\{ a_2 + A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right] \right\}, \tag{30}$$

et par dérivation par rapport à r:

$$\frac{dY}{dr} = 2r\left\{ a_2 + A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right]\right\} + Ar^2 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dr};$$

Or, on a par (7):

$$\frac{d\tau}{dr} = k\rho;$$

d'où l'expression:

$$\frac{dY}{dr} = 2r\left\{ a_2 + A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right]\right\} + A\frac{k\rho r^2}{\tau}; \tag{31}$$

et comme, à cause de (18), le premier membre de (31) est égal à $(-3\varepsilon\rho r^2)$, on trouve la relation:

$$3\varepsilon\rho = \frac{2}{r}\left\{ -a_2 - A\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right]\right\} - \frac{Ak\rho}{\tau}. \tag{32}$$

On aurait ainsi, sous réserve du choix de A, la valeur de $\varepsilon\rho$, où a_2 conserve sa valeur $-\frac{27}{32}\mathcal{F}$.

Cette valeur (32) peut-elle devenir nulle pour r'' ou pour $r' = 0{,}725\, r_0$? La question est essentielle.

On sait qu'avec les variables d'Emden, la valeur $r' = 0{,}725\, r_0$ correspond à $\xi = 5$, alors qu'à la surface on a $\xi_0 = 6{,}90$; pratiquement, on prendra $\xi_0 = 6{,}888$ qui correspond à la température T_0 de surface, température non nulle [1].

D'autre part, on a calculé [2] que, pour l'étoile Capella où la température effective T_e vaut 5200° et où $T_0 = 4230°$, l'opacité totale $(-\tau)$ correspondant à $\xi' = 5$ est égale à $(2{,}159) \cdot 10^9$; avec ces valeurs, et en rappelant que $\mathcal{F} = (0{,}1144) \cdot 10^{11}$ dans le cas de Capella, on tire de (32):

$$3\varepsilon\rho = \frac{2}{0{,}725\, r_0} \cdot \left\{ \frac{27}{32} \cdot (0{,}1144) \cdot 10^{11} - A[1 + \mathrm{Log}\,(2{,}159) \cdot 10^9] \right\} + \\ + \frac{Ak\rho}{(2{,}159) \cdot 10^9} \cdot \tag{33}$$

Il est nécessaire de rappeler ici les notations utilisées dans la solution polytropique [3]; ξ et ψ étant les variables d'Emden; on a, pour la classe $n = 3$:

$$\rho = u_c^3 \psi^3 \, , \qquad r = \frac{\xi}{\omega \cdot u_c} \, , \qquad \text{et}$$

$$k = \frac{k_1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{T^{7/2}} \, ;$$

ω et u_c sont des constantes, de même que $\frac{k_1}{\mu}$; dans le cas de Capella, $u_c = 0{,}500$, $\frac{k_1}{\mu} = (11{,}82) \cdot 10^{26}$, et $r_0 = (9{,}5) \cdot 10^{11}$ cm. Enfin, pour $\xi' = 5$, c'est-à-dire pour $r = r'$, on a encore:

$$\psi' = 0{,}11079 \text{ (table d'Emden)} \, ,$$

$$T' = 1.100.000° \, ,$$

[1] G. Tiercy, *loc. cit.*, p. 156.

[2] G. Tiercy, *loc. cit.*, p. 387.

[3] G. Tiercy, *loc. cit.*, divers paragraphes.

d'où:

$$\left\{\begin{aligned} \rho' &= (0{,}5)^3 \,.\, (0{,}11079)^3 = 0{,}00017 \,, \\ (T')^{7/2} &= (1{,}39594) \,.\, 10^{21} \,, \\ k' &= 144 \,. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (33) s'écrit alors:

$$0{,}00051 \,.\, \varepsilon = \frac{2}{(6{,}8875)\,.\,10^{11}}\left[\frac{3{,}0888}{32}\cdot 10^{11} - A\left(1 + \frac{9{,}3342526}{0{,}4342945}\right)\right] + \\ + \frac{A\,.\,(0{,}02448)}{(2{,}159)\,.\,10^{9}} \,,$$

ou bien:

$$0{,}00051 \,.\, \varepsilon = 0{,}028 - A\,(1 + 21{,}493)\,\frac{0{,}29038}{10^{11}} + A \,.\, \frac{1{,}134}{10^{11}} \,,$$

$$0{,}00051 \,.\, \varepsilon = 0{,}028 - A \,.\, \frac{5{,}474}{10^{11}} \,. \qquad (34)$$

Si, dans cette égalité qui correspond à $\xi' = 5$, on fait $A = A' = (0{,}5115)\,.\,10^9$, on obtient $\varepsilon = 0$.

Mais cette valeur positive constante de A fait que le crochet de la relation (26) s'annule et devient positif très vite, entre r_0 et r', alors que ce crochet doit rester négatif, comme on l'a dit à la fin du numéro 5. Cette valeur de A est donc trop grande pour satisfaire à la condition du nº 5; mais si l'on prend A plus petit que $A' = (0{,}5115)\,.\,10^9$, la quantité ε ne sera pas nulle pour $\xi' = 5$. Il y a contradiction entre les deux exigences.

La solution avec A constant dans toute l'étoile n'est donc pas satisfaisante; du moins lorsqu'on fait le calcul au moyen de l'équation (3) ou (14), qui est une forme approchée de l'équation de l'équilibre radiatif. Il faut alors reprendre la relation (26), avec l'idée que A est une fonction de τ. C'est ce que nous essayerons dans les numéros, 8, 9, 10 et 11.

7. — *Les conditions à remplir.* Faisons tout d'abord le tableau des conditions à satisfaire par la fonction B (τ):

1º La valeur B (0) est finie; ou la mesure par le flux total extérieur;

2° La dérivée $B'(\tau)$ doit prendre une valeur négative très grande à la surface, pour $\tau = 0$;

3° Il faut que $\varepsilon = 0$ pour la valeur r'' ou r' du rayon, et pour $r' < r \leqslant r_0$;

4° Il faut enfin que cette fonction $B(\tau)$ donne une valeur convenable finie pour l'intensité du flux, désignée par $\mathcal{I}(\tau, \theta)$, où θ désigne l'angle formé par la radiation considérée avec le rayon.

Les deux premières conditions sont facilement satisfaites, abstraction faite de la troisième; elles le sont même avec A constant.

Nous reprendrons plus loin, aux n^{os} 9 à 13, l'étude de la troisième condition, étude déjà amorcée au n° 6.

Quant à la quatrième condition, il n'en a pas encore été question dans ce qui précède; nous allons lui consacrer le numéro 8.

8. — *L'intensité* $\mathcal{I}(\tau, \theta)$ *du flux rayonnant, et la singularité de surface de la fonction* $B(\tau)$. L'équation de transfert d'énergie s'écrit, comme on sait:

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau}\cos\theta = B - \mathcal{I} \;;$$

nous avons rappelé au n° 1 que la solution *usuelle* est la suivante, tant dans le cas des couches planes que dans celui de la symétrie sphérique:

$$\mathcal{I}(\tau, \theta) = B(\tau) - \cos\theta \,.\, B'(\tau) \;; \qquad (35)$$

mais cette solution n'est valable à la surface que si la fonction $B(\tau)$ ne présente pas de singularité pour $\tau = 0$; c'est le cas pour l'approximation linéaire souvent utilisée:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau \,, \qquad (36)$$

que l'on choisit après avoir constaté que la dérivée seconde $B''(\tau)$ reste en moyenne très petite devant $B(\tau)$ dans l'intérieur profond de l'étoile, et s'annule en vertu de l'équation (3) lorsque $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire dans la partie extérieure de l'étoile où il n'y a plus aucune libération d'énergie.

Nous avons dit au nº 5 que les faits de surface suggèrent d'ajouter à B (τ) un terme complémentaire; la fonction devient:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau + A \tau \operatorname{Log}(-\tau) , \qquad (37)$$

de telle sorte que B (0) conserve sa valeur finie, tandis que B′ (τ) prend une valeur négative très grande pour $\tau = 0$.

Il est alors visible que l'expression (37) donne à $\mathcal{I}(0, \theta)$ une valeur extrêmement grande, du moins si l'on conserve la relation (35) comme solution de l'équation de transfert d'énergie. Cette expression (35) n'est donc pas satisfaisante pour la pellicule de surface; la première chose à faire est ainsi de chercher une forme plus convenable pour $\mathcal{I}(\tau, \theta)$.

La solution complète de l'équation de transfert s'écrit, comme on sait:

$$\mathcal{I}(\tau, \theta) = e^{-\tau \sec\theta} \int_{\tau_1}^{\tau} B(t) \, . \, e^{t \sec\theta} \sec\theta \, . \, dt + \mathcal{I}(\tau_1, \theta) \, . \, e^{(\tau_1 - \tau)\sec\theta} , \qquad (38)$$

où l'on admet connaître la valeur $\mathcal{I}(\tau_1, \theta)$ de l'intensité du flux pour un certain niveau caractérisé par la valeur τ_1 de l'opacité.

Dans le cas d'une étoile, c'est à la frontière ($\tau_1 = 0$) que l'on peut connaître l'intensité; de sorte que nous écrirons la solution sous la forme:

$$\mathcal{I}(\tau, \theta) = \int_{0}^{\tau} B(t) \, . \, e^{(t-\tau)\sec\theta} \sec\theta \, . \, dt + \mathcal{I}(0, \theta) \, . \, e^{-\tau \sec\theta} , \qquad (39)$$

où τ prend alors des valeurs négatives puisqu'on pénètre sous la surface; autrement dit, la quantité ($-\tau$) augmente de plus en plus à mesure que l'on s'approche du centre de l'étoile.

En général, on utilise la forme (38); et l'on suppose donnée l'intensité $\mathcal{I}(\tau_1, \theta)$ à un niveau très bas au-dessous de la frontière; on considère alors que le dernier terme de (38) est négligeable, à cause de l'énorme valeur négative de τ_1; et l'on ne conserve que le premier terme du second membre, en remplaçant τ_1 par $-\infty$ à la limite inférieure de l'intégrale; c'est ainsi que l'on est conduit à la solution (35) en supposant encore B (τ) développable en série.

Remarquons ici qu'on peut se demander si l'on a vraiment le droit d'abandonner le dernier terme de (38), car on ne sait rien de l'ordre de grandeur de $\mathcal{J}(\tau_1, \theta)$.

Nous nous proposons d'utiliser la formule (39), où le terme intégré n'est pas négligeable [1]; l'emploi de cette relation (39) sous-entend que l'on connaît l'intensité $\mathcal{J}(0, \theta)$ à la frontière du corps; nous dirons plus loin comment on en a connaissance effectivement.

Tout d'abord, cherchons à simplifier la relation (39); posant:

$$(t - \tau) \sec \theta = \psi \,, \qquad \sec \theta \,.\, dt = d\psi \,,$$

on obtient:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = \int_{-\tau \sec \theta}^{0} B(\tau + \psi \cos \theta) \,.\, e^{\psi} d\psi + \mathcal{J}(0, \theta) \,.\, e^{-\tau \sec \theta} \;;$$

ne nous préoccupons pas pour l'instant du fait que la fonction B (τ) pourrait présenter une singularité pour $\tau = 0$; et supposons-la développable en série, comme on le fait ordinairement; il vient:

$$B(\tau + \psi \cos \theta) = B(\tau) + \frac{\psi \,.\, \cos \theta}{1} B'(\tau) + \frac{\psi^2 \,.\, \cos^2 \theta}{1 \,.\, 2} B''(\tau) + \ldots \;;$$

de sorte qu'après intégration, et en tenant compte du fait que B$''$ (τ) est un nombre très petit en moyenne devant B (τ), c'est-à-dire que B$''$ (τ) est négligeable pratiquement, on trouve pour $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ l'expression:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) &= B(\tau) \,.\, \left[1 - e^{-\tau \sec \theta}\right] + \\ + \cos \theta \,.\, B'(\tau) \,.\, &\left[- 1 + e^{-\tau \sec \theta} (\tau \sec \theta + 1)\right] + \mathcal{J}(0, \theta) \,.\, e^{-\tau \sec \theta} \,, \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

ou encore:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) &= B(\tau) - \cos \theta \,.\, B'(\tau) + \\ + e^{-\tau \sec \theta} &\left[- B(\tau) + \cos \theta \,.\, B'(\tau) \,.\, \{\tau \sec \theta + 1\} + \mathcal{J}(0, \theta)\right] \,. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

[1] G. Tiercy, *C. R. de la Société de Physique et d'Histoire naturelle*, Genève, 1938, I.

