Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 20 (1938)

Artikel: La théorie de la relativité dite générale et les observations astronomiques

Autor: Tiercy, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742940

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ DITE GÉNÉRALE ET LES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

PAR

Georges TIERCY

§ 1. — L'ÉQUATION DE L'ORBITE D'UNE PLANÈTE ET LA RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE.

1. — Les faiblesses et les contradictions de la théorie einsteinienne de la Relativité ont été signalées à plusieurs reprises [1]. Nous y reviendrons par la suite. Dès l'apparition des formules de la théorie de la Relativité dite générale, on a prétendu que l'Astronomie apportait, en faveur de ces formules et de cette théorie, des preuves irréfutables et décisives; on

[1] J. Le Roux, *Relativité restreinte et géométrie des systèmes ondulatoires*. Paris, 1922.

H. Varcollier, *La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques*. Paris, 1925.

G. Joly, *Les erreurs philosophiques de M. Einstein*. Paris, 1925.

E. A. Milne, *Relativity, Gravitation and World-Structure*. Oxford, 1935. Clarendon Press.

— On the foundations of dynamics. (*Proc. of the Royal Society of London*, 1936.)

— The inverse square law of gravitation. (*Ibid.*, 1936-1937.)

— Kinematics, dynamics and the scale of time. (*Ibid.*, 1937.)

P. Dive, Difficultés dans l'interprétation einsteinienne du Temps et de l'Espace relatifs. (*Actes de la Soc. helvétique des Sc. naturelles*, Soleure, 1936, et *Enseignement mathém.*, 1937.)

— Sur la géométrie d'un champ gravifique d'Einstein-Schwarz-

lui a fait dire ce qu'en réalité elle ne dit pas. Il semble donc utile de faire le point à ce sujet [1].

Je voudrais tout d'abord reprendre le sujet d'un article qui a paru récemment [2], et qui traite de l'emploi des unités de temps astronomique et relativiste; cet article met en jeu un certain coefficient λ et quelques formules de passage, sur lesquels il convient d'apporter un complément d'information et une rectification.

Nous aborderons le calcul en partant du ds^2 de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta \cdot d\varphi^2) ,$$

où les angles sont définis comme fractions d'un tour entier, et non comme des rapports entre une longueur propre d'arc et la longueur du rayon [3].

schild. (*Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Clermont-Ferrand*, 1937.)

— La géométrie du disque tournant dans la métrique d'Einstein. (*C. R. des séances de la Soc. de Physique et d'Hist. natur. de Genève*, 1937, I.)

— *Les temps propres relatifs de la théorie d'Einstein.* Clermont-Ferrand, 1937.

— *Le principe de Relativité selon Poincaré et la Mécanique invariante de Le Roux.* Paris, 1937, Dunod.

E. Esclangon, *La notion de Temps.* Paris, 1938, Gauthier-Villars.

Etc.

[1] Comme le présent travail tend à montrer que les observations astronomiques, contrairement à ce qu'on a si souvent avancé, n'apportent pas la preuve décisive espérée en faveur de la théorie de la Relativité dite générale, je tiens à dire ici combien j'admire le bel effort d'Einstein. Et ce n'est pas diminuer le mérite de celui-ci que de rappeler les exigences insatisfaites de la Mécanique céleste et de l'Astronomie physique.

[2] G. Tiercy, Sur l'emploi des unités de temps astronomique et relativiste. (*Annales françaises de Chronométrie*, 1937.)

[3] C'est là, en effet, la définition considérée dans les ouvrages sur la théorie de la Relativité. M. A.-S. Eddington nous écrivait à ce sujet les lignes suivantes, dans une critique de notre article cité: « Il est possible de définir un angle, soit comme rapport d'une longueur propre d'arc à la longueur du rayon, soit comme une fraction de la circonférence entière. Mais la dernière définition est toujours

Remarquons d'ailleurs qu'en chaque point P de l'espace représenté par le ds^2 de Schwarzschild, la *variable r* désigne le quotient par 2π de la longueur effectivement mesurée [1] des circonférences de centre O passant par P. Cette variable r a donc la même valeur que le rayon vecteur du système habituel des coordonnées polaires de l'espace; dans les applications à la Mécanique céleste, les propriétés de la variable r et celles du rayon vecteur ordinaire sont les mêmes; et l'on peut traiter r comme le rayon vecteur classique. (Voir la fin du n° 2 suivant.)

2. — Considérons les équations, newtonienne et relativiste, de l'orbite:

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + u = \frac{M_0}{h_0^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2} + \frac{3M}{c^2}u^2 ,$$

où M_0 est la masse gravitationnelle et h_0 la constante des aires. En mécanique céleste, ces deux constantes s'expriment au moyen de l'unité de temps (jour solaire moyen) et de l'unité de longueur (demi-grand axe de l'orbite terrestre). Quant à l'unité de masse, on la définit par la relation suivante, caractérisant un mouvement circulaire uniforme autour d'un centre attractif:

$$\mu = \varphi^2 \cdot r ,$$

où μ représente pratiquement la masse centrale.

