Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 19 (1937)

Artikel: Le principe de relativité selon Poincaré et la mécanique invariante de Le Roux

Autor: Dive, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741813

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ
SELON POINCARÉ
ET LA MÉCANIQUE INVARIANTE
DE LE ROUX

PAR

Pierre DIVE

Dès 1900, Henri Poincaré a fait comprendre combien il serait important, pour connaître la signification intrinsèque des lois de la Mécanique, de savoir les exprimer par des équations indépendantes de l'état de mouvement des systèmes de référence [1]. On a pu penser que ce vœu serait un jour complètement satisfait grâce à la théorie de la Relativité généralisée d'Einstein.

Les principes fondamentaux énoncés par ces savants sont, en effet, comparables dans leur forme. Mais, comme nous allons le rappeler, les idées de Poincaré sur le Temps, sur l'Espace et la Géométrie, étaient assez nettement en opposition avec les hypothèses et les vues d'Einstein pour qu'on ne puisse pas douter que l'illustre géomètre, s'il avait vécu, eut tiré du Principe de Relativité des interprétations physiques ou philosophiques différentes de celles qui sont venues, il y a quelque vingt ans, apporter un certain trouble dans nos habituelles façons de penser.

Dans cette étude nous nous proposons de montrer comment la *Mécanique invariante* de Le Roux s'inspire et découle directement de la philosophie de H. Poincaré sur les notions fondamentales de la Géométrie et de la Mécanique.

[1] Cf. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VI, janvier 1898; et un mémoire de H. Poincaré présenté au Congrès de Philosophie de 1900; voir aussi la *Valeur de la Science*, chap. II.

CHAPITRE PREMIER

Le Principe de Relativité et son extension.

§ 1. — *Origine expérimentale du Principe de Relativité.*

Quels sont exactement le sens et la portée du Principe de Relativité ? En Mécanique classique, il exprime que deux ensembles matériels, doués initialement de la même configuration et de vitesses égales dans deux systèmes de référence en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre, ont des mouvements ultérieurs identiques pour des observateurs effectuant des mesures d'espace et de temps dans chacun de ces systèmes.

Ce principe ne semblait pas devoir s'appliquer aux phénomènes optiques ou électromagnétiques, considérés depuis Huyghens et Fresnel comme se propageant dans un milieu immobile très subtil, l'éther. Il paraissait, en effet, évident, dans cette hypothèse, que les expériences faites à l'intérieur d'un système de référence sur des ondes électromagnétiques ou lumineuses, devaient donner lieu à des observations variant avec la vitesse de translation de ce système dans l'éther.

Or, cette prévision fut toujours démentie par l'expérience.

Et c'est en particulier l'insuccès de tous les essais tentés jusqu'ici pour mesurer la vitesse de translation de la Terre, par des mesures de laboratoires, et surtout, parmi ces essais [1], les plus célèbres, ceux de Michelson, qui a conduit les physiciens à étendre le principe de relativité aux phénomènes optiques et électromagnétiques [2].

[1] L'expérience de Trouton et Noble a apporté également dans le domaine de l'électricité une présomption en faveur du principe de relativité; cf. *Proceeding of the Royal Society*, t. LXXII, 1903, p. 132.

[2] Dans *Science et Méthode* (p. 235), H. Poincaré énonce ce principe sous la forme suivante: « Quel que soit le moyen qu'on emploie, on ne pourra jamais déceler que des vitesses relatives, j'entends les vitesses de certains corps matériels par rapport à d'autres corps matériels. En effet, si la source de lumière et les appareils d'observa-

Michelson était pourtant convaincu qu'il devait être possible de mettre en évidence la vitesse orbitale de la Terre en n'utilisant que des sources d'ondes et des récepteurs terrestres; et cette conclusion inattendue des ingénieuses expériences, auxquelles il avait consacré avec une belle tenacité une grande partie de son existence, lui a fait dire un jour avec une pointe d'humour, mais en exprimant aussi son désappointement « Je n'ai pas voulu cela » [1].

A vrai dire on a peut-être mis quelque hâte pour affirmer et surtout pour généraliser le résultat négatif de l'expérience de Michelson. Certaines difficultés d'ordre théorique [2] ou expérimental n'auraient pas été complètement surmontées [3].

Quoi qu'il en soit, ces incertitudes nous invitent à une attitude prudente devant une affirmation positive ou négative trop catégorique [4].

Il est important aussi de remarquer que l'expérience de Michelson ne fait intervenir que des phénomènes stationnaires

tion sont sur la Terre et participent à son mouvement, les résultats expérimentaux ont toujours été les mêmes, quelle que soit l'orientation de l'appareil par rapport à la direction du mouvement orbital de la Terre. Si l'aberration astronomique se produit, c'est que la source qui est une étoile, est en mouvement par rapport à l'observateur ».

[1] Cf. Emile PICARD, *L'évolution des idées sur la lumière d'Albert Michelson, associé étranger de l'Académie.* Lecture faite en la séance annuelle du 16 décembre 1935.

[2] Dans sa petite brochure intitulée *La théorie de la relativité et ses applications à l'Astronomie*, M. Emile Picard a présenté l'objection suivante: « Dans les théories classiques relatives à l'éther les équations sont réduites à la forme linéaire. Qu'adviendrait-il, dans les problèmes qui nous occupent, si l'on ne se limitait pas à cette approximation ? C'est une question à laquelle il n'est pas possible actuellement de répondre. On ne peut donc pas dire que l'on a épuisé toutes les alternatives en restant aux anciens points de vue ».