Telle est la nouvelle expression que nous employerons pour l'intensité.

Remarquons en passant que, si l'on adopte pour B (τ) la forme linéaire (36), le crochet du second membre de (41) se réduit à une constante; et il arrive que cette constante est nulle, comme il est facile de le voir.

Pour cela, il faut connaître la valeur de l'intensité de surface $\mathfrak{J}(0, \theta)$; celle-ci peut être obtenue expérimentalement, grâce à l'observation attentive du disque solaire; on constate en effet que l'intensité de la radiation partant dans la direction de l'observateur varie avec la distance au centre du disque visuel; le bord du disque est assombri; et la loi de cet assombrissement est la suivante:

$$\frac{\mathfrak{J}(0, \theta)}{\mathfrak{J}(0, 0)} = \frac{14}{41} + \frac{27}{41} \cos \theta ; \qquad (42)$$

c'est là une relation expérimentale, où $\mathfrak{J}(0,0)$ est l'intensité au centre du disque. On trouve d'ailleurs immédiatement que:

$$\mathfrak{J}(0 . 0) = \frac{41}{32} \mathcal{F} , \qquad (43)$$

où l'on a: $\pi \mathcal{F} = \mathrm{F} =$ flux total de surface $= \sigma \mathrm{T}_e^4$; en effet, il vient:

$$\pi \mathcal{F} = \mathrm{F} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}(0, \theta) . \cos \theta . \sin \theta . d\theta ,$$

c'est-à-dire, grâce à (42):

$$\mathcal{F} = \mathfrak{J}(0, 0) . \frac{32}{41} .$$

On a donc finalement:

$$\mathfrak{J}(0, \theta) = \frac{7}{16} \mathcal{F} + \frac{27}{32} \mathcal{F} . \cos \theta . \qquad (44)$$

Telle est la formule pratique fournie par l'observation du disque solaire [1].

[1] G. Tiercy, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, p. 384 et p. 408.

Or, cette relation reste évidemment valable pour le problème qui nous occupe, où nous avons justement besoin de connaître la variation de l'intensité en fonction de θ.

D'autre part, il est facile de voir qu'avec l'approximation linéaire habituelle de B (τ), c'est-à-dire :

$$B(\tau) = \frac{7}{16}\mathcal{F} - \frac{27}{32}\mathcal{F} \cdot \tau \; ; \tag{45}$$

le crochet de (41) est nul, et que l'expression de $\mathcal{I}(\tau, \theta)$ se réduit à (35).

Mais revenons à l'expression (37) de B (τ), avec le terme complémentaire $A\tau$ Log $(-\tau)$; la dérivée devient infinie négative pour $\tau = 0$, si A est convenablement choisi. Remarquons que dans la nouvelle formule (40), le coefficient de $B'(\tau)$ devient nul pour $\tau = 0$; de sorte que, avec la forme linéaire (36) ou (45), il vient:

$$\mathcal{I}(0\,,\,\theta) = \mathcal{I}(0\,,\,\theta)\;.$$

Or cela est encore vrai si l'on tient compte de la singularité de B (τ) imposée par les faits de surface; on a:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\,\tau + A\,\tau\,\mathrm{Log}\,(-\tau)\;,$$

$$B'(\tau) = a_2 + A\big[1 + \mathrm{Log}\,(-\tau)\big] + \frac{dA}{d\tau}\cdot\tau\,\mathrm{Log}\,(-\tau)\;;$$

nous admettrons pour l'instant [1] que la fonction A ne devient pas elle-même infinie pour $\tau = 0$; on a d'ailleurs B $(0) = a_1$; tandis que la fonction $B'(\tau)$ contient un terme en Log $(-\tau)$, qui devient infini pour $\tau = 0$; cependant le terme en $B'(\tau)$ de la formule (40) disparaît encore; car la vraie valeur du produit

$$\mathrm{Log}\,(-\tau)\,.\,\big[-1 + e^{-\tau\sec\theta}(\tau\sec\theta + 1)\big]$$

pour $\tau = 0$ est nulle, comme il est facile de s'en assurer. Ainsi l'expression (40) peut être conservée à la surface, où l'expérience donne la valeur (44).

[1] Voir au n° 12.

Mais il y a mieux; il faut chercher à ramener la formule (40) à la forme (35) pour les valeurs de $(-\tau)$ n'appartenant pas à la pellicule extrême de surface; on sait que la pellicule extérieure, dans laquelle se produit une chute brusque de température à l'approche de la surface photosphérique, correspond [1] aux valeurs de $(-\tau)$ comprises entre 0 et 15, domaine pour lequel la variable ξ d'Emden varie [2] de 6,888 à 6,886; il s'agit de considérer maintenant des valeurs de τ telles que $-\tau \geqslant 15$.

Nous admettrons que le coefficient A de l'égalité (37) est une fonction de τ à choisir; et nous poserons, pour $-\tau \geqslant 15$:

$$A = \frac{+C}{\tau \operatorname{Log}(-\tau)} , \tag{46}$$

c'est-à-dire:

$$+C = A\tau \operatorname{Log}(-\tau) , \tag{47}$$

où nous prendrons $C < 0$, comme on verra au nº 13.

Avec cette valeur de A, la fonction (37) devient linéaire en τ:

$$B(\tau) = (a_1 + C) + a_2 \tau , \tag{48}$$

analogue à l'expression (13) de $B(\tau)$ que nous avons donnée, en seconde approximation, dans notre ouvrage cité [3], et qui correspond au cas où la courbure des couches peut être négligée, comme cela arrive pour les couches extérieures de l'étoile.

Il faut remarquer ici que la formule (48) ne sera pas utilisable jusqu'aux régions les plus profondes de l'étoile, où la courbure des couches n'est plus négligeable; la formule ne sera appliquée que jusqu'à la couche où $\tau = \tau'$, au-dessous de laquelle on peut appliquer la solution polytropique.

Quant à la valeur de la constante C, on pourra la prendre très petite à côté de a_1, comme on verra au nº 13; par exemple, on pourra faire $C = -1$.

[1] G. Tiercy, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, loc. cit., p. 387.
[2] *Idem*, p. 387.
[3] G. Tiercy, *loc. cit.*, p. 385.

Ainsi, en profondeur (du moins jusqu'à la valeur $\tau = \tau'$), on aura la solution habituelle:

$$B(\tau) = \left(\frac{7}{16}\mathcal{F} + C\right) - \frac{27}{32}\mathcal{F} \cdot \tau \ ;$$

pour la pellicule de surface ($-\tau < 15$), on partira de la valeur

$$A_{15} = -\frac{C}{15 \operatorname{Log} 15} \ ,$$

valable pour $-\tau = 15$; dès lors, de $-\tau = 15$ à $\tau = 0$, on remplacera C par une fonction convenable τ, qui ne sera pas autre chose [1] que $\tau \operatorname{Log}(-\tau)$.

Il va sans dire que, dans les conditions créées par l'adoption de la relation (46), la dérivée $B''(\tau)$ reste constamment nulle pour $-\tau > 15$, même lorsque $(-\tau)$ devient très grand; et l'on a pour l'intensité, comme le veut l'expression (35):

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = (a_1 + C) + a_2(\tau - \cos\theta) \ . \tag{49}$$

On peut d'ailleurs arriver à l'expression (46) de A justement en exigeant que $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ se réduise à (35). Partons en effet de l'expression (39) de $\mathcal{J}(\tau, \theta)$, en intégrant de $\tau_1 = -15$ à τ; en y faisant encore $(t - \tau) \sec\theta = \psi$, on trouve la relation suivante à la place de (40):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) = {} & B(\tau) \cdot \left[1 - e^{(\tau_1 - \tau)\sec\theta}\right] + \\ & + \cos\theta \cdot B'(\tau) \cdot \left[-1 + e^{(\tau_1-\tau)\sec\theta}\left\{1 - (\tau_1 - \tau)\sec\theta\right\}\right] + \\ & + \mathcal{J}(\tau_1, \theta) \cdot e^{(\tau_1-\tau)\sec\theta} \ , \end{aligned}$$

ou encore, au lieu de (41):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) = {} & B(\tau) - \cos\theta \cdot B'(\tau) + \\ & + e^{(\tau_1-\tau)\sec\theta}\left[-B(\tau) + B'(\tau) \cdot \left\{\cos\theta - (\tau_1 - \tau)\right\} + \mathcal{J}(\tau_1, \theta)\right] \ ; \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

[1] Voir au n° 13.

si l'on veut que $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ se réduise aux deux premiers termes, il faut que le crochet de l'expression ci-dessus soit nul; il restera alors:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = a_1 + a_2 \tau + A \tau \operatorname{Log}(-\tau) -$$
$$- \cos\theta \cdot \left\{ a_2 + A + A \operatorname{Log}(-\tau) + \frac{dA}{d\tau} \cdot \tau \operatorname{Log}(-\tau) \right\},$$

d'où:

$$\mathcal{J}(\tau_1, \theta) = a_1 + A \tau_1 \operatorname{Log}(-\tau_1) + a_2 (\tau_1 - \cos\theta) -$$
$$- \cos\theta \cdot \left\{ \frac{d}{d\tau} A \tau \operatorname{Log}(-\tau) \right\}_{\tau=\tau_1};$$

en écrivant que le crochet de (50) est nul, on a l'équation:

$$\left.\begin{aligned} & A \tau_1 \operatorname{Log}(-\tau_1) - A \tau \operatorname{Log}(-\tau) + (\cos\theta - \tau_1 + \tau) \cdot \frac{d}{d\tau} A \tau \operatorname{Log}(-\tau) - \\ & \qquad - \cos\theta \cdot \left\{ \frac{d}{d\tau} A \tau \operatorname{Log}(-\tau) \right\}_{\tau_1=\tau} = 0 , \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

qui est visiblement satisfaite par l'expression (46):

$$A \tau \operatorname{Log}(-\tau) = \text{const} = C .$$

L'égalité (50) devient ainsi (49):

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = a_1 + C + a_2 (\tau - \cos\theta) ,$$

expression qui donne bien la valeur voulue:

$$\mathcal{J}(0, \theta) = a_1 - a_2 \cos\theta ,$$

si C est remplacée par une fonction tendant vers zéro avec τ dans la pellicule de surface (voir n° 13).

9. — *La condition* $\varepsilon = 0$, *de* $r = r'$ à $-\tau = 15$. Une complication nouvelle surgit ici.