Ainsi, en Mécanique céleste, si l'on désigne par L une longueur transversale et par L′ une longueur radiale, la masse est homogène à l'expression symbolique $L^2L'T^{-2}$, alors que h_0 a les dimensions de $LL'T^{-1}$.

prise en considération dans les livres de Relativité; et, dans l'équation relativiste de l'orbite:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2} + \frac{3Mu^2}{c^2} ,$$

φ suit la seconde définition ».

[1] J. Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste.* Paris, 1930; II, p. 24.

P. Dive, Espace non euclidien, Temps relatif. (*Bull. de l'Académie des Sc., Belles-Lettres et Arts de Clermont-Ferrand*, 1938, p. 65.)

Il est dès lors bien évident que, si l'on change les unités de longueur et de temps, les valeurs des constantes M_0 et h_0 changeront. Au moyen des formules donnant les dimensions de M_0 et h_0, on pourra facilement passer du système usuel à tout autre système d'unités qu'on voudra. D'ailleurs, lorsque les deux systèmes d'unités envisagés diffèrent peu l'un de l'autre, les formules de passage prennent une forme très simple; entre l'unité de temps cosmique S et l'unité de temps propre S′ du mobile, on a la relation:

$$S' = S(1 + \lambda) ,$$

où λ est une petite quantité qu'il est facile de calculer.

Relevons ici qu'en pratique, dans le calcul courant de l'orbite relativiste d'une planète, tel qu'il est exposé dans les traités de Relativité, le temps astronomique universel est identifié au temps dit cosmique; on n'énonce pas la chose expressément; mais cette identification est obligatoire, si l'on veut que l'application de la théorie einsteinienne à l'orbite de Mercure donne une avance séculaire de 43″ pour le périhélie. C'est ce que remarque très pertinemment P. Dive dans les termes suivants: [1]

« En fait, dans la théorie des avances séculaires des périhélies des planètes, le temps cosmique doit être identifié au temps astronomique universel; c'est à cette condition que les calculs d'Einstein peuvent concorder avec l'observation. »

Il est entendu que ces deux temps sont des temps absolus. Mais a-t-on vraiment le droit de les identifier sans autre précaution ? La chose n'est pas certaine.

Le temps cosmique t est le temps indiqué par une horloge immobile à l'infini. Pour être rigoureux, il faudrait évidemment utiliser un ds^2 qui tienne compte de *toutes* les masses du système solaire [2]. Mais, précisément, la théorie d'Einstein n'y parvient

[1] P. Dive, Espace non euclidien, Temps relatif. (*Bull. de l'Acad. des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Clermont-Ferrand*, 1938, t. LVII, p. 71).

[2] Comme ceux de J. Le Roux.

pas. Ce temps cosmique t, défini à l'infini par un ds^2 complet, devrait en principe fournir par le calcul le mouvement des astres; il devrait donc être dans un rapport défini avec le temps astronomique. Quel est ce rapport ? Est-ce l'unité ? Rien ne l'indique.

Remarquons d'ailleurs que nous n'avons pas de ds^2 complet, et l'on doit prendre pour les planètes des ds^2 indépendants; c'est le cas, par exemple, pour la Terre et Mercure; on est alors amené à *admettre* que, dans ces deux ds^2, les temps cosmiques t sont identiques. Mais, encore une fois, on ignore le rapport qu'il y a entre ce temps cosmique et le temps astronomique.

Comment donc se tirer d'affaire ? Les ouvrages relativistes sous-entendent qu'il y a identité entre les deux, alors que rien n'impose cette classification [1].

Il est facile de voir que notre temps propre de telluriens pourrait aussi servir à définir un temps cosmique. Rappelons qu'un temps quelconque peut être considéré comme cosmique, pourvu qu'il soit transmis sans altération par les ondes à tout point du champ; c'est le cas du temps du ds^2 de Schwarzschild:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \cos^2\theta \cdot d\varphi^2) \ . \qquad (1)$$

Si l'on désigne la mesure d'un temps propre par $d\tau$, l'intervalle de temps propre séparé par les instants t et $(t + dt)$ du temps cosmique a pour mesure l'expression suivante, en un point fixe de l'espace, de coordonnées θ, φ, r:

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) dt^2 \ ,$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{c^2 r}}\, dt = \left(1 - \frac{M}{c^2 r}\right) dt \ , \qquad (2)$$

$$d\tau = (1 - \lambda)\, dt \ , \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{M}{c^2 r} \ ;$$

la marche d'une horloge *immobile* dans un champ de gravitation semble ralentie. C'est là une formule générale; on peut d'ailleurs y remplacer M par M_0, en négligeant les termes en λ^2.

[1] Sinon le désir involontaire d'arriver aux 43″ de Mercure.