[3] M. Carvallo a attiré l'attention sur l'influence perturbatrice que pourrait avoir la force électromotrice induite par les rayons lumineux dans la couche argentée de la lame semi-transparente utilisée dans le dispositif de Michelson. Le déréglage qui en résulterait serait cause de la variété des résultats obtenus par les divers expérimentateurs. Cf. la *Revue Scientifique*, 14 juillet 1934, p. 405; la *Revue générale d'électricité*, 28 mars et 4 avril 1931; et une brochure intitulée: *La théorie d'Einstein démentie par l'expérience*, Paris, 1934.

[4] Cf. Pierre BRICOUT, *Ondes et électrons*, Paris, 1931.

(interférences). Qu'obtiendrait-on en mesurant *directement*, par des procédés suffisamment délicats, les vitesses de propagation des fronts d'ondes sur des parcours simples ?

Ces réserves faites, il semble bien que nous puissions regarder, avec Poincaré et la plupart des physiciens contemporains, le principe de relativité restreint aux mouvements de translation rectilignes et uniformes, comme une « loi générale de la Nature » [1] — du moins en ce qui concerne les phénomènes stationnaires [2].

Mais cela étant reconnu on peut se demander si les résultats des diverses expériences qui, jusqu'ici, confirment le principe de relativité impliquent vraiment la conséquence, audacieusement avancée par Einstein, de l'isotropie de la propagation de la vitesse de la lumière dans tous les systèmes de Galilée [3].

De cette interprétation Einstein et ses disciples ont tiré des propositions bien paradoxales. Celle qui affirme la relativité des temps propres (ou vécus) a eu, on le sait, une grande vogue.

En 1922, cependant, M. Le Roux a montré la nécessité d'établir une distinction entre les *ondes de progression* et les *ondes d'interférences;* et cette remarque lui a permis d'émettre des doutes sur la loi d'isotropie [4]. Tout récemment M. Le Roux est revenu sur cette question. Par une habile application de la théorie des groupes, il a indiqué comment le temps local lorentzien pouvait être mis en évidence dans l'hypothèse, déjà

[1] H. Poincaré, *Science et Méthode*, p. 240.

[2] Une conséquence immédiate du principe de relativité c'est que la modification apportée dans un phénomène, par des mouvements, rectilignes et uniformes dans l'éther, d'une source et d'un récepteur, ne doit pas permettre de mesurer d'autre vitesse que leur vitesse relative. Le phénomène de l'aberration (Bradley) et l'effet Doppler-Fizeau sont des exemples bien connus de l'influence sur la propagation des ondes du mouvement relatif d'une source et d'un récepteur. Mais la théorie prérelativiste de ces phénomènes ne satisfait pas à cette exigence du principe de relativité; elle prévoit, en effet, des périodes apparentes différentes suivant que c'est le récepteur ou la source qui se déplace. *Il est donc certain, si le principe de relativité est vrai, que la théorie classique de l'aberration doit être modifiée.*

[3] Systèmes dans lesquels le mouvement de tout élément matériel isolé est rectiligne et uniforme.

[4] Le Roux, Relativité restreinte et géométrie des systèmes ondulatoires. *Journal de Math.*, t. I (1922), p. 207.

brièvement suggérée par Poincaré [1], où les fronts d'ondes sont des ellipsoïdes allongés (indicatrice à deux foyers). Dans ce cas, la vitesse de propagation d'un rayon lumineux dépend de sa direction, mais les surfaces d'interférences, *les seules mises en cause dans l'expérience de Michelson*, sont des sphères concentriques; et c'est ce qui expliquerait le résultat négatif de cette expérience [2].

§ 2. — *Le Principe général d'invariance.*

Peut-on élargir l'énoncé du principe de relativité ? Est-il possible de l'étendre à tous les systèmes de référence arbitrairement mobiles ? Evidemment non, puisque déjà la Mécanique classique l'a répudié (expérience de Foucault) et que l'expérience de Sagnac (disque tournant) et celle de Michelson et Gale prouvent que les phénomènes observés dans un système sont altérés par son mouvement de rotation. *Le principe de relativité, entendu dans un sens expérimental, n'est donc pas vrai pour les systèmes de référence en état d'accélération.*

Dès lors, on a songé à une autre manière d'extension de ce principe. L'esprit de généralisation et la tendance à rechercher des propriétés absolues ont invité à se demander s'il ne serait pas possible d'exprimer les lois naturelles sous des formes analytiques intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes des mouvements arbitraires des systèmes de référence, et même, comme le voulait H. Poincaré, indépendantes des systèmes de géométrie, euclidiens ou non, et de tous les procédés conventionnels de repérage du temps.

En matière de prologue à sa Mécanique invariante, M. J. Le Roux cite ces lignes de H. Poincaré:

[1] Cf. *Science et Méthode*, p. 99 et 100.

[2] Cf. Le Roux, Application de la théorie des groupes de transformations au Problème de la Relativité restreinte. *Annales de la Société polonaise de mathématique*, t. XV, 1936 *.

* Rappelons encore que M. H. Varcollier a donné une théorie générale de l'aberration corrigeant la théorie classique par l'attribution au milieu propagateur des ondes de propriétés complétant celles que lui avait déjà reconnu Huyghens. Or il est fort intéressant de constater que les hypothèses physiques de M. Varcollier permettent de retrouver dans l'espace euclidien et le temps absolu toutes les formules essentielles de la théorie d'Einstein (*La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques*, Paris, 1924).

« Telles sont les questions qui se posent naturellement, et la difficulté de la solution provient principalement de ce que les traités de mécanique ne distinguent pas bien nettement ce qui est expérience, ce qui est raisonnement mathématique, ce qui est convention, ce qui est hypothèse.