La forme (48) de B (τ) a été admise dès que $-\tau \geqslant 15$:

$$\left\{\begin{aligned} & B(\tau) = a_1 + C + a_2 \tau , \\ & a_1 = \frac{7}{16} \mathcal{F} , \qquad a_2 = -\frac{27}{32} \mathcal{F} ; \end{aligned}\right.$$

elle est satisfaisante sous certains rapports; mais il est facile de voir qu'elle est incapable de fournir la valeur $\varepsilon = 0$ pour $r = r'$, $(\xi' = 5)$, si l'on s'en tient à l'équation habituelle approchée de l'équilibre radiatif [1]. Rrprenons, en effet, les égalités du n° 4:

$$\frac{dY}{dr} = -3\varepsilon\rho r^2 ,$$

$$Y = \frac{X}{X'} , \qquad X = \frac{dB}{d\tau} , \qquad X' = \frac{1}{r^2} ;$$

on a ici, par (48):

$$\frac{dB}{d\tau} = a_2 , \qquad Y = a_2 r^2 ,$$

$$\frac{dY}{dr} = 2a_2 r = -3\varepsilon\rho r^2 ;$$

d'où:

$$\varepsilon = -\frac{2a_2}{3\rho r} . \tag{52}$$

On trouve aussi (52) en utilisant directement l'égalité (17) du n° 4:

$$\frac{dX}{dr} + \frac{2}{r}X = -3\varepsilon\rho , \qquad X = \frac{dB}{d\tau} ;$$

comme on a toujours $d\tau = k\rho dr$, on trouve [2]:

$$k\rho B''(\tau) + \frac{2}{r}B'(\tau) = -3\varepsilon\rho ; \tag{53}$$

et comme $B''(\tau) = 0$ à cause de la forme linéaire de $B(\tau)$, il vient:

$$\frac{2}{r}\cdot\frac{dB}{d\tau} = -3\varepsilon\rho ,$$

d'où l'égalité (52).

Or, cette expression (52) ne peut pas s'annuler pour $\tau = \tau'$ ou $r = r'$. Elle fournit bien une valeur positive pour ε, valeur

[1] Nous reviendrons, à la fin de l'article, à l'équation complète de l'équilibre radiatif.

[2] Il faut relever que l'égalité (53) a été établie dans l'hypothèse que $B(\tau)$ est développable en série suivant les puissances de τ; c'est le cas de (48).

qui est extrêmement grande lorsque r est très petit, qui diminue d'abord lorsqu'on s'éloigne du centre, mais qui se met à augmenter ensuite lorsqu'on tend vers la périphérie. Cette expression (52) est inadmissible. Cela nous conduit à retoucher la valeur de B (τ).

Raisonnons cependant encore avec l'équation approchée (53) de l'équilibre radiatif; et essayons l'expression:

$$B(\tau) = a_1 + \left[a_2 + A \operatorname{Log}(-\tau) + D \cdot e^{\tau'-\tau}\right]\tau\,, \tag{54}$$

qui se réduit à la suivante, dès que $-\tau \geqslant 15$:

$$B(\tau) = a_1 + C + \left[a_2 + D \cdot e^{\tau'-\tau}\right]\tau\,. \tag{55}$$

Lorsque $\tau = 0$, on a bien B $(0) = a_1$, puisque dans la couche superficielle la quantité C varie avec τ et s'évanouit pour $\tau = 0$.

Nous ne retiendrons, dans ce n° 9, que le cas de $-\tau \geqslant 15$, c'est-à-dire le cas de l'expression (55), où on suppose que B (τ) est développable. On a alors:

$$B'(\tau) = a_2 + D \cdot e^{\tau'-\tau} \cdot (1-\tau) + D' \cdot \tau \cdot e^{\tau'-\tau}\,; \tag{56}$$

$$B''(\tau) = D \cdot e^{\tau'-\tau} \cdot (\tau-2) + 2D' \cdot e^{\tau'-\tau} \cdot (1-\tau) + D'' \cdot \tau \cdot e^{\tau'-\tau} \tag{57}$$

expressions qui, portées dans (53), donnent l'égalité approchée suivante:

$$\left.\begin{aligned} & e^{\tau'-\tau}\left[k\rho\,(\tau D - 2D + 2D' - 2\tau D' + \tau D'') + \right. \\ & \qquad \left. + \frac{2}{r}(D - \tau D + \tau D')\right] + \frac{2a_2}{r} = -3\varepsilon\rho\,, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

qui fournira la valeur de ε quand D sera connu. Nous voulons maintenant réaliser la condition $\varepsilon = 0$ pour $-\tau < -\tau'$. L'égalité (58) donne l'équation:

$$\begin{aligned} & k\rho r(\tau D - 2D + 2D' - 2\tau D' + \tau D'') + \\ & \quad + 2(D - \tau D + \tau D') = -\frac{2a_2}{e^{\tau'-\tau}}\,; \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} k\rho r \cdot \tau D'' + D'[k\rho r(2-2\tau) + 2\tau] + D\,[k\rho r(\tau-2) + 2 - 2\tau] = \\ = -2a_2 \cdot e^{\tau-\tau'} \end{aligned} \tag{59}$$

Telle est l'égalité fournissant la valeur de la fonction D, lorsqu'on part de l'équation approchée (53) de l'équilibre radiatif. En fait, cette équation (53) définit la forme de B (τ) sans qu'on ait à s'occuper de l'équation de transfert. On verra par la suite que ce mode de faire ne donne pas des résultats entièrement satisfaisants.

Remarquons que $k\rho r$ reste supérieur à 10000 dans la couche qui va de $r = r'$ à la surface; on a en effet [1]:

$$\left\{\begin{aligned} r_0 &= 9{,}5 \,.\, 10^{11} \text{ cm}\,, \\ r' &= (0.725)\, r_0 = \text{cm } 6{,}9 \,.\, 10^{11}\,, \\ \rho' &= 0{,}00017\,, \\ -\tau' &\sim (2{,}2) \,.\, 10^{9}\,, \\ \mathcal{F} &= (1{,}144) \,.\, 10^{10}\,, \\ a_1 &= \frac{7}{16}\,\mathcal{F} = (0{,}503) \,.\, 10^{10}\,, \\ a_2 &= -\frac{27}{32}\,\mathcal{F} = -(0{,}97) \,.\, 10^{10} \sim -10^{10}\,, \\ \mathrm{T}' &= 10^{6}\;;\quad \mathrm{T}_c = 10^{7}\;; \end{aligned}\right.$$

d'autre part [2]:

$$k = k_c \left(\frac{\mathrm{T}_c}{\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad k_c \sim 50\;;$$

de sorte que:

$$\left\{\begin{aligned} k' &= 50\,(3{,}1) = 155\,, \\ k'\rho' &= 155\,(0{,}00017) = 0{,}026\,. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si l'on conserve l'approximation de la solution polytropique de classe $n = 3$, on sait qu'on a, avec les variables ξ et ψ de la théorie d'Emden [3]:

$$\mathrm{T} \sim \psi \quad \text{et} \quad \rho \sim \psi^3\;;$$

d'où l'on déduit que:

$$k \sim \psi^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad k\rho \sim \psi^{2{,}5}\,.$$

[1] Valeurs numériques établies pour Capella.
[2] G. Tiercy, *L'équilibre radiatif*, loc. cit., p. 173 et 185.
[3] *Ibid.*, p. 83.

Ainsi

$$k\rho = 0{,}026\left(\frac{\psi}{\psi'}\right)^{2,5} ;$$

le tableau reproduit ci-dessous montre que la quantité $\psi^{2,5}$ devient 10^6 fois plus petite quand on passe de la sphère $r = r'$ à la sphère r_0. Ce tableau indique, pour chaque valeur de ξ de $\xi' = 5$ à $\xi_0 = 6{,}888$ (c'est-à-dire pour chaque valeur de r de r' à r_0), les valeurs correspondantes de ψ, $\psi^{2,5}$ et de l'opacité $(-\tau)$ [1]; les valeurs de l'opacité y sont calculées au moyen de la formule (7), en tenant compte de la variation du coefficient k d'absorption [2].

$\xi \sim r$	ψ	$\psi^{2,5} \sim k\rho$	$-\tau$	valeurs corrigées de $(-\tau)$
$\xi' = 5{,}000$	0,11080	$(4{,}086) \cdot 10^{-3}$	$(2{,}448) \cdot 10^{9}$	$(2{,}159) \cdot 10^{9}$
$\xi = 5{,}500$	0,07426	$(1{,}503) \cdot 10^{-3}$	$(7{,}462) \cdot 10^{8}$	$(5{,}411) \cdot 10^{8}$
6,000	0,04371	$(3{,}994) \cdot 10^{-4}$	$(1{,}445) \cdot 10^{8}$	$(8{,}822) \cdot 10^{7}$
6,500	0,01784	$(4{,}251) \cdot 10^{-5}$	$(8{,}597) \cdot 10^{6}$	$(4{,}114) \cdot 10^{6}$
6,800	0,00414	$(1{,}103) \cdot 10^{-6}$	$(5{,}608) \cdot 10^{4}$	$(1{,}817) \cdot 10^{4}$
6,876	0,00100	$(3{,}163) \cdot 10^{-8}$	$(2{,}748) \cdot 10^{2}$	$(8{,}848) \cdot 10$
6,886	0,00052	$(6{,}237) \cdot 10^{-9}$	$(7{,}350) \cdot 10$	$(1{,}472) \cdot 10$
$\xi_0 = 6{,}888$	0,00043	$(3{,}834) \cdot 10^{-9}$	0	0

Le rapport $\frac{r}{r_0} = \frac{\xi}{\xi_0}$ passant de 0,725 à l'unité alors que $\psi^{2,5}$ devient à peu près 10^6 fois plus petit, il en résulte que la quantité $k\rho r$ passe de $0{,}026\, r' = 1{,}8 \cdot 10^{11}$ à $(0{,}03) \cdot 10^{-6} r' = 2{,}1 \cdot 10^4$; elle est donc toujours supérieure à 10000.

En conséquence, dans les deux crochets de l'équation (59), coefficients de D' et de D, on peut laisser tomber les termes qui ne sont pas multipliés par $k\rho r$; et l'on peut simplifier l'équation comme suit, en négligeant 2 devant τ, du moins jusqu'à la sphère $\xi = 6{,}886$ pour laquelle $-\tau = 15$:

$$k\rho r \cdot \tau D'' - 2k\rho r \cdot \tau D' + k\rho r \cdot \tau D = -2a_2 e^{\tau - \tau'} . \qquad (60)$$

[1] Valeurs calculées dans le cas de l'étoile Capella.
[2] G. Tiercy, *L'équilibre...*, loc. cit., p.381-387.

Il est bien évident que cette équation ne pourra pas être utilisée pour la pellicule extrême de surface, dans laquelle l'opacité prend des valeurs de plus en plus petites. La pellicule extrême devra donc être traitée à part [1]. On obtient ainsi une équation à coefficients constants pour trouver le facteur D:

$$D'' - 2D' + D = -\frac{2a_2 \cdot e^{\tau-\tau'}}{k\rho r \cdot \tau} . \tag{61}$$

Mais $k\rho r$ varie avec τ; et si $k\rho r$ devient 10^7 fois plus petite [2] quand on passe de $\xi = 5$ à $\xi = 6{,}886$, l'opacité $(-\tau)$ devient simultanément environ $(1{,}5) \cdot 10^8$ fois plus petite [3]. Le facteur $k\rho r$ varie donc comme $(-\tau)^{7/8}$, ou en gros comme $(-\tau)$; et l'on peut poser:

$$k\rho r = 10^3 (-\tau) , \tag{62}$$

approximation valable dans la couche en question, c'est-à-dire jusqu'à $\xi = 6{,}886$.

L'équation à résoudre prend alors la forme approchée:

$$D'' - 2D' + D = \frac{2a_2 e^{\tau-\tau'}}{10^3 \tau^2} . \tag{63}$$

On aperçoit immédiatement une solution particulière D_0, qui s'écrit:

$$D_0 = -\frac{2a_2}{10^3} \cdot e^{\tau-\tau'} \cdot \mathrm{Log}(-\tau) ; \tag{64}$$

quant à l'équation sans second membre:

$$D'' - 2D' + D = 0 , \tag{65}$$

elle est à coefficients constants. Avec $D = e^{\lambda\tau}$, l'équation caractéristique est:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 ,$$

qui possède une racine double $\lambda = 1$.