Pour la Terre, le rayon r, ou plutôt la variable r de l'orbite, varie relativement peu; et l'on peut considérer la quantité λ, d'ailleurs très petite, comme pratiquement constante; de sorte que le temps propre terrestre τ_T est pratiquement proportionnel au temps absolu, cosmique ou astronomique. Alors, lorsqu'on veut confronter les calculs de la théorie de la Relativité avec les résultats de l'observation, quel est le temps qu'il convient d'identifier avec le temps astronomique universel observé ? Sera-ce dt ou $d\tau_T$? Suivant le cas, le facteur $(1 - \lambda)$ tellurien interviendra ou n'interviendra pas.

Nous reviendrons sur ce point au n° 7. Pour l'instant, *supposons* que nous avons directement affaire au temps cosmique t.

D'autre part, avec $dt = d\theta = d\varphi = 0$, on tire du ds^2 l'égalité suivante:

$$dl^2 = -ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} ;$$

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{c^2 r}}} = \frac{dr}{1 - \frac{M}{c^2 r}} = \frac{dr}{1 - \lambda} = dr\,(1 + \lambda) ; \tag{3}$$

la distance radiale dl est mesurée par un nombre plus grand que dr; d'où une apparence analogue à la contraction de Lorentz. La quadrature donnant l est:

$$l = l_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{c^2 r}}} ;$$

et l'on voit immédiatement que les variables r et l resteront partout très peu différentes; on a, en effet, en réduisant à ses deux premiers termes le développement du radical:

$$l = (l_0 - r_0) + r\left[1 + \frac{M}{c^2 r} \cdot \log \frac{r}{r_0}\right] = (l_0 - r_0) + r\left[1 + \lambda \log \frac{r}{r_0}\right] ;$$

si, en un point, les valeurs r_0 et l_0 sont très peu différentes, toutes les différences $(l - r)$ sont excessivement petites, à cause de la petitesse du terme logarithmique.

« Ces différences sont excessivement faibles, non seulement par rapport aux valeurs connues du rayon du Soleil ou de la distance du Soleil à la Terre, mais même par rapport aux incertitudes existant, dans la conception ordinaire de l'espace, sur la valeur commune des deux variables [1]. »

Ainsi, quand on passe des données cosmiques aux mesures propres du point P, une durée Δt est représentée par un nombre $\Delta\tau$ plus petit que Δt, tandis que la distance radiale l peut être numériquement identifiée à la variable r. Il est alors facile de voir l'influence de ce passage sur la valeur du coefficient $\frac{M_0}{h_0^2}$ qui figure dans l'équation différentielle newtonienne de la trajectoire:

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + u = \frac{M_0}{h_0^2}, \qquad \left(u = \frac{1}{r}\right). \tag{4}$$

Le second membre de cette équation est, comme chacun des deux termes du premier membre homogène à $\frac{1}{r}$; en effet, M_0 a les dimensions de $L^2L'T^{-2}$, tandis que h_0 possède celles de $LL'T^{-1}$, où L' désigne une longueur radiale. Il vient ainsi:

$$\frac{M}{h^2} = \frac{M_0}{h_0^2}; \tag{5}$$

on a aussi, après le passage, et pour une horloge *immobile* dans le champ:

$$\begin{cases} M = M_0 (1 + \lambda)^2 \sim M_0 (1 + 2\lambda), \\ h = h_0 (1 + \lambda). \end{cases} \tag{6}$$

Nous reviendrons au n° 10 sur ces relations (6).

3. — Portons notre attention sur la quantité λ:

$$\lambda = \frac{M_0}{c^2 r}. \tag{7}$$

La quantité $\frac{M_0}{c^2}$ vaut à très peu près 1,5 km; si r est la distance d'une planète au Soleil [2], λ est inférieur à $\frac{1}{3 \cdot 10^7}$; c'est

[1] J. Chazy, *loc. cit.*, II, p. 28.

[2] Au moins $(4{,}6) \cdot 10^{12}$ cm; en effet, pour Mercure, la distance moyenne est de $(5{,}8) \cdot 10^{12}$ cm, et l'excentricité vaut 0,2.

donc une très petite valeur, en regard de l'unité. On peut, sans erreur appréciable, remplacer r au dénominateur par a ou par p, dans le cas d'une orbite planétaire [1].

L'égalité qui correspond à l'intégrale des aires s'écrit, comme on sait, dans le plan $\theta = 0$:

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{c}, \qquad \text{où} \qquad h = h_0 (1 + \lambda), \tag{8}$$

ou bien:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h, \tag{9}$$

ou encore:

$$\frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{c^2 - \frac{2M}{r} - \frac{r'^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} - r^2 \varphi'^2}} = \frac{h}{c}; \tag{10}$$

une autre intégrale première des équations différentielles du mouvemant dans son plan est la suivante [2]:

$$\frac{c^2 - \frac{2M}{r}}{\sqrt{c^2 - \frac{2M}{r} - \frac{r'^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} - r^2 \varphi'^2}} = A, \tag{11}$$

où A est une seconde constante arbitraire, inférieure à c. En divisant l'une par l'autre ces deux intégrales premières, on trouve l'égalité des aires sous cette autre forme:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ch}{A}\left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) = \frac{ch}{A}\left(1 - \frac{2M_0}{c^2 r}\right). \tag{12}$$