« Ce n'est pas tout:

« 1° Il n'y a pas d'espace absolu et nous ne concevons que des mouvements relatifs; cependant on énonce le plus souvent les faits mécaniques comme s'il y avait un espace absolu auquel on pourrait les rapporter;

« 2° Il n'y a pas de temps absolu; dire que deux durées sont égales, c'est une assertion qui n'a par elle-même aucun sens et qui n'en peut acquérir un que par convention;

« 3° Non seulement nous n'avons pas l'intuition directe de l'égalité de deux durées, mais nous n'avons même pas celle de la simultanéité de deux événements qui se produisent sur des théâtres différents; c'est ce que j'ai expliqué dans un article intitulé la Mesure du temps [1];

« 4° Enfin notre géométrie euclidienne n'est elle-même qu'une sorte de convention de langage; nous pourrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire; l'énoncé deviendrait ainsi beaucoup plus compliqué; mais resterait possible.

« Ainsi l'espace absolu, le temps absolu, la géométrie même ne sont pas des conditions qui s'imposent à la mécanique; toutes ces choses ne préexistent pas plus à la mécanique que la langue française ne préexiste logiquement aux vérités que l'on exprime en français.

« On pourrait chercher à énoncer les lois fondamentales de la Mécanique dans un langage qui serait indépendant de toutes ces conventions; on se rendrait mieux compte ainsi sans doute de ce que ces lois sont en soi; c'est ce que M. Andrade a tenté de faire, au moins en partie, dans ses *Leçons de Mécanique physique* » (v. *La Science et l'Hypothèse*, p. 111).

[1] *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VI, p. 1-13 (janvier 1898): voir aussi la *Valeur de la Science*, chap. II.

Il ne s'agit donc plus maintenant d'énoncer ou de vérifier la loi expérimentale de l'impossibilité de mettre en évidence, par des observations internes, le mouvement d'un système dans l'éther, mais de trouver les procédés mathématiques qui permettraient de donner aux lois de la Mécanique ou de la Physique des expressions invariantes quand on passe d'un système de référence à un autre arbitrairement mobile.

Le postulat général qui est le fondement de cette recherche pourrait être appelé *Principe d'invariance des lois naturelles.* On éviterait ainsi de le confondre avec le principe expérimental de relativité dont nous venons de parler. Néanmoins ce postulat est encore couramment désigné par la locution *Principe de Relativité générale.*

Il est intéressant de rapprocher les vœux de Poincaré de ces réflexions d'Einstein (que nous traduisons) [1]:

« On a pu, par exemple, penser, on l'a même essayé, introduire dans les lois de la Mécanique rien que les distances mutuelles des corps matériels. On pouvait espérer par ce procédé atteindre le plus simplement le but de la théorie de la Relativité. Mais le développement de la Science n'a pas confirmé cette hypothèse. On n'a pas pu se passer de systèmes de coordonnées. »

C'est là sans doute la raison qui a conduit à modifier l'énoncé primitif du principe de relativité [2]. Chez Einstein, en effet, l'invariance des lois physiques ne s'exprimera plus par rapport aux coordonnées qui servent à décrire, dans les divers systèmes de référence, la marche d'un phénomène, mais, pour tout changement de variables, par rapport aux tenseurs caractérisant l'Espace-Temps ou l'Univers dans lequel évolue ce phénomène.

A ce propos, il ne nous paraît pas inutile de faire ici une distinction essentielle dans la terminologie mathématique.

Etant donnée une fonction des coordonnées $x_1, x_2 \dots x_n$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

[1] Cf. *Die Naturwissenschaften*, nº 48, 1918.

[2] Cf. EINSTEIN, *La théorie de la Relativité restreinte et généralisée*, trad. Rouvière, p. 85.

et une substitution

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(x'_1 x'_2, \ldots x'_n) , \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

on dit, conformément à la théorie des groupes, que f est un *invariant* par cette substitution, si l'on a:

$$f\left[\varphi_1(x'_1, x'_2 \ldots) , \quad \varphi_2(x'_1, x'_2, \ldots) , \ldots \varphi_n(x'_1, x'_2 \ldots)\right] \equiv$$
$$\equiv f(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) ;$$

c'est-à-dire, si le remplacement dans f des coordonnées x_α par leurs expressions en fonction des x'_α laisse cette fonction inchangée aussi bien en forme qu'en valeur; la transformation opérée n'ayant d'autre résultat que le remplacement direct des x_α par les x'_α.

Par exemple, $x^2 + y^2 + z^2$ est un invariant pour les substitutions orthogonales de la géométrie analytique euclidienne.

Le calcul tensoriel a accoutumé à donner un sens plus large au mot invariant.

Etant donné plusieurs tenseurs de composantes

$$A^{\lambda\mu\nu\ldots}_{lmn\ldots}(x_1, x_2 \ldots x_n) , \quad B^{\rho\sigma\tau\ldots}_{r,s,t\ldots}(x_1, x_2 \ldots x_n) ,$$

on dit que la fonction

$$F\left(A^{\lambda\mu\nu\ldots}_{l,m,n\ldots} , \quad B^{\rho\sigma\tau\ldots}_{rst\ldots} , \ldots\right)$$

est un *invariant* pour une substitution quelconque des variables x_α, lorsque cette fonction conserve sa forme, non plus par rapport à ces variables, mais par rapport aux composantes $A^{\lambda\mu\nu\ldots}_{lmn\ldots}$, $B^{\rho\sigma\tau\ldots}_{rst\ldots}$.