[1] Voir n° 11.
[2] Passant de $(1{,}8) \cdot 10^{11}$ à $(2{,}1) \cdot 10^4$.
[3] Passant de $(2{,}2) \cdot 10^9$ à $(1{,}5) \cdot 10^1$.

La solution $\mathcal{D}$ de (65) d'écrit donc comme suit:

$$\mathcal{D} = e^{\tau}(C_1 + C_2 \tau) \ ; \tag{66}$$

de sorte que la solution complète de (63) est:

$$D = e^{\tau}(C_1 + C_2 \tau) - \frac{2a_2}{10^3} e^{\tau - \tau'} \operatorname{Log}(-\tau) \ . \tag{67}$$

On remarquera que, dans l'expression (54) de $B(\tau)$:

$$B(\tau) = a_1 + [a_2 + A \operatorname{Log}(-\tau) + D e^{\tau' - \tau}] \tau \ ,$$

le terme en C_1 est simplement linéaire en τ, tandis que celui en C_2 est proportionnel à τ^2; de sorte qu'on peut poser:

$$B(\tau) = a_1 + (a_2 + C_1 e^{\tau'}) \tau + C_2 e^{\tau'} . \tau^2 + \left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right) \tau \operatorname{Log}(-\tau) \ . \tag{68}$$

La quantité $D\tau \, . \, e^{\tau' - \tau}$ tend vers zéro lorsque $\tau \longrightarrow 0$. D'ailleurs, dans la couche considérée ici, on a $A\tau \operatorname{Log}(-\tau) = C$; $B(\tau)$ prend la forme (55), et (68) se simplifie comme suit:

$$B(\tau) = (a_1 + C) + (a_2 + C_1 e^{\tau'}) \tau + C_2 e^{\tau'} . \tau^2 - \frac{2a_2}{10^3} \tau \operatorname{Log}(-\tau) \ . \tag{69}$$

Remarquons qu'on a ainsi introduit dans $B(\tau)$ un nouveau terme en $\tau \operatorname{Log}(-\tau)$, distinct de $A\tau \operatorname{Log}(-\tau) = C$; le coefficient en est bien déterminé.

Telle est l'expression de $B(\tau)$ que l'on peut utiliser pour la couche allant de $r = r'$ à la surface; cette expression satisfait à l'équation (59), c'est-à-dire à la condition $\varepsilon = 0$ dans toute la couche en question. Nous rappelons que cette solution a été obtenue en utilisant l'équation approchée (53) de l'équilibre radiatif.

Il reste à fixer la valeur des constantes arbitraires C_1 et C_2; à défaut de toute autre indication expérimentale, nous prendrons $C_2 = 0$; d'autre part, remarquons que la valeur de D pour $\tau = \tau'$ est:

$$D_{\tau = \tau'} = C_1 e^{\tau'} - \frac{2a_2}{10^3} \operatorname{Log}(-\tau') \ ;$$

ce qui suggère de poser:

$$C_1 = \mathcal{C} \cdot \frac{2\,a_2}{10^3} \cdot e^{-\tau'} \cdot \mathrm{Log}\,(-\,\tau') \quad ; \tag{70}$$

on ne connaît pas de condition intérieure supplémentaire permettant de trouver la valeur de $\mathcal{C}$; constatons simplement qu'à toute valeur numérique de $\mathcal{C}$ correspond une valeur déterminée τ_d de l'opacité pour laquelle $D = 0$; D est alors négatif en dehors de cette sphère τ_d et devient positif à l'intérieur. Nous prendrons $\mathcal{C} = 1$, de sorte que D s'annule pour la valeur $\tau_d = \tau'$; D est donc négatif dans la couche qui nous intéresse, entre $r = r'$ et la pellicule superficielle; en dedans de la sphère r', D devient positif. On a donc:

$$D = \frac{2\,a_2}{10^3} e^{\tau-\tau'} \left[\mathrm{Log}\,(-\,\tau') - \mathrm{Log}\,(-\,\tau)\right] , \tag{71}$$

et

$$B(\tau) = a_1 + C + a_2\tau + \frac{2\,a_2}{10^3}\tau \left[\mathrm{Log}\,(-\,\tau') - \mathrm{Log}\,(-\,\tau)\right] . \tag{72}$$

Il convient de remarquer qu'à l'intérieur de la sphère τ', D devient positif, mais reste petit; il passe par un maximum, puis tend vers zéro à mesure que l'on s'approche du centre; cela se voit immédiatement par l'expression (71) où l'on fait $-\,\tau > -\,\tau'$. Le maximum de D se détermine par $D' = 0$, c'est-à-dire:

$$\mathrm{Log}\,(-\,\tau') - \mathrm{Log}\,(-\,\tau) - \frac{1}{\tau} = 0 ,$$

ou:

$$\mathrm{Log}\,(-\,\tau) - \frac{1}{(-\,\tau)} = \mathrm{Log}\,(-\,\tau') ;$$

$(-\,\tau')$ étant égal à $(2,2) \cdot 10^9$, on voit vite que la différence $(-\,\tau_m) - (-\,\tau') = \tau' - \tau_m$ donnant le maximum de D est inférieur à l'unité; elle est de l'ordre de 0,5; d'où, pour le maximum de D, avec $-\,\tau_m = 2{,}2 \cdot 10^9$:

$$D_{\max} = \frac{2\,a_2}{10^3} \cdot e^{0{,}5} \left[\frac{1}{\tau_m}\right] = \frac{2 \cdot 10^{10}}{10^3} \cdot \frac{e^{0{,}5}}{2{,}2 \cdot 10^9} = 0{,}017 \ ;$$

après quoi, D tend vers zéro lorsque $(-\,\tau)$ augmente.

Par contre, l'effet du facteur D, c'est-à-dire le terme complémentaire

$$\frac{2a_2}{10^3}\tau\left[\text{Log}\,(-\tau') - \text{Log}\,(-\tau)\right]$$

de la formule (72) de $B(\tau)$, tout d'abord très petit à côté du terme $a_2\,\tau$ et de signe contraire, augmente peu à peu de valeur absolue lorsque $(-\tau)$ augmente; si donc on conservait ce terme complémentaire dans (72) pour la région centrale de l'étoile, le coefficient global de τ diminuerait et atteindrait zéro pour $-\tau = 10^{220}$ environ. Mais $r < r'$ est la région centrale où la solution polytropique est valable; et l'on admettra que D reste nul à partir de $\tau = \tau'$.

Ainsi, dans la partie centrale de l'étoile, on aurait la solution polytropique, avec raccord pour $\tau = \tau'$, tandis que la formule (72) serait valable de $\tau = \tau'$ jusqu'à la pellicule de surface, c'est-à-dire jusqu'à $-\tau = 15$. C'est ce que nous admettrons pour l'instant.

D'ailleurs, le terme complémentaire de $B(\tau)$ tend vers zéro lorsque $r \longrightarrow 0$.

L'expression (72) présente donc un terme complémentaire en $\tau\,\text{Log}\,(-\tau)$ dès la couche où τ a la valeur τ'; du moins lorsqu'on base le calcul sur l'équation approchée (53) de l'équilibre radiatif [1].

Il convient d'examiner si, avec cette valeur de $B(\tau)$, l'intensité $\mathcal{I}(\tau, \theta)$ conserve la forme simple (35):

$$\mathcal{I}(\tau\,,\ \theta) = B(\tau) - \cos\theta\,.\,B'(\tau)\ ,$$

ce qui, d'ailleurs, n'est nullement obligatoire. Pour cela, il faudrait que, en tenant compte de la valeur de $\mathcal{I}(0, \theta) = a_1 - a_2\cos\theta$, on ait:

$$-B(\tau) + (\tau + \cos\theta)\,.\,B'(\tau) + \mathcal{I}(0\,,\ \theta) = 0\ ,$$

[1] Nous verrons au nº 12 qu'en réalité la forme simple $B(\tau) = a_1 + C + a_2\tau$ peut être conservée jusqu'à la couche superficielle.

comme le montre l'égalité (41). On trouve, au contraire, que le premier membre de l'égalité ci-dessus vaut:

$$\frac{2\,a_2}{10^3}\cos\theta\left[\mathrm{Log}\,(-\tau') - \mathrm{Log}\,(-\tau)\right] - \mathrm{C}\ , \qquad (73)$$

quantité non nulle et positive, C étant négatif [1]. L'intensité $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ ne se réduit donc pas à la forme simple (35); il faut y ajouter le terme (73). Mais cela ne gêne en rien le calcul des éléments dans la couche considérée, au-dessous de la pellicule de surface jusqu'à $\tau = \tau'$; l'intensité $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ augmente tout d'abord un peu plus vite, lorsqu'on va de $-\tau = 15$ vers $\tau = \tau'$, que dans le cas (35), voilà tout. On obtiendra donc, dans cette région, des températures un peu supérieures à celles obtenues au moyen de la formule réduite $\mathrm{B}(\tau) = \frac{7}{16}\mathcal{F} - \frac{27}{32}\mathcal{F}\,.\,\tau$; or cela n'est pas pour déplaire, puisque l'emploi de cette formule réduite dans la couche considérée ne donne pas entière satisfaction; on n'y obtient en effet une distribution convenable de la température T qu'à condition d'introduire un facteur correctif $f > 1$, ce qui conduit aux valeurs corrigées de $-\tau$ données dans la dernière colonne du tableau reproduit plus haut [2].

Avec la nouvelle fonction (72) de $\mathrm{B}(\tau)$, la répartition de la température est donnée par le calcul suivant [3]:

$$\mathrm{B}(\tau) = \frac{\sigma}{\pi}\mathrm{T}^4\ , \qquad \mathcal{F} = \frac{\sigma}{\pi}\mathrm{T}_e^4\ ,$$

$$\mathrm{B}(\tau) = a_1 + \mathrm{C} + a_2\tau + \frac{2\,a_2}{10^3}\tau\left[\mathrm{Log}\,(-\tau') - \mathrm{Log}\,(-\tau)\right]\ ,$$

$$a_1 = \frac{7}{16}\mathcal{F}\ , \qquad a_2 = -\frac{27}{32}\mathcal{F}\ , \qquad \mathrm{Log}\,(-\tau) \backsim 21\ ,$$

$$\mathrm{T}^4 = \frac{7}{16}\mathrm{T}_e^4\left[1 + \alpha\mathrm{C} - \frac{27}{14}\tau - \frac{27}{7}\cdot\frac{1}{10^3}\tau\,.\,\mathrm{Log}\,(-\tau') + \right.$$
$$\left. + \frac{27}{7}\cdot\frac{1}{10^3}\tau\,\mathrm{Log}\,(-\tau)\right]\ ,$$

$$\mathrm{T}^4 = \frac{7}{16}\mathrm{T}_e^4\left[1 + \alpha\mathrm{C} - \frac{27}{14}\tau - \frac{81}{10^3}\tau + \frac{27}{7\,.\,10^3}\tau\,\mathrm{Log}\,(-\tau)\right]\ , \qquad (74)$$

[1] Calcul de C au nº 13.
[2] G. Tiercy, *L'équilibre...*, loc. cit., p. 386-390.
[3] Où $\mathrm{C} < 0$, voir au nº 13.

ou encore:

$$\mathrm{T}^4 = \frac{7}{16}\mathrm{T}_e^4\left(1 + \alpha\mathrm{C} - \frac{27}{14}\tau\right) - \frac{7}{16}\mathrm{T}_e^4 \cdot \tau\left[\frac{81}{10^3} - \frac{27}{7 \cdot 10^3}\,\mathrm{Log}\,(-\tau)\right], \tag{75}$$

où $\alpha = \dfrac{16}{7\,\mathrm{T}_e^4}$.