Le calcul de la durée de *révolution anomalistique* conduit à la connaissance de la constante $\frac{c}{A}$; J. Chazy donne l'expression que voici [3]:

$$\frac{A}{h} = \frac{c}{\sqrt{M_0 a (1 - e^2)}} \left[1 - \frac{2M_0}{c^2 a (1 - e^2)}\right]. \tag{13}$$

[1] Lorsqu'on tient compte du fait que l'horloge est entraînée dans le champ sur une orbite presque circulaire, on est amené à considérer une valeur de λ égale à: $\lambda_1 = \frac{3M}{2ac^2}$. (Voir nos 7 et 8.)

[2] J. Chazy, *loc. cit.*, I, p. 67, équation 8.

[3] J. Chazy, *loc. cit.*, I, p. 82.

Mais cette expression peut s'écrire plus simplement; le crochet devient $\left[1 - \frac{2M_0}{c^2 p}\right]$; il diffère extrêmement peu de l'unité, comme on a vu; et ,avec une approximation du même ordre, on peut en écrire le second terme :

$$\frac{2M_0}{c^2 r} \quad \text{ou} \quad \frac{2M_0}{c^2 a}, \text{ c'est-à-dire } 2\lambda \ ;$$

de sorte que la constante A est donnée par l'égalité:

$$\frac{A}{c} = \frac{h}{\sqrt{M_0 a (1 - e^2)}} (1 - 2\lambda) = \frac{h}{\sqrt{M_0 p}} (1 - 2\lambda) \ ;$$

et comme $h_0^2 = M_0 p$, il vient finalement:

$$\frac{A}{c} = \frac{h}{h_0} (1 - 2\lambda) = (1 + \lambda)(1 - 2\lambda) \sim (1 - \lambda) \ ;$$

$$\frac{c}{A} = \frac{1}{1 - \lambda} = 1 + \lambda \ ;$$

on constate en passant que $A < c$.

Ainsi, l'intégrale dite des aires devient bien l'égalité (9):

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h (1 + \lambda)(1 - 2\lambda) = h (1 - \lambda) = h_0$$

$$\text{ou} \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h \ .$$

Dans le mouvement newtonien, on avait:

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = h_0 \ . \tag{14}$$

Comme la variable r est identique dans les deux cas, on voit par là qu'un angle donné est mesuré par deux nombres égaux $\varphi = \omega$; c'est-à-dire que l'unité de mesure des angles est la même; c'est le « tour ».

Par contre, le calcul, à partir du ds^2 de Schwarzschild, de la *révolution anomalistique* donne pour celle-ci l'angle Φ exprimé en « tours » [1]:

$$\Phi = 2\pi \left[1 + \frac{3M}{c^2 a (1 - e^2)}\right] = 2\pi (1 + 3\lambda) \ ; \tag{15}$$

[1] J. Chazy, *loc. cit.*, I, p. 74-76.

d'où l'avance du périhélie de 43″ par siècle pour Mercure. Nous reprendrons cette question plus loin.

4. — Ainsi, on passe de l'équation newtonienne des aires

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = h_0$$

à l'intégrale correspondante de la théorie relativiste

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h$$

par les substitutions suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= \omega \ , \\ h &= h_0 (1 + \lambda) \ , \\ \mathrm{M} &= \mathrm{M}_0 (1 + 2\lambda) \ , \\ \tau &= t (1 - \lambda) \ ; \end{aligned} \right.$$

on néglige les termes de l'ordre de λ^2.

Les mêmes substitutions ne permettent pas de passer de l'équation différentielle newtonienne de la trajectoire

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + u = \frac{\mathrm{M}_0}{h_0^2} \tag{16}$$

à l'équation relativiste:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mathrm{M}}{h^2} + \frac{3\mathrm{M}}{c^2} u^2 \ ; \tag{17}$$

cela provient du fait suivant: dans l'équation du mouvement newtonien, l'angle ω est mesuré en fraction de tour sidéral, celui-ci étant justement la période de la fonction u; tandis que, dans l'équation relativiste, l'angle φ, qui est encore mesuré en fraction de la révolution sidérale, n'est pas exprimé en fraction de la période de u.

Cette dernière période est la *révolution anomalistique* $\Phi \neq 2\pi$; tandis que, dans le cas newtonien, la révolution anomalistique se confond avec la révolution sidérale. Si donc on veut se placer dans les mêmes conditions angulaires que celles du cas newto-

nien, il faut exprimer l'angle φ en prenant comme unité, non plus le tour sidéral, mais le tour *anomalistique* $\Phi = 2\pi(1 + 3\lambda)$.