Par exemple, si A^λ est un tenseur contrevariant du premier ordre et B_r ($\lambda r = 1, 2, \ldots n$) un tenseur covariant du premier ordre, on a:

$$\sum_{\lambda r} A^\lambda B_r = \sum_{\lambda r} A'^\lambda B'_r$$

A'^λ et B'_r désignant les nouvelles composantes des tenseurs considérés après la substitution [1].

[1] Cf. par ex. Jean CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. 2, p. 54 et suiv.

On appelle souvent *scalaires* des expressions invariantes de cette espèce [1].

La différence de ces notions d'invariants est un des aspects de la divergence du point de vue de Poincaré et Le Roux et de celui d'Einstein.

On verra, en effet, qu'en donnant aux idées de Poincaré tout leur développement mathématique, M. Le Roux a réussi à exprimer les lois de la Mécanique en fonction des seules distances mutuelles des éléments matériels, dont les expressions sont, on le sait, invariantes par rapport aux coordonnées.

Ce succès apporte une remarquable confirmation aux profondes pensées de Poincaré sur lesquelles M. Le Roux a édifié une théorie ingénieuse et cohérente, plus générale que la Mécanique classique, indépendante de toute hypothèse de temps et d'espace absolus et répondant pleinement au Principe d'invariance [2].

CHAPITRE II

Les idées de H. Poincaré sur l'Espace et la Géométrie.

§ 1. — *Origine des concepts géométriques.*

Notre notion d'espace géométrique est née, selon Poincaré, de l'analyse des lois suivant lesquelles se succèdent les sensations que nous recevons des objets extérieurs.

[1] Pour éviter toute ambiguïté on pourrait utiliser la locution « *invariant tensoriel* ».

[2] Cf. Le Roux, *Principes mathématiques de la théorie de la gravitation*, Paris, 1931.

Les groupes de Relativité. *J. E. P.*, 2me série, cahier nº 30, p. 129, 152.

Le principe de Relativité et la loi de la gravitation. *Ann. Ec. Normale*, (3), L, Paris, mai 1933.

Le principe de Relativité et les lois invariantes du mouvement. *J. E. P.*, cahier nº 31.

Principes et méthodes de Mécanique invariante, Paris, 1934.

Voir aussi: *La Variation de la Masse* (*Acta Mathematica*, t. 49, p. 397) et Application de la théorie des groupes de transformations au problème de la relativité restreinte. *Mémoires de la Société polonaise de mathématique*, t. XV, 1936.

On reconnaît facilement que nos impressions psychiques peuvent être classées en deux catégories: les unes ont leurs causes dans les changements d'état des corps, les autres dans leurs changements de position ou dans le propre mouvement de notre corps.

Toute modification, dans l'ensemble des impressions que nous recevons d'un objet concret, et qui peut être *entièrement corrigée* par un mouvement corrélatif de notre corps, est considérée comme due à un *simple déplacement* de l'objet.

L'expérience nous apprend que les corps solides ne subissent que *de purs changements de position.*

Or, *ce sont précisément les lois de ces déplacements qui font l'objet de la Géométrie.*

Ainsi apparaît le rôle fondamental du concept de *solide* dans la genèse de la Géométrie: « Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie », dit Poincaré [1].

Il est essentiel de remarquer, par exemple, que des déplacements tout à fait arbitraires de solides ne sont concevables qu'à la condition de postuler la *continuité*, l'*homogénéité* et l'*isotropie* de l'espace.

L'obligation d'admettre la *continuité* de l'espace résulte de ce que l'idée du passage d'une position à une autre d'une façon discontinue est contraire à l'expérience, et même aux lois de notre esprit.

Par contre, les caractères d'*homogénéité* et d'*isotropie* de l'espace viennent de la possibilité de compenser tous les déplacements externes, faisant passer d'un ensemble donné d'impressions initiales à un même ensemble final, par des mouvements corrélatifs volontaires donnant lieu à des successions de sensations musculaires identiques.

On voit que ces propriétés attribuées à l'espace sont fondées aussi sur notre conviction de pouvoir indéfiniment répéter le même mouvement; l'idée est analogue à celle sur laquelle repose l'« *irrésistible évidence* » du raisonnement par récurrence. Grâce à la loi d'homogénéité le raisonnement mathématique

[1] *La Science et l'Hypothèse*, p. 80.

a prise sur les faits géométriques (Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 23).

D'une façon générale, tous les caractères qu'il faut attribuer à l'espace pour construire une géométrie sont impliqués et résumés dans la définition d'un *groupe de déplacement* [1].

On sait d'ailleurs que cette notion est étroitement liée à la définition analytique de l'*égalité des figures*.

Tout déplacement d'un système de référence — dont la position est repérée par rapport à un autre système regardé comme fixe — est, en effet, défini par les variations d'un certain nombre de paramètres $a_1, a_2, \ldots a_k$ [2].

On dit alors que deux figures F_x et F_y, déterminées dans un même système de référence, sont égales, s'il est possible de définir des variations $\delta a_1, \delta a_2 \ldots \delta a_k$ des paramètres de position $a_1, a_2 \ldots a_k$, qui amènent le système de référence de sa position actuelle S_x à une position S_y telle que les coordonnées y_i des points F_y, par rapport à S_y, soient égales aux coordonnées x_i de F_x par rapport à S_x.

On voit donc que toute variation des paramètres a_h satisfaisant à une condition de cette sorte correspond à ce que Poincaré appelle « un déplacement corrélatif de notre corps », tandis que les coordonnées x_i et y_i des points des figures représentent les « ensembles d'impressions » que nous recevons des objets extérieurs.