On voit que le dernier crochet, qui s'annule pour $\tau = \tau'$, reste positif de $-\tau = 15$ à $\tau = \tau'$; la température donnée par (75) est donc supérieure à celle fournie par la formule réduite:

$$\mathrm{T}^4 = \frac{7}{16}\mathrm{T}_e^4\left(1 + \alpha\mathrm{C} - \frac{27}{14}\tau\right). \tag{76}$$

A l'intérieur de la sphère r', le terme correctif en D reste nul, et l'on peut conserver la relation (76); il vaut d'ailleurs mieux y appliquer la solution polytropique, car la courbure des couches n'y est plus négligeable.

10. — *De la dérivée seconde* $\mathrm{B}''(\tau)$. Il s'agit encore ici du cas de $-\tau \geqslant 15$, jusqu'à la sphère r'. La fonction $\mathrm{B}(\tau)$ est donnée par l'expression (72):

$$\mathrm{B}(\tau) = a_1 + \mathrm{C} + a_2\tau + \frac{2a_2}{10^3}\tau\left[\mathrm{Log}\,(-\tau') - \mathrm{Log}\,(-\tau)\right[,$$

où le crochet s'annule pour $\tau = \tau'$. Il vient:

$$\mathrm{B}'(\tau) = a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\left[\mathrm{Log}\,(-\tau') - \mathrm{Log}\,(-\tau)\right] - \frac{2a_2}{10^3};$$

$$\mathrm{B}''(\tau) = \frac{2a_2}{10^3} \cdot \frac{1}{\tau};$$

de sorte que le rapport de $\mathrm{B}''(\tau)$ à $\mathrm{B}(\tau)$ est le suivant:

$$\frac{\mathrm{B}''(\tau)}{\mathrm{B}(\tau)} = \frac{-\dfrac{2a_2}{10^3} \cdot \dfrac{1}{\tau}}{a_1 + \mathrm{C} + a_2\tau + \dfrac{2a_2}{10^3}\tau\left[\mathrm{Log}\,(-\tau') - \mathrm{Log}\,(-\tau)\right]};$$

ce rapport est très petit dans la région considérée; pour $\tau = \tau'$, il vaut $\sim 10^{-21}$; pour $-\tau = 15$, il vaut $4 \cdot 10^{-6}$. On peut donc dire que, si ce rapport est très petit pour $r = r'$, il reste petit pour

— $\tau = 15$, c'est-à-dire à la limite inférieure de la pellicule de surface; dans toute la couche considérée, il présente une valeur moyenne très petite.

Ainsi la forme (72) de $B(\tau)$ vérifie, d'une façon qui paraît satisfaisante, cette condition résultant des études d'Eddington: la dérivée seconde $B''(\tau)$ est très petite à côté de la fonction elle-même.

Le calcul d'Eddington indique, pour le rapport de B'' à B, une valeur de l'ordre de 10^{-20} pour une température absolue de 10^6 degrés; or, une telle température est celle qui règne au niveau r', pour lequel nous avons trouvé la valeur de 10^{-21} du rapport en question. Pour la région centrale de l'étoile, la comparaison des deux calculs n'est pas possible; le taux de libération d'énergie $4\pi\varepsilon$ utilisé par Eddington est en effet une moyenne concernant toute l'étoile.

(à suivre)

ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE RADIATIF ET DU TRANSFERT D'ÉNERGIE

PAR

Georges TIERCY

(suite)

11. — *La pellicule de surface.* Il reste à voir si la solution (54) de $B(\tau)$ est capable d'assurer encore la nullité de ε dans la pellicule de surface, c'est-à-dire entre $-\tau = 15$ et $\tau = 0$. On a alors, en écrivant $A\tau \operatorname{Log}(-\tau)$ à la place de C:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau + A\tau \operatorname{Log}(-\tau) + D\tau \,.\, e^{\tau'-\tau} \;;$$

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau + A\tau \operatorname{Log}(-\tau) + \frac{2a_2}{10^3}\tau\left[\operatorname{Log}(-\tau') - \operatorname{Log}(-\tau)\right] \,, \tag{77}$$

où le coefficient A, donné par l'expression (46) lorsque $-\tau > 15$, prend la valeur:

$$A = -\frac{C}{15 \operatorname{Log} 15} \,,$$

valeur positive puisque $C < 0$.

On remarquera que le terme $D\tau e^{\tau'-\tau}$ de (77) devient nul en même temps que τ, donc à la surface de la photosphère. Si A est un nombre fini, on a bien:

$$B(0) = a_1 \,,$$

valeur de surface.

Dans l'application de la formule (77) à la pellicule extrême, on pourra, pratiquement, considérer celle-ci comme formée de couches très minces, dans chacune desquelles la quantité $A\tau \operatorname{Log}(-\tau) = C_a$ prendrait une valeur déterminée, qui serait constante pour la couche. On pourrait aussi envisager que A est constante dans chaque couche. Ou bien l'on considérera que C_a est une fonction de τ à trouver.

Dans l'une ou l'autre de ces interprétations, la dérivée $B'(\tau)$ prendra une valeur infinie négative pour $\tau = 0$. Jusqu'ici, tout va bien.

Mais qu'en est-il de la quantité ε? L'expression (77) permet-elle d'avoir encore $\varepsilon = 0$, comme il le faut ?

Rappelons que, d'après (14) ou (53), on a, dans le cas d'une fonction $B(\tau)$ développable, et en première approximation:

$$k\rho B''(\tau) + \frac{2}{r} B'(\tau) = -3\varepsilon\rho \; ; \tag{79}$$

en y faisant $\varepsilon = 0$, on peut être tenté d'en tirer une valeur de A pour chaque couche mince. On aurait alors, avec (77) et en traitant A comme une constante à l'intérieur de chaque couche mince:

$$B'(\tau) = a_2 + A\left[\operatorname{Log}(-\tau) + 1\right] +$$

$$+ \frac{2a_2}{10^3}\left[\operatorname{Log}(-\tau') - \operatorname{Log}(-\tau)\right] - \frac{2a_2}{10^3} \; ;$$

$$B''(\tau) = \left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right) \cdot \frac{1}{\tau} \; ;$$

$$\left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\frac{k\rho}{\tau} + \frac{2}{r}\left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\operatorname{Log}(-\tau) + \frac{2}{r}\left[a_2 + A - \frac{2a_2}{10^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2a_2}{10^3}\operatorname{Log}(-\tau')\right] = 0 \; ;$$

$$A = \frac{\tau\left[-2a_2 + \frac{4a_2}{10^3} - \frac{4a_2}{10^3}\operatorname{Log}(-\tau') + \frac{4a_2}{10^3}\operatorname{Log}(-\tau)\right] + \frac{2a_2}{10^3}k\rho r}{k\rho r + 2\tau\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right]} \; ;$$

ou, en réduisant le crochet à ses termes essentiels [1]:

$$A = \frac{\tau\left[-2a_2 + \frac{4a_2}{10^3}\operatorname{Log}(-\tau)\right] + \frac{2a_2}{10^3}k\rho r}{k\rho r + 2\tau\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right]} \; ; \qquad (80)$$

mais cette expression de A n'est pas acceptable; dans la couche qui va de $-\tau = 15$ à $\tau = 0$, le dénominateur reste positif, tandis que le numérateur est négatif; il est impossible d'annuler ce dernier, même en pénétrant dans l'étoile jusqu'à la valeur $(-\tau')$ de l'opacité [2]. Or A est positif pour $-\tau \geqslant 15$.

Il convient donc de reprendre la question en traitant A comme une nouvelle fonction de τ. Il nous faut une expression de A qui parte de la valeur (78) pour $-\tau = 15$, qui rende $B'(\tau)$ infinie négative pour $\tau = 0$, et qui donne $\varepsilon = 0$. Est-il possible de satisfaire à ces trois conditions?

Reprenons (77), en y considérant A comme fonction de τ. On obtient:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau + A\tau\operatorname{Log}(-\tau) + \frac{2a_2}{10_3}\tau\left[\operatorname{Log}(-\tau') - \operatorname{Log}(-\tau)\right] \; ;$$

$$B(\tau) = a_1 + \left[a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\operatorname{Log}(1-\tau')\right]\tau + \left[A - \frac{2a_2}{10^3}\right]\tau\operatorname{Log}(-\tau) \; ; \qquad (81)$$

$$B'(\tau) = a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\operatorname{Log}(-\tau') + $$
$$+ \left[A - \frac{2a_2}{10^3}\right]\left[\operatorname{Log}(-\tau) + 1\right] + \frac{dA}{d\tau} \cdot \tau\operatorname{Log}(-\tau) \; ;$$

$$\left.\begin{aligned} B'(\tau) &= a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\operatorname{Log}(-\tau') + \frac{d}{d\tau}\left[\left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\tau\operatorname{Log}(-\tau)\right] \; ; \\ B''(\tau) &= \frac{d^2}{d\tau^2}\left[\left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\tau\operatorname{Log}(-\tau)\right] \; ; \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

---

[1] On a:

$$\left\{\begin{array}{lll} \operatorname{Log}(-\tau') = 21{,}5 \; ; & (k\rho)_{\text{pellicule}} & = (0{,}026) \cdot 10^{-6} \; ; \\ r_0 \sim 10^{12} \; ; & & \\ a_2 = -10^{10} \; ; & (k\rho r)_0 & = (0{,}026) \cdot 10^{+6} = (2{,}6) \cdot 10^4 \,. \end{array}\right.$$

[2] En posant que le numérateur est nul, on obtient l'équation:

$$(-\tau) \cdot [4 \cdot 10^7 \operatorname{Log}(-\tau) - 2 \cdot 10^{10}] = (5{,}2) \cdot 10^{11} \,,$$

qui ne peut être satisfaite pour $-\tau \leqslant -\tau'$.

et essayons d'utiliser encore l'équation approchée (79); celle-ci devient, en y faisant $\varepsilon = 0$:

$$k\rho \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}\left[\left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\tau \,\mathrm{Log}\,(-\tau)\right] +$$

$$+ \frac{2}{r}\left\{ a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\mathrm{Log}\,(-\tau') + \frac{d}{d\tau}\left[\left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\tau\,\mathrm{Log}\,(-\tau)\right]\right\} = 0 \,. \quad (83)$$

Répétons que cette équation (53) ou (79) a été établie dans l'hypothèse d'une fonction B (τ) développable en série suivant les puissances de τ; ce n'est plus le cas actuellement; de sorte qu'on ne peut plus attacher une importance primordiale à l'équation (83).