Alors, à chaque angle ω du cas newtonien correspond un angle $\varphi_1 = F(\varphi)$, qui vaut presque la même fraction de la révolution anomalistique relativiste qu'est l'angle ω de la révolution sidérale; l'angle φ_1 augmente donc de 2π en même temps que l'angle ω, la quantité 2π désignant une révolution complète. L'ancien angle relativiste φ est alors mesuré par un nombre φ_1 (presque égal à ω) plus petit que le nombre φ.

On ne peut cependant pas écrire simplement:

$$\varphi_1 = \varphi(1 - 3\lambda) \quad \text{ou} \quad \varphi = \varphi_1(1 + 3\lambda) \ ,$$

en ne prenant en considération que l'égalité relative à la révolution totale anomalistique:

$$\Phi = 2\pi(1 + 3\lambda) \ ;$$

et l'on doit écrire une relation de la forme:

$$\varphi = \varphi_1[1 + 3\lambda + f(\varphi_1)] \ . \tag{18}$$

En effet, l'équation de la trajectoire, après élimination de la différentielle dt entre les deux intégrales premières citées plus haut, se met sous la forme:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2M}{c^2} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{2M}{h^2 r} + \frac{A^2 - c^2}{h^2} = P(u) \ ; \tag{19}$$

et il vient:

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} + \text{const.}$$

On sait que le polynôme $P(u)$ possède deux racines simples $u = \alpha$ et $u = \beta$, où l'on supposera $\alpha < \beta$. La variable u est comprise entre α et β. La troisième racine γ est positive et beaucoup plus grande que les deux premières; elle vaut:

$$\gamma = \frac{c^2}{2M} - \alpha - \beta \ .$$

On peut donc écrire que:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2M}{c^2}(u - \alpha)(\beta - u)(\gamma - u) \ ,$$

et:

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2M}{c^2}(u-\alpha)(\beta-u)(\gamma-u)}} + \text{const.} \qquad (20)$$

Si l'on désigne la distance aphélie et la distance périhélie respectivement par:

$$\frac{1}{\alpha} = a(1+e) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\beta} = a(1-e) ,$$

on obtient:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{a(1+e)} , & \beta = \dfrac{1}{a(1-e)} , \\ \gamma = \dfrac{c^2}{2M} - \dfrac{2}{a(1-e^2)} . \end{cases}$$

Faisons maintenant le changement de variable suivant:

$$u = \frac{1 + e\cos\varphi_1}{a(1-e^2)} , \qquad (21)$$

tel que u passe de β à α lorsque l'angle φ_1 varie de 0 à π. On trouve:

$$\varphi = \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\frac{2M}{c^2}\left[\gamma - \frac{1+e\cos\varphi_1}{a(1-e^2)}\right]}} + \text{const} ,$$

ou bien:

$$\varphi = \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{6M}{c^2 a(1-e^2)} - \frac{2Me\cos\varphi_1}{c^2 a(1-e^2)}}} + \text{const} ,$$

$$\varphi = \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - 6\lambda - 2\lambda e\cos\varphi_1}} + \text{const} \cdot \qquad (22)$$

On peut alors développer la fonction suivant les puissances de λ et intégrer terme à terme par rapport à φ_1. On trouve, si les zéros des arguments φ et φ_1 se correspondent, la relation suivante, du type (18):

$$\varphi = \int d\varphi_1 [1 + 3\lambda + \lambda e\cos\varphi_1] = \varphi_1(1+3\lambda) + \lambda e\sin\varphi_1 , \qquad (23)$$

ou:

$$\varphi_1 = \varphi\,(1 - 3\lambda) - \lambda e\,(1 - 3\lambda)\sin\varphi_1 \;;$$

en abandonnant les termes de l'ordre de λ^2, il reste:

$$\varphi_1 = \varphi\,(1 - 3\lambda) - \lambda e \sin\varphi \;. \tag{24}$$

La trajectoire est donc donnée par la forme newtonienne

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi_1}{p} \;, \tag{25}$$

où φ_1 a la valeur (24) indiquée ci-dessus.

On peut d'ailleurs écrire:

$$\cos\varphi_1 = \cos\left[\varphi\,(1 - 3\lambda)\right] + \sin\left[\varphi\,(1 - 3\lambda)\right]\cdot\lambda e \sin\varphi \;,$$

ou, avec l'approximation indiquée, et en posant

$$\psi = \varphi\,(1 - 3\lambda) \;: \tag{26}$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\psi + \lambda e \sin^2\psi \;; \tag{27}$$

de sorte que l'équation de la trajectoire s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1 + e\cos\psi}{p} + \dfrac{\lambda e^2 \sin^2\psi}{p} \\ \text{où} \qquad \psi = \varphi\,(1 - 3\lambda) \;. \end{array}\right. \tag{28}$$

C'est l'équation indiquée par Trousset [1].

Mais remarquons que la période anomalistique relativiste Φ vaut simplement:

$$\Phi = 2\pi\,(1 + 3\lambda) \;,$$

car, dans l'intégrale (23) prise de 0 à π, le terme en λe tombe.