Le passage des coordonnées $x_1, x_2 \ldots x_n$ d'une figure, par rapport à S_x, aux coordonnées $y_1, y_2 \ldots y_n$, de la même figure par rapport à S_y, repéré dans S_x par des *paramètres de position* $a_1, a_2 \ldots a_k$, se traduit par des formules du type:

$$y_i = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n ; a_1, a_2 \ldots a_k) .$$

[1] Cf. H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 83. — Cf. Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Dritter Abschnitt, Abtheilung V: Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. — G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique*, 319. — E. Picard, *Analyse mathématique*, p. 587. — Cartan, *La méthode du repère, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés*, p. 25. — Bouligand, *Premières leçons sur la Théorie générale des groupes*.

[2] Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, les trois coordonnées x_0, y_0, z_0 de l'origine et les trois angles d'Euler φ, ψ, θ.

Les transformations pour lesquelles deux figures égales à une même troisième, au sens que nous avons précisé, sont égales entre elles, définissent un *groupe*.

Les substitutions les plus usitées sont celles des changements de systèmes de coordonnées trirectangles de la géométrie euclidienne.

Si l'on fait abstraction de toute représentation géométrique particulière, on peut dire que tout groupe de transformation fait correspondre élément à élément deux ensembles (x) et (y) rapportés à un même système de référence, ou bien encore exprime les relations entre les coordonnées d'un même ensemble rapporté à *deux systèmes se correspondant par des variations des paramètres* a.

Deux ensembles liés par une transformation du groupe sont dits *congruents*. La *congruence* est donc une généralisation de l'*égalité*.

D'après Sophus Lie, les groupes permettant de construire une géométrie analogue à la géométrie d'Euclide satisfont aux conditions fondamentales suivantes:

1° A tout ensemble de deux points correspond un seul invariant indépendant [1]. Toute fonction d'un invariant est aussi un invariant. La *distance* (euclidienne ou non) de deux points est un invariant qui possède le caractère d'additivité.

2° Un ensemble de plus de deux points n'admet pas d'invariant essentiel. Tout invariant de cet ensemble s'exprime uniquement en fonction des distances mutuelles de ses éléments.

§ 2. — *Les groupes géométriques et leur usage.*

Les positions des éléments d'un ensemble matériel sont toujours définis par des opérations géométriques. Il convient donc d'adopter en Mécanique les mêmes systèmes de référence qu'en Géométrie.

[1] Rappelons qu'une fonction $I(x)$ des coordonnées $x_1, \ldots x_n$ est *un invariant d'un groupe*, si elle conserve *à la fois sa forme et sa valeur* quand on effectue sur les variables x_i des substitutions de ce groupe. On a alors $I(x) = I(y)$.

Quels sont alors tous les groupes susceptibles de correspondre aux déplacements géométriques ?

La réponse se trouve dans ce théorème général de Lie:

Tout groupe géométrique continu de l'espace à trois dimensions est à six paramètres [1]. *Par une transformation ponctuelle, il est possible de ramener ce groupe à l'une des trois formes caractérisant soit la géométrie d'Euclide, soit celle de Riemann, soit celle de Lobatschewsky* [2].

Or — et c'est là un point qui n'a pas toujours été bien compris par ceux qui croient à une intuition directe d'un espace euclidien — ces diverses géométries ne s'excluent nullement. Les géométries non euclidiennes à deux dimensions ne diffèrent pas des géométries des surfaces à courbure constante, positive pour celle de Riemann, négative pour celle de Lobatschewsky [3].

Dans *la Science et l'Hypothèse* (p. 56, 57) Poincaré montre très simplement comment cette interprétation s'étend à l'espace à trois dimensions.

Les diverses métriques coexistent donc, se superposent, et constituent en réalité une même géométrie générale [4] dont la forme analytique peut être exprimée par la théorie des groupes.

Dès lors, peut-on dire que l'espace est ou n'est pas euclidien ?

[1] Proposition bien connue dans la géométrie analytique classique.

[2] Les deux géométries non euclidiennes sont caractérisées par les groupes qui laissent invariante l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1) .$$

[3] Voir dans le *Traité d'Analyse* (t. I, p. 587) de M. Emile Picard une image de la géométrie de Lobatschewsky obtenue au moyen de la substitution complexe

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} .$$

[4] La géométrie de Cayley constitue une généralisation de la géométrie euclidienne et des géométries de Lobatschewsky et de Riemann. — Cf. G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique*, Livre IV, p. 289 à 363. — P. Appell et Thiry, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 5, p. 171 et suiv. — Bouligand, *Premières leçons sur la Théorie générale des groupes*, p. 161 et suiv. On trouvera aussi un clair résumé de la Géométrie de Cayley dans l'ouvrage de M. von Laue, *La théorie de la Relativité*, t. II, p. 130.

Ce serait attribuer à l'espace une réalité en soi indépendante des corps; ce serait, en même temps soutenir que les phénomènes physiques peuvent ou ne peuvent pas être interprétés au moyen de la géométrie euclidienne.

Or, dans une pénétrante analyse, Poincaré a expliqué pourquoi les expériences ne peuvent porter que sur les rapports des corps entre eux et ne révèlent rien, ni sur les rapports des corps avec l'espace, ni sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace. De là résulte cette importante conclusion:

« *Une expérience, quelle qu'elle soit, comporte une interprétation dans l'hypothèse euclidienne; mais elle en comporte une également dans l'hypothèse non euclidienne* [1]. »

Une géométrie ne saurait par conséquent être opposée à une autre qu'en considération de sa plus ou moins grande commodité. L'expérience pourra guider notre choix, mais elle ne saurait l'imposer.

§ 3. — *Le point de vue des relativistes et celui de Le Roux.*

Pour Einstein, Eddington, Weyl et leurs disciples, l'*Espace n'est pas euclidien.* Qu'entendent-ils donc par cette locution ?