Gardons-la cependant; et voyons ce qu'on en peut tirer. Posons:

$$X = \left(A - \frac{2a_2}{10^3}\right)\tau\,\mathrm{Log}\,(-\tau) \,, \qquad (84)$$

où A serait une certaine fonction de τ; l'équation (83) devient:

$$k\rho \cdot \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{dX}{d\tau} = -\frac{2}{r}\left[a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\mathrm{Log}\,(-\tau')\right] =$$

$$= -\frac{2a_2}{r}\,(1{,}043) \,. \qquad (85)$$

On voit immédiatement une solution particulière de cette condition:

$$\frac{dX_1}{d\tau} = \text{const.} = -a_2\left[1 + \frac{2}{10^3}\,\mathrm{Log}\,(-\tau')\right] = -1{,}043\ a_2 \;;$$

$$X_1 = -1{,}043\ a_2\tau \;; \qquad (86)$$

quant à la solution de l'équation sans second membre, on l'obtient en posant:

$$X = e^{\lambda\tau} \,,$$

ce qui donne l'équation caractéristique suivante:

$$k\rho \cdot \lambda^2 + \frac{2}{r}\lambda = 0 \;; \qquad (87)$$

il est vrai que r varie légèrement à travers la pellicule de surface; mais cette variation est si peu de chose en face du rayon lui-même qu'on peut traiter r comme constante et l'égaler pratiquement à r_0, à condition, bien entendu, de ne considérer ici que la pellicule en question. On fera de même $k\rho =$ const. $= (k\rho)_0 = 2{,}6.10^{-8}$; ce qui donne, avec $r_0 = 10^{12}$:

$$k\rho r_0 = 2{,}6 \,.\, 10^4 \,.$$

Les racines de (87) sont:

$$\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\frac{2}{k\rho r_0} = -0{,}8 \,.\, 10^{-4} = -8 \,.\, 10^{-5} \;;$$

et la solution de l'équation différentielle privée de second membre s'écrit:

$$\mathrm{K}e^{-\frac{8\tau}{10^5}} + \mathrm{K}'e^0 = \mathrm{K}e^{-\frac{8\tau}{10^5}} + \mathrm{Q} \,,$$

où K et Q sont des constantes arbitraires; la solution générale de (85) est donc la suivante:

$$\mathrm{X} = \mathrm{K}e^{-\frac{8\tau}{10^5}} + \mathrm{Q} - \tau\left[a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\,\mathrm{Log}\,(-\tau')\right] . \qquad (88)$$

Remarquons qu'en faisant $K = 0$, on trouve:

$$\mathrm{X}_{\tau=0} = \mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}\,(0) = a_1 + \mathrm{Q} \;;$$

B (0) est donc une valeur finie; la condition $\varepsilon = 0$ de (85) est satisfaite, puisque $\mathrm{X} = \mathrm{Q} - a_2\,\tau$ est une solution de cette équation; par contre, on trouve que:

$$\mathrm{B}'(\tau) = \frac{2a_2}{10^3}\,\mathrm{Log}\,(-\tau') = \text{const.} \,,$$

ce qui ne convient pas pour $\tau = 0$.

Il convient donc de faire $\mathrm{K} \neq 0$. On obtient alors:

$$\frac{d\mathrm{X}}{d\tau} = -\frac{8\,\mathrm{K}}{10^5}\,e^{-\frac{8\tau}{10^5}} - \left[a_2 + \frac{2a_2}{10^3}\,\mathrm{Log} - \tau')\right] \;; \qquad (89)$$

d'où par (81):

$$\mathrm{B}'(\tau) = -\frac{8\,\mathrm{K}}{10^5}\,e^{-\frac{8\tau}{10^5}} \,, \qquad (90)$$

expression qui, malheureusement, ne contient plus de terme en Log $(-\tau)$; on voit qu'alors, si l'on veut que $B'(0)$ prenne une valeur très grande négative, il faut faire K très grand.

On a:

$$B'(0) = -\frac{8\,K}{10^5} ;$$

exigeons par exemple que $B'(0) = 1000\,a_2 \sim -10^{13}$; on trouve que K doit recevoir la valeur $K = \frac{1}{8}10^{18}$, soit $K \sim 10^{17}$.

La condition $\varepsilon = 0$ est satisfaite; $B'(0)$ prend une valeur négative très grande; cela va bien. Mais y a-t-il raccord avec la valeur (78):

$$A_{15} = -\frac{C}{15 \text{ Log } 15} ,$$

que prend A pour $-\tau = 15$?

Avec $K \sim 10^{17}$, on trouve par l'égalité (88) et pour $-\tau = 15$:

$$A = -\frac{10^{17} \,.\, e^{0{,}0012} + Q - 10^{10} \,.\, 15 \,.\, 1{,}043}{15 \text{ Log } 15} + \frac{2\,a_2}{10^3} ,$$

$$A = -\frac{(1{,}0012) \,.\, 10^{17} + Q - 1{,}56 \,.\, 10^{11}}{15 \text{ Log } 15} - 2 \,.\, 10^7 ;$$

mais remarquons que, par (88), X doit s'annuler pour $\tau = 0$; c'est-à-dire qu'on doit avoir:

$$K + Q = 0 \qquad \text{ou} \qquad Q = -K ;$$

de sorte qu'avec $K = 10^{17}$, la valeur de A devient pour $-\tau = 15$:

$$A = -\frac{(0{,}0012) \,.\, 10^{17} - 1{,}56 \,.\, 10^{11}}{40{,}62} - 2 \,.\, 10^7 ,$$

valeur visiblement négative; en l'égalant à (78), on trouve que C doit valoir $+\,1{,}2 \,.\, 10^{14}$, valeur positive dépendant de celle adoptée pour K. Cela ne vas pas. D'ailleurs, il faut tenir compte du fait que X doit s'annuler, non seulement pour $\tau = 0$, mais encore pour $-\tau = 1$; ce qui donne deux conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs de K et Q:

$$\left.\begin{aligned} &K + Q = 0 , \\ &K \,.\, e^{8 \cdot 10^{-5}} + Q + 1{,}043\,a_2 = 0 ; \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

on en tire:

$$Q = - K \ ,$$

$$Q = \frac{1,043 \ . \ a_2}{0,00008} = - \frac{10^{10} \ . \ (1,043)}{0,00008} = - (1,3) \ . \ 10^{14} \ ,$$

$$K = + (1,3) \ . \ 10^{14} \ ;$$

valeurs incompatibles avec le calcul précédent, basé sur l'hypothèse que $B'(0)$ serait de l'ordre de $1000 \, a_2$; si, par contre, on adopte pour K la valeur 10^{14} ci-dessus, on trouve que $B'(0) = - 10^{10} = a_2$, valeur négative insuffisante; $B'(0)$ ne prendrait pas une valeur infinie négative, puisqu'il n'y a plus de terme en Log $(- \tau)$ dans $B(\tau)$.

On en conclut qu'il faut retoucher l'expression (88) de X, solution de l'équation approchée (83); cela n'a rien d'étonnant, puisque cette équation, qui traduit que $\varepsilon = 0$, correspond au cas où $B(\tau)$ est développable en série suivant les puissances de τ, et même au cas des couches planes.

Il est d'ailleurs facile de vérifier que, si le second membre de (88) s'annule pour $- \tau = 1$, la vraie valeur correspondante de A est finie; elle est en effet donnée par:

$$\left[\frac{- \frac{8}{10^5} K \ . \ e^{-\frac{8\tau}{10^5}} - 1,043 \, a_2}{\text{Log} \, (- \tau) + 1} \right]_{-\tau=1} = A - \frac{2 a_2}{10^3} = - \frac{8K}{10^5} e^{8 . 10^{-5}} - 1,043 \, a_2 \ . \qquad (92)$$

12. — *Nouvelle approximation de* $B(\tau)$. Au lieu de partir des équations approchées usuelles (1) à (5), nous partirons ici des équations générales de la théorie de l'équilibre radiatif. Ce sont les suivantes:

1° Solution de l'équation de transfert d'énergie sous la forme (39) ou (93):

$$\mathcal{I}(\tau \ , \ \theta) = \int_0^{\tau} B(t) \ . \ e^{(t-\tau) \sec \theta} \sec \theta \ . \ dt + \mathcal{I}(0 \ , \ \theta) \ . \ e^{-\tau \sec \theta} \ , \qquad (93)$$

où

$$\mathcal{I}(0 \ , \ \theta) = \frac{7}{16} \mathcal{F} + \frac{27}{32} \mathcal{F} \ . \cos \theta = a_1 - a_2 \cos \theta \ ; \qquad (94)$$

2º Equation de l'équilibre radiatif:

$$\frac{\varepsilon}{k} = \mathrm{B} - \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{I}(\tau, \theta) \,.\, d\omega \;; \tag{95}$$

3º Expression du flux radial:

$$\mathrm{F} = \int \mathcal{I}(\tau, \theta) \,.\, \cos\theta \,.\, d\omega \,. \tag{96}$$

Lorsqu'il y a équilibre radiatif proprement dit, c'est-à-dire lorsque le taux de libération d'énergie est nul, comme c'est le cas dans la partie extérieure de l'étoile, l'équation de l'équilibre radiatif devient, avec $\varepsilon = 0$:

$$\mathrm{B}(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathcal{I}(\tau, \theta) \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta \;; \tag{97}$$

cette dernière équation remplace l'équation approchée (77). De sorte que nous allons dès lors baser le calcul essentiellement sur les égalités (93) et (97).

En posant:

$$(t - \tau)\sec\theta = t' = -\varphi \,, \qquad \sec\theta \,.\, dt = -d\varphi \,,$$

l'égalité (93) devient:

$$\mathcal{I}(\tau, \theta) = \int_0^{\tau\sec\theta} \mathrm{B}(\tau - \varphi\cos\theta) \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi + \mathcal{I}(0, \theta) \,.\, e^{-\tau\sec\theta} \,. \tag{93 bis}$$

Il est évident que les équations (97) et (93 *bis*) permettent un jeu d'approximations successives.

Relevons tout d'abord une simplification considérable de la solution cherchée. Nous avons montré au nº 8 que si $\mathrm{B}(\tau)$ a la forme linéaire (36):

$$\mathrm{B}(\tau) = a_1 + a_2\tau \,,$$

l'intensité $\mathcal{I}(\tau, \theta)$ se réduit à l'expression (35):

$$\mathcal{I}(\tau, \theta) = \mathrm{B}(\tau) - \cos\theta \,.\, \mathrm{B}'(\tau) = a_1 + a_2(\tau - \cos\theta) \;;$$

c'est en effet le cas où $\mathrm{B}(\tau)$ est développable.

On voit alors immédiatement qu'en portant cette valeur de l'intensité dans l'égalité (97), on retrouve:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau \ .$$

Ainsi, tant que $B(\tau)$ reste développable et garde la forme linéaire, l'équation (97) de l'équilibre radiatif strict ($\varepsilon = 0$) est satisfaite, de même que l'équation de transfert d'énergie. Or, ces conditions sont vérifiées, au moins d'une façon approchée, tant qu'on n'aborde pas la pellicule superficielle. Il résulte de cette remarque que, dans la couche comprise entre $\tau = \tau'$ et $-\tau = 15$, il n'est nullement besoin de faire intervenir dans $B(\tau)$ le terme complémentaire en $\tau \operatorname{Log}(-\tau)$, qui ne s'était introduit dans l'expression (77) que pour satisfaire à l'équation approchée (53) de l'équilibre radiatif. C'est là la simplification à laquelle nous faisions allusion plus haut. Ainsi, un terme complémentaire en $\tau \operatorname{Log}(-\tau)$ n'interviendra que dans la pellicule de surface, pour laquelle nous écrirons simplement:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau - a_3 \tau \operatorname{Log}(-\tau) \ , \tag{98}$$

comme on l'a proposé au n° 5. Remarquons d'ailleurs que cela revient, à très peu près, à poser simplement

$$A - \frac{2a_2}{10^3} = -a_3 = \text{const.}$$

dans l'expression (77) écrite comme suit:

$$B(\tau) = a_1 + \left[a_2 + \frac{2a_2}{10^3} \cdot \operatorname{Log}(-\tau')\right]\tau + \left[A - \frac{2a_2}{10^3}\right]\tau \operatorname{Log}(-\tau) \ ;$$

car le coefficient $1{,}043\, a_2$ du terme en τ n'y diffère guère de a_2.

Au n° 6, alors que le calcul était basé sur l'équation approchée (14) de l'équilibre radiatif, on était arrivé à la conclusion que la solution (23) avec A constant n'était pas satisfaisante. Avec l'expression (98), où a_3 est une constante, on revient à cette première idée.

Contrairement à ce qu'on a cru pouvoir affirmer à la fin du n° 6, nous allons constater que la forme (98) est admissible, à condition de baser le calcul sur l'équation exacte (97) de l'équilibre radiatif, et non plus sur l'équation approchée (3) ou (14).