Ainsi, lorsqu'on prend soin d'exprimer l'argument φ en fraction de révolution *anomalistique*, comme dans le cas du mouvement newtonien pour ω, l'équation relativiste de la trajectoire prend la *forme newtonienne*. Mais, à cause de la relation (24), on trouve cependant bien une avance du périhélie. Et, pour Mercure, on sait que cette avance, calculée ainsi qu'il

[1] TROUSSET, *Comptes rendus*, 1922, p. 1160.

vient d'être dit, est de 43″ par siècle, comme le résidu généralement admis et qu'il s'agit d'expliquer.

Mais rappelons que nous avons *supposé*, au n° 2, avoir affaire directement au temps cosmique t. Or, le tout est de savoir comment faire intervenir les « siècles » dans la vie de Mercure. Nous l'avons dit plus haut: les temps propres devraient être liés entre eux et au temps cosmique par un ds^2 général; celui-ci n'existe pas, la théorie d'Einstein ne parvenant pas à tenir compte de toutes les masses du système solaire. Nous reprendrons ce point au n° 7.

§ 2. — Remarques sur la théorie einsteinienne de la Relativité et sur d'autres théories générales.

5. — Il faut rappeler tout d'abord qu'en chaque point A de l'espace correspondant au ds^2 de Schwarzschild, la variable r désigne le quotient par 2π de la longueur des circonférences de centre O et passant par A [1].

C'est-à-dire qu'on a, comme dans l'espace ordinaire:

$$\frac{C}{2\pi} = r \; ;$$

« dans les applications à la Mécanique céleste, il n'y a pratiquement aucune différence entre les propriétés de la variable r et les propriétés du rayon vecteur classique, et nous raisonnerons comme s'il y avait identité [2]. »

Et si l'on se rappelle que le temps cosmique t qui figure dans le ds^2 est un temps absolu, conforme à la notion classique, on constate qu'on est bien près de la conception ordinaire de l'espace et du temps.

On ne s'en étonnera pas, si l'on veut bien considérer que le ds^2 de Schwarzschild et toutes les formules relativistes qui en découlent peuvent être obtenues par le moyen d'autres théories

[1] J. Chazy, *loc. cit.*, II, p. 24.
[2] J. Chazy, *loc. cit.*, I, p. 62.

générales, par exemple d'une théorie générale de l'aberration des ondes et des forces, dans le temps et l'espace ordinaires [1].

Maillard disait aussi: « Il existe une aberration gravifique, égale à l'aberration de la lumière » [2].

En relativité restreinte, « l'aberration créée par le mouvement d'un récepteur quelconque est représentée par une transformation de Lorentz, absolument comme lorsqu'il s'agit du mouvement d'une source: d'où disparition des antinomies. Et pour le récepteur aussi bien que pour la source, la transformation de Lorentz est une simple forme mathématique, parmi d'autres possibles, de la correspondance physique, dans l'Espace et le Temps classiques, entre un organe matériel mobile et un milieu fixe » [3].

En relativité généralisée, « le caractère curviligne de l'Espace-Temps dans les calculs d'Einstein traduit en réalité une anisotropie de propagation, provenant de l'état particulier du milieu en présence de masses graves ou accélérées ».

« L'hypothèse de la courbure de l'Espace-Temps [4] peut être aisément remplacée, en ce qui concerne son influence sur la loi de gravitation, par l'hypothèse de l'influence de la transmission par le milieu, c'est-à-dire celle de l'aberration des forces appliquées aux masses en mouvement [5]. »

N'est-ce pas le lieu de rappeler cette conclusion de Maillard: « Ce n'est point diminuer le relativisme, c'est au contraire en souligner l'intérêt, que d'énoncer cet axiome: De par la nature même de nos moyens de contrôle, tous les faits nouveaux découverts grâce à la Relativité sont et seront interprétables dans l'espace euclidien et le temps terrestre ».

[1] H. VARCOLLIER, *La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques.* Paris, 1925.

P. DIVE, *Le principe de Relativité selon Poincaré, et la Mécanique invariante de Le Roux.* Paris, 1937.

— Espace non-euclidien, Temps relatif (*Bull. Ac. de Clermont-Ferrand*, loc. cit., t. LVIII, 1938, p. 100).

[2] L. MAILLARD, *Cosmogonie et gravitation.* Lausanne, 1922.

[3] H. VARCOLLIER, *loc. cit.*, p. XIV.

[4] La théorie générale de Milne, dont il sera question au n° 6, supprime aussi toute allusion à une courbure de l'Espace-Temps.

[5] H. VARCOLLIER, *loc. cit.*, p. 269.

Une théorie générale de l'aberration permet en particulier d'atteindre ce but.

En relativité restreinte, par exemple, le principe d'Einstein paraît inutile, de même que sont inutiles les règles idéales et les chronomètres idéaux qui sont introduits dans les raisonnements einsteiniens.

D'ailleurs, les faits expérimentaux auxquels on applique le principe de relativité restreinte d'Einstein peuvent s'expliquer d'une manière beaucoup plus simple par une étude analytique de l'équation de la propagation des ondes dans un milieu isotrope; cela mène, d'autre part, à la solution du problème de l'aberration dans le cas le plus général [1].