Dans son ouvrage célèbre *Espace — Temps — Gravitation* (p. 156) Eddington révèle sa pensée:

« Ces preuves expérimentales que l'espace, dans le champ de gravitation du Soleil, est non euclidien ou courbe ont semblé paradoxales et déconcertantes à ceux qui ne s'étaient pas familiarisés avec la théorie. Elles nous montrent clairement que les objets physiques ou leurs trajectoires se trouvent « gauchis » dans le champ solaire; mais en résulte-t-il nécessairement que l'espace contenant ces objets est lui-même gauchi. Nous répondons qu'il n'est pas possible de tracer une distinction entre le gauchissement d'un espace physique et celui des êtres physiques qui définissent cet espace. »

Une telle façon de voir repose évidemment sur la conviction qu'il est possible d'établir des étalons de mesure d'espace et

[1] POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, p. 97.

de temps de telle sorte que la lumière, les corps solides et, d'une manière générale, tous les faits physiques entrent dans le cadre de l'espace choisi.

Un postulat aussi général n'est-il pas trop aventureux ? Son affirmation n'est au fond basée que sur l'interprétation de deux ou trois expériences — d'ailleurs discutées — que l'on estime propres à révéler la courbure de l'espace.

Mais, Eddington et Weyl sont allés encore plus loin; ils ont attribué à l'espace des propriétés autonomes, de sorte que, dans leurs théories, on peut concevoir un Univers vide de matière, et cependant doué d'une « courbure naturelle ».

Sur ce point la contradiction avec les idées de Poincaré et de Le Roux sur la relativité de l'espace est particulièrement nette.

Si l'on veut bien saisir la divergence des notions d'espace chez Le Roux et chez les relativistes, il faut opposer le concept d'espace géométrique de Lie à celui de Riemann.

Tandis que Lie ne considère dans l'espace que le continuum à n dimensions, Riemann fait encore entrer dans sa définition une forme quadratique de différentielles représentant le carré ds^2 de la distance de deux points voisins [1].

Or la considération des groupes de Lie conduit à des invariants différentiels analogues aux ds^2 de Riemann [2]; mais un ds^2 quelconque n'est pas nécessairement un invariant différentiel d'un groupe afférent à un système de géométrie.

Comme le fait observer Poincaré, ces géométries de Riemann « *si intéressantes à divers titres* » ne peuvent être « que purement analytiques » et ne se prêtent pas à des démonstrations analogues à celles de la géométrie euclidienne [3]. Celle-ci, en effet, utilise pour ses démonstrations des déplacements de figures invariables dans le plan et dans l'espace. De tels déplacements

[1] Cf. LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Dritter Abschnitt, Abtheilung V, et Elie CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*. On doit à M. Elie Cartan diverses extensions très importantes de la théorie de ces espaces; cf. *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés*.

[2] Cf. LE ROUX, *C. R. Ac. d. Sc.*, t. 201, p. 759, 1935 et t. 201, p. 804, 1935.

[3] *Science et Hypothèse*, p. 63.

n'existent pas dans les espaces définis par les ds^2 généraux de Riemann.

Ainsi, Lie, Klein, Poincaré et Le Roux, pour les raisons que nous avons dites et d'autres encore, ne considèrent, comme susceptibles de convenir à une géométrie, que les ds^2 assimilables à des invariants différentiels appartenant à un groupe géométrique de Lie [1].

On le voit, pour ces géomètres, la notion de groupe est essentielle, elle est solidaire de celle des déplacements purs et la possibilité de ceux-ci conditionne celle de la Géométrie. « *Dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes; ce sont ceux dont Lie a fait la théorie* », dit Poincaré.

Une analyse des rapports entre nos états de conscience et nos concepts géométriques a été faite aussi par Einstein [2] qui a écrit: « Poincaré me semble avoir saisi la vérité d'une manière particulièrement nette dans l'exposé qu'il donne dans son livre *La Science et l'Hypothèse*. Parmi les changements que nous constatons dans les corps solides, ceux-là sont particulièrement simples qui peuvent être compensés par des changements appropriés de notre corps. Poincaré les appelle « changements de position ».

Nous avons vu que ces déplacements conduisent naturellement à la notion de groupe. Pourtant, dans sa théorie générale, Einstein n'a pas cherché à considérer des déplacements appartenant à un groupe [3].

[1] Il est intéressant de remarquer, à ce propos, que dans la théorie d'Einstein, le choix d'un ds^2 d'univers n'est pas non plus arbitraire mais limité par les dix équations de la gravitation $R_{ik} = 0$ (Cf. J. Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, p. 36.

[2] Einstein admet que si un ensemble de deux points A, B — qu'il appelle *droite* — marqués sur un corps rigide, coïncide à un moment donné et en un lieu quelconque, avec un autre ensemble: A′, B′ d'un autre corps rigide, ces points pourront coïncider « *toujours* et *partout* ». « Ce n'est pas seulement la géométrie euclidienne pratique, mais aussi sa généralisation immédiate, la géométrie riemannienne pratique et avec elle la théorie de la relativité générale qui reposent sur cette supposition » (*La géométrie et l'expérience*, trad. Maurice Solovine, p. 8).

[3] Nous entendons bien que dans sa tentative de *géométrisation* de la Physique, Einstein a assimilé le temps à une quatrième dimension

Nous verrons, au contraire, que la nouvelle Mécanique de Le Roux est tout entière fondée sur le concept de groupe de déplacement. C'est de là, à notre avis, que vient le caractère de clarté de cette théorie.