Il faut d'ailleurs rappeler ici que la forme (98) n'est applicable qu'à la pellicule superficielle; tandis que, pour $-\tau > 15$, on a posé (46):

$$A = \frac{C}{\tau \operatorname{Log}(-\tau)} ,$$

qui, avec la notation de (98), devient:

$$-a_3 \tau \operatorname{Log}(-\tau) = C , \qquad (99)$$

où C est négatif.

Partons donc de la forme (98) de $B(\tau)$; et portons cette expression dans l'intégrale de (93 *bis*).

En désignant cette intégrale par S, on trouve:

$$S = \int_0^{\tau \sec\theta} \Big[a_1 + a_2(\tau - \varphi \cos\theta) - a_3(\tau - \varphi\cos\theta) \,.\, \operatorname{Log}(\varphi\cos\theta - \tau)\Big] \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi \ ; \qquad (100)$$

$$\left.\begin{aligned} S = {} & a_1 \int_0^{\tau\sec\theta} e^{-\varphi}\, d\varphi + a_2 \tau \int_0^{\tau\sec\theta} e^{-\varphi}\, d\varphi - a_2 \cos\theta \,.\, \int_0^{\tau\sec\theta} \varphi \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi - \\ & - a_3 \int_0^{\tau\sec\theta} (\tau - \varphi\cos\theta) \,.\, \operatorname{Log}(\varphi\cos\theta - \tau) \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi \ ; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} S = {} & a_1(1 - e^{-\tau\sec\theta}) + a_2\tau(1 - e^{-\tau\sec\theta}) - \\ & - a_2 \cos\theta \left[1 - e^{-\tau\sec\theta} - \tau\sec\theta \,.\, e^{-\tau\sec\theta}\right] \\ & - a_3 \int_0^{\tau\sec\theta} (\tau - \varphi\cos\theta) \,.\, \operatorname{Log}(\varphi\cos\theta - \tau) \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi \,. \end{aligned}\right\} \quad (101)$$

Prenons à part le dernier terme; il donne:

$$\begin{aligned} S' = {} & - a_3 \tau \int_0^{\tau\sec\theta} \operatorname{Log}(\varphi\cos\theta - \tau) \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi + \\ & + a_3 \cos\theta \int_0^{\tau\sec\theta} \varphi \,.\, \operatorname{Log}(\varphi\cos\theta - \tau) \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi \ ; \end{aligned}$$

$$S' = - a_3 \tau \,.\, S_1 + a_3 \cos\theta \,.\, S_2 \ ; \qquad (102)$$

on trouve facilement [1]:

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= (1 - e^{-\tau \sec \theta}) \,.\, \mathrm{Log}\,(-\tau) - e^{-\tau \sec \theta}\left[\tau \sec \theta + \frac{(\tau \sec \theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right], \\
S_2 &= -(\tau \sec \theta + 1)\,e^{-\tau \sec \theta} \,.\, \mathrm{Log}\,(-\tau) + \mathrm{Log}\,(-\tau) - e^{-\tau \sec \theta} + 1 - \\
&\quad - (\tau \sec \theta + 1)\,e^{-\tau \sec \theta}\left[\tau \sec \theta + \frac{(\tau \sec \theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right];
\end{aligned}\right\} \quad (103)$$

---

[1] On a en effet:

$$S_1 = \int_0^{\tau \sec \theta} \left[\mathrm{Log} \cos \theta + \mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta)\right] e^{-\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \mathrm{Log} \cos \theta \int_0^{\tau \sec \theta} e^{-\varphi}\, d\varphi + \int_0^{\tau \sec \theta} e^{-\varphi} \,.\, \mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta)\, d\varphi \;;$$

$$S_1 = \mathrm{Log} \cos \theta \,.\, (1 - e^{-\tau \sec \theta}) + \left[- e^{-\varphi} \,.\, \mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta)\right]_0^{\tau \sec \theta} + \int_0^{\tau \sec \theta} \frac{e^{-\varphi}\, d\varphi}{\varphi - \tau \sec \theta} \;;$$

$$S_1 = \mathrm{Log} \cos \theta\,(1 - e^{-\tau \sec \theta}) + \left[- e^{-\varphi} \,.\, \mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta)\right]_0^{\tau \sec \theta} +$$

$$+ e^{-\tau \sec \theta} \int_0^{\tau \sec \theta} \frac{e^{-(\varphi - \tau \sec \theta)} \,.\, d\,(\varphi - \tau \sec \theta)}{\varphi - \tau \sec \theta} \;;$$

l'intégrale du dernier terme est de la forme:

$$\int \frac{e^{-x}\, dx}{x} = \text{const.} + \mathrm{Log}\, x - x + \frac{x^2}{1\,.\,2^2} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3^2} + \ldots \;;$$

$$S_1 = \mathrm{Log} \cos \theta \,.\, (1 - e^{-\tau \sec \theta}) + \left[- e^{-\varphi} \,.\, \mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta)\right]_0^{\tau \sec \theta} +$$

$$+ e^{-\tau \sec \theta}\left[\mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta) - (\varphi - \tau \sec \theta) + \frac{(\varphi - \tau \sec \theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right]_0^{\tau \sec \theta} \;;$$

comme le produit $(e^{-\tau \sec \theta} - e^{-\varphi}) \,.\, \mathrm{Log}\,(\varphi - \tau \sec \theta)$ donne zéro pour $\varphi = \tau \sec \theta$, il reste:

$$S_1 = \mathrm{Log} \cos \theta \,.\, (1 - e^{-\tau \sec \theta}) + (1 - e^{-\tau \sec \theta}) \,.\, \mathrm{Log}\,(-\tau \sec \theta) -$$

$$- e^{-\tau \sec \theta}\left[\tau \sec \theta + \frac{(\tau \sec \theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right] \;;$$

$$S_1 = (1 - e^{-\tau \sec \theta}) \,.\, \left[\mathrm{Log} \cos \theta + \mathrm{Log}\,(-\tau \sec \theta)\right] -$$

$$- e^{-\tau \sec \theta}\left[\tau \sec \theta + \frac{(\tau \sec \theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right],$$

d'où la valeur indiquée sous (103).

d'où pour S':

$$\left\{\begin{aligned} S' = &- a_3 \tau (1 - e^{-\tau \sec\theta}) \operatorname{Log}(-\tau) + a_3 \tau \,.\, e^{-\tau\sec\theta}\left[\tau\sec\theta + \frac{(\tau\sec\theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right] - \\ &- a_3 \cos\theta \,.\, (\tau\sec\theta + 1) \,.\, e^{-\tau\sec\theta} \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) + a_3\cos\theta \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) + \\ &+ a_3 \cos\theta (1 - e^{-\tau\sec\theta}) - a_3\cos\theta(\tau\sec\theta + 1) e^{-\tau\sec\theta}\left[\tau\sec\theta + \frac{(\tau\sec\theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right] \quad ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} S' = &- a_3\tau(1 - e^{-\tau\sec\theta}) \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) - a_3(\tau + \cos\theta) e^{-\tau\sec\theta} \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) - \\ &- a_3\cos\theta \,.\, e^{-\tau\sec\theta}\left[\tau\sec\theta + \ldots\right] + a_3\cos\theta\left[\operatorname{Log}(-\tau) - e^{-\tau\sec\theta} + 1\right] \quad ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} S' = &- a_3\tau \operatorname{Log}(-\tau) - a_3\cos\theta \,.\, e^{-\tau\sec\theta} \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) + a_3\cos\theta \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) - \\ &- a_3\cos\theta \,.\, e^{-\tau\sec\theta} + a_3\cos\theta - a_3\cos\theta \,.\, e^{-\tau\sec\theta}\left[\tau\sec\theta + \frac{(\tau\sec\theta)^2}{1\,.\,2^2} + \ldots\right] . \end{aligned}\right.$$

En portant cette expression dans la valeur (101) de S, on obtient pour l'intensité $\mathcal{I}(\tau, \theta)$ par (93 *bis*), après suppression

---

(Suite de la note p. 179.)

De même on a pour S_2:

$$S_2 = \int_0^{\tau\sec\theta} \varphi \,.\, \left[\operatorname{Log}\cos\theta + \operatorname{Log}(\varphi - \tau\sec\theta)\right] e^{-\varphi}\, d\varphi \quad ;$$

$$\begin{aligned} S_2 = \operatorname{Log}\cos\theta \,.\, &\int_0^{\tau\sec\theta} \varphi \,.\, e^{-\varphi}\, d\varphi + \int_0^{\tau\sec\theta} \varphi \,.\, \operatorname{Log}(\varphi - \tau\sec\theta)\, e^{-\varphi}\, d\varphi = \\ &= \operatorname{Log}\cos\theta \,.\, \left[1 - e^{-\tau\sec\theta}(\tau\sec\theta + 1)\right] + \\ &\qquad + \int_0^{\tau\sec\theta} \operatorname{Log}(\varphi - \tau\sec\theta) \,.\, d\left[- e^{-\varphi}(\varphi + 1)\right] \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 = &\operatorname{Log}\cos\theta \,.\, \left[1 - e^{-\tau\sec\theta}(\tau\sec\theta + 1)\right] + \\ &+ \left[- e^{-\varphi}(\varphi + 1) \,.\, \operatorname{Log}(\varphi - \tau\sec\theta)\right]_0^{\tau\sec\theta} + \int_0^{\tau\sec\theta} \frac{e^{-\varphi}(\varphi + 1)\, d\varphi}{\varphi - \tau\sec\theta} \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 = &\operatorname{Log}\cos\theta \,.\, \left[1 - e^{-\tau\sec\theta}(\tau\sec\theta + 1)\right] + \\ &+ \left[- e^{-\varphi}(\varphi + 1) \,.\, \operatorname{Log}(\varphi - \tau\sec\theta)\right]_0^{\tau\sec\theta} + \\ &+ e^{-\tau\sec\theta} \int_0^{\tau\sec\theta} \frac{e^{-(\varphi - \tau\sec\theta)} \,.\, (\varphi - \tau\sec\theta + \tau\sec\theta + 1) \,.\, d(\varphi - \tau\sec\theta)}{\varphi - \tau\sec\theta} \,. \end{aligned}$$

des termes qui s'annulent entre eux, et en rappelant que $\mathcal{J}(0, \theta) = a_1 - a_2 \cos \theta$:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{J}(\tau, \theta) &= a_1 + a_2\tau - a_2 \cos \theta - a_3\tau \operatorname{Log}(-\tau) \\ &+ a_3 \cos \theta \, . \operatorname{Log}(-\tau) \, . \left[1 - e^{-\tau \sec \theta}\right] + a_3 \cos \theta \left[1 - e^{-\tau \sec \theta}\right] \\ &- a_3 \cos \theta \, . \, e^{-\tau \sec \theta} \left[\tau \sec \theta + \frac{(\tau \sec \theta)^2}{1 \, . \, 2^2} + \ldots\right],\end{aligned}\right\} \quad (104)$$

valeur qui se réduit à $\mathcal{J}(0, \theta) = a_1 - a_2 \cos \theta$ pour $\tau = 0$, comme il le faut.

Remarquons en passant qu'en portant directement l'expression (98) de B (τ) dans l'égalité (40) du n° 7, on retrouve la valeur (104) ci-dessus, avec la seule différence que le crochet du dernier terme se réduit alors à $[\tau \sec \theta]$; or τ reste petit, puisqu'il s'agit ici de la pellicule de surface; si donc le coefficient a_3 est lui-même petit à côté de a_1 et a_2, on peut dire que l'égalité (40) est valable près de la surface; nous avons d'ailleurs déjà remarqué au n° 7 que son second membre reste fini, même si B' (τ) devient infinie pour $\tau = 0$.

L'expression (104) peut être allégée. D'abord, le crochet du dernier terme est très peu différent du développement de

---

(Suite de la note p. 179.)