Et l'on voit bien que, si la transformation de Lorentz se présente dans l'étude des interférences de n'importe quel système ondulatoire, les conclusions que la théorie de la Relativité restreinte en a tirées dans le cas particulier de la lumière ne sont pas toutes fondées.

Relevons ici une observation justifiée de Varcollier; c'est que les récepteurs physiques inclus dans un milieu transmetteur sont, eux aussi, des milieux, et qu'il faut les traiter comme tels. « Uniquement capables d'enregistrer à tout instant l'état du milieu transmetteur à l'endroit où ils se trouvent, ils réagissent sous cette influence comme le ferait un milieu quelconque. Et cela seul suffit à faire sentir pourquoi la formule d'aberration de Bradley, qui exprime un entraînement d'ensemble, rigide jusqu'à l'infini, est certainement inexacte; un tel entraînement des ondes, sans apparition d'une propagation, est physiquement impossible dans un milieu. » Il a donc fallu concevoir une théorie plus convenable et plus générale de l'aberration. Ce fut le mérite de M. H. Varcollier.

Si l'on adopte ce point de vue, on est conduit aux formules mêmes de la théorie de la Relativité dite générale; mais on reste dans l'espace et le temps classiques; et l'on n'a plus que faire de la métaphysique einsteinienne, qu'aucune expérience ou observation ne permet jusqu'ici d'imposer. Du même coup, on supprime

[1] J. Le Roux, *Relativité restreinte et Géométrie des systèmes ondulatoires*. Paris, 1922.

les difficultés engendrées par cette interprétation, difficultés que M. P. Dive a si clairement mises en évidence, soit dans les études qu'il a publiées sur ce sujet dès 1936 [1], soit dans son dernier ouvrage [2].

Mais il y a d'autres difficultés encore, que nous exposerons aux n°s 9 à 12, et qui font que les formules relativistes tirées du ds^2 de Schwarzschild ne sauraient donner satisfaction à l'astronome.

6. — On peut aussi arriver aux équations relativistes à partir de la théorie générale de E. A. Milne [3].

Cette nouvelle théorie, à laquelle plusieurs auteurs ont apporté des contributions [4], est complètement logique; elle met en jeu deux temps: un temps $\mathfrak{T}$ dit cinématique ou naturel, et un temps dynamique T, qui n'est autre chose que notre temps newtonien [5]; ces deux temps sont liés par l'équation:

$$T = \mathfrak{T}_0 \cdot \log \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_0} + \mathfrak{T}_0 ,$$

à laquelle on peut comparer celle proposée par W. de Sitter [6].

Suivant qu'on opère en temps $\mathfrak{T}$ ou en temps T, les lois du mouvement prennent la forme générale ou la forme newtonienne; et l'on conserve la notion habituelle de l'espace. Dans cette théorie, aucun appel n'est fait *a priori* à une loi empirique quelconque de gravitation; et il n'y est pas besoin de considérer

[1] P. Dive, *loc. cit.*

[2] P. Dive, *Les interprétations physiques de la théorie d'Einstein.* Préface de M. Ernest Esclangon, directeur de l'Observatoire de Paris. Dunod, Paris, 1938.

[3] E. A. Milne, *Relativity, Gravitation and World-Structure.* Oxford, 1935. Clarendon Press.

— On the foundations of dynamics (*Proc. of the Royal Soc.*, A, 1936).

— The inverse square law of gravitation (*Ibid.*, 1936-1937).

— Kinematics, dynamics and the scale of time (*Ibid.*, 1937).

[4] Voir, par exemple, les travaux de: Whitrow (1935-1936-1937); Nuut (1935); McVittie (1935); Lewis (1935); Narlikar (1935); A.-A. Robb (1936).

[5] Milne écrit t pour le premier et τ pour le second; pour éviter toute confusion, nous les désignons ici par $\mathfrak{T}$ et T.

[6] W. de Sitter, The astronomical aspect of the theory of Relativity (*University Calif. Publ. in Math.*, 1933).

une courbure locale de l'espace dans le voisinage d'une particule massive. La dynamique gravitationnelle de Milne se réduit à la mécanique classique lorsqu'on passe du temps cinématique $\mathfrak{T}$ au temps T, les descriptions en temps T étant essentiellement éphémères; c'est-à-dire que le temps T est le temps dynamique présent [1].

Milne constate que la Relativité dite générale est une combinaison de la méthode de signalisation par signaux lumineux (qui se fait dans le temps cinématique $\mathfrak{T}$) avec les généralisations d'Einstein des lois newtoniennes de la dynamique (qui emploient le temps T); comme on a:

$$\left(\frac{dT}{d\mathfrak{T}}\right)_{\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_0} = 1 ,$$

la mécanique relativiste est probablement plus ou moins apte à représenter les conditions actuelles; mais elle cesse de l'être lorsqu'il y a une différence appréciable entre T et $\mathfrak{T}$. De là, par exemple, son impuissance à représenter d'une façon satisfaisante le problème des spirales.