Et, n'est-ce pas naturel, s'il est vrai, comme l'affirme Poincaré, que *le concept général de groupe « s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement »* [1].

CHAPITRE III

Le groupe de relativité et ses invariants.

Nous pouvons maintenant esquisser à grands traits la théorie de Le Roux en nous attachant surtout à mettre en relief les notions fondamentales et l'enchaînement des idées.

Pour le but qu'il s'est proposé M. Le Roux devait commencer par obtenir une importante extension de la théorie des groupes à la description des faits physiques et aux changements de systèmes de référence animés de mouvements relatifs arbitraires.

§ 1. — *Le groupe initial.*

1. — Un événement physique quelconque sera repéré et décrit par rapport à un système de référence S_x, par un ensemble de *mesures* $x_1, x_2 \dots x_n$.

Le même événement rapporté à un autre système de référence S_y, obtenu par *déplacement* de S_x, sera noté $y_1, y_2 \dots y_n$.

Pour définir parfaitement la modification, dans l'apparence de cet événement, dû au remplacement de S_x par S_y, il est nécessaire:

d'un univers jouissant des propriétés étendues d'un espace géométrique. Mais, en relativité générale, on ne considère que des changements de variables ne correspondant pas nécessairement à des déplacements des systèmes de référence espace-temps formant un groupe.

[1] *La Science et l'Hypothèse*, p. 91.

1° de préciser la situation de S_y, par rapport à S_x, au moyen des *six paramètres de position* a_k;

2° d'exprimer les coordonnées y_i, en fonction des coordonnées x_i et des paramètres a_k, par des substitutions que nous écrivons symboliquement:

$$y_i = f_i(x\,;\,a)\ .$$

Les deux systèmes de référence doivent d'ailleurs se déduire l'un de l'autre par une *variation continue* des paramètres a_k. Pour certaines valeurs dites *initiales* a_k^0 de ces paramètres, on aura donc la transformation identique:

$$y_i = f_i(x\,;\,a^0) \equiv x_i\ .$$

C'est une première relation imposée aux fonctions f_i.

Les propriétés d'homogénéité et d'isotropie que nous attribuons à l'espace permettent, en outre, de regarder comme possible la *composition* des déplacements du système de référence.

Si un ensemble de valeur (a) des paramètres fait passer de S_x à S_y et un autre (b), de S_y à S_x, il doit exister un troisième ensemble (c) faisant passer directement de S_x à S_z. Les fonctions f_i satisfont alors aux conditions:

$$y_i = f_i(x\,;\,a)\ ,\quad z_i = f_i(y\,;\,b)\ ,\quad z_i = f_i(x\,;\,c)\ .$$

Les valeurs c_k des paramètres sont donc des fonctions des quantités a_k et b_k:

$$c_k = \varphi_k(a\,,\,b)\ .$$

Et la condition de continuité exige qu'on ait:

$$\varphi_k(a^0\,,\,b) = b_k\ ,\qquad \varphi_k(a\,;\,a^0) = a_k\ .$$

A ces propriétés doivent s'ajouter celles qui expriment que les fonctions f_i définissent un groupe appartenant à un système géométrique de Lie.

2. — Rappelons les notations constamment utilisées et les théorèmes principaux.

Posons:

$$\lim_{a=a^0} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} \equiv \xi_{hi}(x)$$

et

$$\lim_{a=a^0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_h} \equiv \alpha_{hk}(b) \ .$$

Pour une fonction quelconque $F(y)$ des fonctions $y_i = f_i(x; a)$, on a donc:

$$\lim_{a=a^0} \frac{\partial F}{\partial a_h} = \sum_i \xi_{hi} \frac{\partial F}{\partial x_i} \ ;$$

on pose encore

$$X_h(F) \equiv \sum_i \xi_{hi} \frac{\partial F}{\partial x_i} \ .$$

Les opérateurs X_h définissent les *transformations infinitésimales* de la fonction F; leur nombre r est égal à celui des paramètres a_h. Les fonctions ξ_{hi} sont appelées *coefficients des transformations infinitésimales;* leur nombre est nr.

A une fonction quelconque $G(c)$ des $c_k = \varphi_k(a, b)$ correspond de même le symbole:

$$A_h(G) \equiv \sum_k \alpha_{hk} \frac{\partial G}{\partial b_k} \ .$$

De la condition essentielle $f_i(x; c) = f_i(y; b)$, on déduit, par l'application des transformations précédentes X_h et A_h, un système de r équations aux dérivées partielles indépendantes, auxquelles doivent satisfaire les fonctions f_i:

$$X_h f_i(x; a) - A_h f_i(x; a) = 0 \ .$$

La solution la plus générale de ce système est une fonction arbitraire des n fonctions indépendantes f_i [1].

[1] Cf. GOURSAT, *Cours d'analyse*, t. II, p. 640.

Si l'on pose:

$$\Delta_h f \equiv X_h f - A_h f \ ;$$

la différence

$$\Delta_h \Delta_k f - \Delta_k \Delta_h f$$

3. — La recherche des fonctions $U(x_1, x_2 \dots x_n)$ qui sont *invariantes* par les transformations du groupe adopté est capitale pour le but poursuivi.

On démontre facilement que les invariants d'un groupe possèdent la propriété caractéristique d'annuler toutes ses transformations infinitésimales.

La théorie des équations aux dérivées partielles permet de préciser les conditions d'existence de ces invariants:

Si m *est le rang de la matrice formée par les coefficients* ξ_{hi} [1], le *système:*

$$X_h(U) \equiv \Sigma \xi_{hi} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \ .$$

admet n — m *solutions indépendantes et l'invariant le plus général du groupe est une fonction arbitraire de ces solutions* [2].