L'intégrale du dernier terme est du type:

$$\int \frac{e^{-x} \, . \, (x + \tau \sec \theta + 1)\, dx}{x} = \int e^{-x} dx + (\tau \sec \theta + 1) \, . \int \frac{e^{-x}\, dx}{x}$$

$$= - e^{-x} + (\tau \sec \theta + 1) \, . \left[\operatorname{Log} x - x + \frac{x^2}{1 \, . \, 2^2} - \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3^2} + \ldots\right];$$

$$\mathrm{S}_2 = \operatorname{Log} \cos \theta \, . \left[1 - e^{-\tau \sec \theta}(\tau \sec \theta + 1)\right] +$$

$$+ \left[- e^{-\varphi}(\varphi + 1) \, . \operatorname{Log}(\varphi - \tau \sec \theta)\right]_0^{\tau \sec \theta} + e^{-\tau \sec \theta} \, . \left(e^{\tau \sec \theta} - 1\right) +$$

$$+ (\tau \sec \theta + 1) \, . \, e^{-\tau \sec \theta} \, . \left[\operatorname{Log}(\varphi - \tau \sec \theta) - (\varphi - \tau \sec \theta) + \frac{(\varphi - \tau \sec \theta)^2}{1 \, . \, 2^2} - \ldots\right]_0^{\tau \sec \theta};$$

comme le produit $[(\tau \sec \theta + 1) \, . \, e^{-\tau \sec \theta} - e^{-\varphi}(\varphi + 1)] \, . \operatorname{Log}(\varphi - \tau \sec \theta)$ donne zéro pour $\varphi = \tau \sec \theta$, il reste:

$$\mathrm{S}_2 = \operatorname{Log} \cos \theta \left[1 - e^{-\tau \sec \theta}(\tau \sec \theta + 1)\right] + \operatorname{Log}(-\tau \sec \theta) +$$

$$+ 1 - e^{-\tau \sec \theta} - (\tau \sec \theta + 1) \, . \, e^{-\tau \sec \theta} \left[\operatorname{Log}(-\tau \sec \theta) + \tau \sec \theta + \frac{(\tau \sec \theta)^2}{1 \, . \, 2^2} + \ldots\right]$$

d'où la valeur indiquée sous (103).

$[e^{\tau \sec\theta} - 1]$; de sorte que ce dernier terme peut être remplacé par $- a_3 \cos\theta\,[1 - e^{-\tau\sec\theta}]$, annulant ainsi le terme précédent. Il reste:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = a_1 + a_2\tau - a_2 \cos\theta - a_3\tau \operatorname{Log}(-\tau) + \\ + a_3 \cos\theta \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) \,.\, \left[1 - e^{-\tau\sec\theta}\right] ;$$

constatons ensuite que la présence d'un terme contenant sec θ en exposant positif est gênante, car un tel terme devient infini pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; or, il est certain que $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ ne devient pas infinie. Nous sommes ainsi conduit à retoucher le dernier crochet en l'écrivant $[1 - e^{-\tau}]$; de sorte qu'il vient pour $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ [1]:

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{J}(\tau, \theta) = a_1 + a_2\tau - a_2 \cos\theta - a_3\tau \operatorname{Log}(-\tau) + \\ + a_3 \cos\theta \,.\, \operatorname{Log}(-\tau) \,.\, \left[1 - e^{-\tau}\right] . \end{array}\right\} \quad (105)$$

Il est maintenant facile de voir que la constante a_3 doit être négative; en effet, la dérivée B′ (τ) soit devenir infinie négative pour $\tau = 0$; on a par (98):

$$B'(\tau) = a_2 - a_3\left[1 + \operatorname{Log}(-\tau)\right] ; \quad (106)$$

pour que $B'(0) = -\infty$, il faut évidemment que $a_3 < 0$. Quant à la valeur absolue de a_3, on en reparlera au nº 13.

Si enfin on porte à son tour l'expression (105) dans l'intégrale (97), on voit immédiatement que les termes présentant cos θ en facteur dans $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ ne donnent rien dans l'intégrale; de sorte qu'on retrouve l'expression (98) de B (τ):

$$B(\tau) = a_3 + a_2\tau - a_3\tau \operatorname{Log}(-\tau) ,$$

comme il le faut.

[1] Le fait qu'on a dû modifier l'expression de $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ de façon à faire disparaître le facteur sec θ dans l'exponentielle montre que la solution de l'équation de transfert appelle une retouche. Il semble dès lors que le coefficient k d'absorption doive être traité, non comme une quantité indépendante de θ, mais comme une fonction de θ.

13. — *Conditions vérifiées.*

1° *Valeur de* B (τ) *pour* $\tau = 0$. — La formule (98) donne immédiatement:

$$B(0) = a_1 ; \qquad (107)$$

rappelons que $B(0) = \frac{\sigma}{\pi} T_0^4$; de sorte que a_1 et a_2 varient avec T_0; nous savons en effet que:

$$a_1 = \frac{7}{16}\mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad a_2 = -\frac{27}{32}\mathcal{F} ,$$

où l'on a $F = \pi\mathcal{F} = \sigma T_e^4$ = flux de surface, et

$$F = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{I}(0 , \theta) . \cos\theta . \sin\theta . d\theta ; \qquad (108)$$

on a aussi:

$$B(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{I}(0 , \theta) \sin\theta . d\theta ; \qquad (109)$$

ce sont ces deux dernières égalités qui permettent de procéder par approximations successives pour calculer [1] a_1 et a_2.

2° *Valeur de* B' (τ) *pour* $\tau = 0$. — La formule (106), où l'on a fait $a_3 < 0$, donne: $B'(0) = -\infty$.

3° *Raccord entre la pellicule superficielle et l'intérieur.* — Rappelons qu'au n° 12 nous avons posé la relation (99):

$$- a_3 \tau \operatorname{Log}(-\tau) = C ;$$

C est donc, dans la pellicule superficielle, une fonction de τ, alors qu'elle représente une constante dès que $-\tau > 15$. Il doit donc y avoir raccord des valeurs de C sur la sphère pour laquelle $-\tau = 15$. D'où la condition de raccord suivante:

$$C_{15} = a_3 . 15 \operatorname{Log} 15 = 40{,}62\, a_3 . \qquad (110)$$

[1] G. Tiercy, *L'équilibre...*, loc. cit., p. 384-385.

On trouve ainsi que la constante $C = C_{15}$ valable à l'intérieur est négative, comme on l'a annoncé au nº 8.

On voit que si l'on choisit a_3 petit en valeur absolue, la constante C pour l'intérieur $(-\tau > 15)$ sera petite et viendra à peine diminuer la valeur de a_1 dans la formule

$$B(\tau) = (a_1 + C) + a_2\tau \ , \tag{111}$$

valable à l'intérieur de la sphère $-\tau = 15$.

A partir de $-\tau = 15$, et dans toute la pellicule superficielle, la quantité C, partant de la valeur (110), varie avec τ suivant la formule (99).

4º *Expression correspondante de* $\mathcal{J}(\tau, \theta)$. — C'est l'expression (105) établie au nº 12, et dont nous avons dit qu'elle pouvait être obtenue par le moyen de la formule (40).

Nous avons déjà dit qu'en portant cette expression (105) de $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ dans l'intégrale (97), on retrouve la fonction $B(\tau)$ donnée par (98). Cela est nécessaire, puisque l'égalité (97) n'est pas autre chose que l'équation de l'équilibre radiatif pour $\varepsilon = 0$.

Mais alors, il importe de rappeler qu'on a dû retoucher l'expression $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ donnée par (104), et qui est la solution de l'équation de transfert d'énergie; on est ainsi amené à se demander si la solution de cette équation de transfert a bien la forme convenable, comme on l'a déjà remarqué à la fin du nº 12 (note).

5º *Equation de l'équilibre radiatif strict* $\varepsilon = 0$. — Il s'agit de l'égalité (97):

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathcal{J}(\tau, \theta) \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta \,.$$

Cette égalité est vérifiée par l'expression (105), comme on vient de la rappeler au chiffre 4 ci-dessus.

Remarque. — Il vient par (98), pour $\tau = 0$:

$$B(0) = a_1 \ ;$$

d'ailleurs, on a aussi:

$$B(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{I}(0, \theta) \,.\, \sin \theta \,.\, d\theta = a_1 \,,$$

car $\mathcal{I}(0, \theta)$ est donnée par (44) et (94):

$$\mathcal{I}(0, \theta) = \frac{7}{16} \mathcal{F} + \frac{27}{32} \mathcal{F} \,.\, \cos \theta = a_1 - a_2 \cos \theta \,.$$

Résumé.

La distribution des températures à l'intérieur d'une étoile dépend de la valeur attribuée à l'intensité B du rayonnement noir. Cette intensité est fonction de l'opacité τ, celle-ci étant définie par la relation:

$$d\tau = k\rho\, dr \,,$$

où k est le coefficient d'absorption et ρ la densité de la matière. Il s'agit donc de trouver la forme convenable de la fonction $B(\tau)$.

Une forme souvent considérée est la fonction linéaire:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau \;;$$

on y arrive en combinant une solution approchée de l'équation de transfert d'énergie et une solution approchée de l'équation de l'équilibre radiatif, dans le cas des couches planes.

Mais cette solution de $B(\tau)$ ne peut convenir qu'à deux conditions: d'une part, il faut pouvoir négliger la courbure des couches; d'autre part, il faut laisser de côté la pellicule superficielle, car $B(\tau)$ présente une singularité pour $\tau = 0$.

La présente étude envisage une solution plus générale. On peut diviser la masse en trois parties concentriques:

a) La partie centrale, comprenant une sphère de rayon $r' = 0{,}725\, r_0$; la valeur τ' correspondant au niveau de la sphère r' est de l'ordre de $2 \,.\, 10^9$. Dans cette partie centrale, le coefficient ε de libération d'énergie n'est pas nul; et la recherche de la forme de $B(\tau)$ y est malaisée. C'est d'ailleurs la région dans laquelle la solution polytropique est applicable;

b) La couche s'étendant de $\tau = \tau'$ à $-\tau = 15$; le coefficient ε y est nul (équilibre radiatif strict); la formule (48) y est valable:

$$B(\tau) = (a_1 + C) + a_2 \tau ,$$

où C est une constante négative très petite à côté de a_1;

c) La pellicule de surface, allant de $-\tau = 15$ à $\tau = 0$; le coefficient ε est encore nul. La formule (98) donne alors la solution:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau - a_3\tau \log(-\tau) ;$$

elle revient à poser, dans la formule précédente:

$$C = - a_3\tau \log(-\tau) ;$$

c'est l'égalité (99), qui, dans cette couche superficielle, remplace la constante C de l'intérieur par une fonction de τ.

On vérifie ainsi les conditions suivantes:

1° Pour $\tau = 0$, on a $B(0) = a_1$;

2° Pour $\tau = 0$, on a $B'(0) = -\infty$;

3° Il y a raccord pour $-\tau = 15$, entre les deux expressions de $B(\tau)$; il suffit de choisir, pour la constante C de l'intérieur, la valeur:

$$C = C_{15} = 15\, a_3 \log 15 .$$

Quant à a_3, c'est une constante négative, d'ailleurs très petite en face de a_1;

4° L'équation de l'équilibre radiatif strict $\varepsilon = 0$ est vérifiée jusqu'au bord de l'étoile:

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathcal{J}(\tau, \theta) \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta \,.$$

On constate donc, en fin de compte, que, pour satisfaire aux conditions de la périphérie, la fonction $B(\tau)$ doit présenter un terme logarithmique complémentaire.

Enfin, il convient de relever que la fonction $\mathcal{J}(\tau, \theta)$, donnée comme solution de l'équation de transfert d'énergie, ne peut être utilisée par la suite, dans l'équation de l'équilibre radiatif, qu'en y apportant des retouches. Cela suggère l'idée que la résolution habituelle de l'équation de transfert n'est peut-être pas sans défaut.