Notons que le ds^2 prend, dans la théorie de Milne, les formes suivantes:

1° pour l'observateur utilisant le temps $\mathfrak{T}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathfrak{T}^2 - \frac{1}{c^2}\, de^2 , \\ ds^2 &= d\mathfrak{T}^2 - \frac{1}{c^2}\left[dl^2 + l^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\right] ; \end{aligned} \tag{29}$$

2° pour l'observateur utilisant le temps T:

$$ds^2 = e^{\frac{2(T-\mathfrak{T}_0)}{\mathfrak{T}_0}} \cdot \left[dT^2 - \frac{1}{c^2}\, d\varepsilon^2\right] , \quad \text{où}$$

$$d\varepsilon^2 = d\lambda^2 + (c\mathfrak{T}_0)^2 \cdot \sinh^2 \frac{\lambda}{c\mathfrak{T}_0} \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) , \tag{30}$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 \cdot e^{\frac{T-\mathfrak{T}_0}{T_0}} \cdot \cosh \frac{\lambda}{c\mathfrak{T}_0} , \qquad \frac{l}{c} = \mathfrak{T}_0 \cdot e^{\frac{T-\mathfrak{T}_0}{\mathfrak{T}^0}} \sinh \frac{\lambda}{c\mathfrak{T}_0} ;$$

[1] Cette théorie générale résoud, par exemple, la question relative à la récession des nébuleuses lointaines, qui apparaissent stationnaires en temps T, tandis qu'elles s'éloignent pour l'observateur qui emploie le temps naturel $\mathfrak{T}$.

et l'on voit que $d\varepsilon^2$ définit la métrique d'un espace statique hyperbolique [1].

Quant au type de ds^2 de la Relativité dite générale, il est donné en introduisant une nouvelle variable temporelle t, qui est le temps cosmique relativiste:

$$t = \mathfrak{T}_0 \cdot e^{\frac{T-\mathfrak{T}_0}{\mathfrak{T}_0}} , \qquad dt = e^{\frac{T-\mathfrak{T}_0}{\mathfrak{T}_0}} \cdot dT ;$$

on a alors:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{t}{\mathfrak{T}_0}\right)^2 \cdot d\varepsilon^2 , \tag{31}$$

égalité qui définit un Espace-Temps avec un espace hyperbolique en expansion.

Les systèmes de coordonnées $(l, \mathfrak{T})$ et (λ, T) peuvent être appelés des systèmes cohérents de coordonnées; tandis que la combinaison mixte (λ, t) de la Relativité conduit à des difficultés considérables.

D'ailleurs la signification du ds^2 relativiste einsteinien est essentiellement différente de celle des deux premiers ds^2, (29) et (30). Les métriques de ceux-ci ne jouent aucun rôle physique dans la théorie de Milne; ce sont simplement des formules algébriques convenables. Ce n'est pas le cas en Relativité générale, où le choix des géodésiques de l'Espace-Temps comme trajectoires des particules libres est fait à titre de postulat indépendant [2]. Il faut ensuite introduire les équations de champ d'Einstein, qui sont essentiellement empiriques; il est donc impossible à la théorie relativiste dite générale d'extrapoler avec sécurité; ses extrapolations ne sont pas légitimes.

Il convient de rappeler ici une remarque que McCrea et Milne ont faite et développée en 1934 et 1935 [3]; c'est que les

[1] La coordonnée λ n'a rien de commun avec le facteur de dilatation λ employé dès le début. La lettre λ n'est employée ici que momentanément pour indiquer la transformée de la coordonnée l.

[2] *Cf.* Einstein et Bosen, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, p. 76.

[2] Milne, *Quart. J. math.*, 1934.

McCrea and Milne, *Quart. J. Math.*, 1934.

Milne, *Relativity, Gravitation and World-Structure.* Oxford, 1935. Chap. 16.

équations de la cosmologie relativiste sont identiques avec les équations qu'on obtient en traitant l'Univers entier par les méthodes mêmes de la mécanique gravitationnelle locale de Newton, en utilisant le temps cosmique t comme temps newtonien T. C'est là l'identification dont nous parlerons dès le n° 7 suivant.

D'ailleurs, l'idée que les équations de la mécanique doivent garder leur forme inchangée dans toute transformation de coordonnées, idée qui est à la base de la théorie de la Relativité dite générale, est très discutable; valable peut-être dans l'espace vide, elle est inapplicable dès qu'on considère la distribution générale de la matière dans l'Univers.

Faisons encore cette remarque que, dans une question scientifique, il faut toujours partir de l'expérience et y revenir. Nous ne pouvons parler qu'en langage terrestre, d'observations effectuées *de* la Terre, et par des observateurs telluriens.

Cela nous amène à réfléchir sur l'identification usuelle sous-entendue du temps cosmique des formules relativistes et du temps astronomique universel.

(à suivre)