§ 2. — *Le prolongement cinématique du groupe.*

1. — La considération des invariants que nous venons de définir ne peut suffire pour le problème général de relativité. *Il s'agit, en effet, d'écrire les lois de la Mécanique sous forme d'équations qui restent invariantes dans tous les systèmes de référence animés les uns par rapport aux autres de mouvements relatifs arbitraires.*

ne contient que des dérivées premières; on la représente par la *parenthèse de Poisson:*

$$(\Delta_h \Delta_k) f \ .$$

Toute solution de l'équation $\Delta_h f = 0$ est aussi solution de $(\Delta_h \Delta_k) f = 0$. Or, on démontre que toute équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre, vérifiée par les n fonctions f_i, est une combinaison linéaire et homogène des équations $\Delta_h f = 0$. Il vient ainsi:

$$(\Delta_h \Delta_k) f = \sum_s c_{hks} \Delta_s f \ ;$$

où les coefficients c_{hks} sont des constantes, nommées *constantes de structure* du groupe, qui vérifient les relations

$$c_{hks} + c_{khs} = 0 \ .$$

[1] C'est-à-dire l'ordre le plus élevé des déterminants non nuls déduits du tableau de ces coefficients.

[2] Cf., par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 640.

M. Le Roux a été conduit ainsi à *prolonger* le groupe primitif par l'adjonction des formules:

$$y'_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x'_j + \sum \frac{\partial f_i}{\partial a_k} a'_k , \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots n \\ j = 1, \dots n \\ k = 1, \dots r \end{pmatrix} \qquad (1)$$

les symboles x'_j, y'_i, a'_k désignant, suivant le cas, des dérivées prises par rapport à une variable non désignée, ou les différentielles dx_j, dy_i, da_k.

Si les a'_k sont tous nuls, le système de référence est fixe, le prolongement du groupe sera dit *statique;* dans le cas contraire, il sera dit *cinématique.*

L'arbitraire mobilité des systèmes de référence se traduit donc par l'indépendance des valeurs a'_k, quand on suppose les paramètres a_k *essentiels*, c'est-à-dire réduits à leur nombre minimum [1].

M. Le Roux a donné le nom de *groupe de relativité* à tout groupe déduit d'un groupe initial quelconque par prolongement cinématique.

Les transformations infinitésimales du groupe de relativité, pour une fonction quelconque $F(y, y')$ des fonctions y_i et y'_i, sont de deux types:

$$\overline{X}_h(F) \equiv \sum_i \xi_{hi} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \xi'_{hi} \frac{\partial F}{\partial x'_i} ,$$

$$D_h(F) \equiv \sum_i \xi_{hi} \frac{\partial F}{\partial x'_i} ;$$

les lettres primées représentant, à volonté, des différentielles ou des dérivées.

On peut dire que c'est l'introduction du mode de prolongement cinématique qui a permis à M. Le Roux d'attaquer et de résoudre le problème général de relativité tel que le comprenait Poincaré.

[1] La condition nécessaire et suffisante pour que le nombre r des paramètres ne puisse être ramené à un nombre moindre est qu'il n'existe entre les transformations infinitésimales $X_h(f_i)$ aucune relation linéaire et homogène à coefficients indépendants des x_j.

2. — Il convient d'abord d'étendre aux groupes de relativité non euclidiens les propriétés cinématiques bien connues des systèmes en mouvement relatif dans un espace cartésien.

On utilise pour cela des variables ϖ_h liées aux paramètres de position a_k et à leurs dérivées ou différentielles a'_k par les relations[1]

$$a'_k = \sum_h \alpha_{hk} \varpi_h \ .$$

Les formules (1) s'écrivent alors:

$$y_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left(x'_j + \sum_h \varpi_h \xi_{hj} \right) ;$$

et l'on voit que *pour passer du prolongement statique* ($\varpi_h = 0$) *au prolongement cinématique, il suffit de remplacer les* x'_j *par les expressions:*

$$u_j = x'_j + \sum_h \varpi_h \xi_{hj} \ .$$

On reconnaît là une généralisation des expressions cartésiennes donnant la vitesse absolue $\vec{u}$ en fonction de la vitesse relative $\vec{x}'$; les quantités ϖ_h, appelées *paramètres d'entraînement*, y jouent le rôle des composantes de la translation et de la rotation instantanées.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de référence soient invariablement liés entre eux est que leurs paramètres d'entraînement ϖ_h, *par rapport à un même troisième système, soient égaux* [2].

[1] Des expressions semblables ont été considérées par E. Cartan (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 34, 1910, 1re partie, p. 250-283).

[2] Dans le cas du groupe euclidien le problème conduit au système étudié par Darboux

$$\frac{da}{dt} + qc - rb = 0 \ \ldots \ ,$$

où a, b, c sont des cosinus directeurs, p, q, r les composantes de la rotation instantanée. M. Le Roux a montré qu'il est possible d'effectuer l'intégration (Cf. Le Roux, *Principes mathématiques de la gravitation*, p. 6).

3. — L'application des résultats généraux précédents au groupe euclidien permet de donner une signification plus profonde à des propositions classiques bien connues.

On sait que les douze coefficients des substitutions:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + ax + a'y + a''z \ , \\ y_1 &= b_0 + bx + b'y + b''z \ , \\ z_1 &= c_0 + cx + c'y + c''z \ , \end{aligned}$$

peuvent s'exprimer en fonction de six paramètres essentiels seulement. Choisissons, par exemple, comme paramètres indépendants a_0, b_0, c_0, $c' = \alpha$, $a'' = \beta$, $b = \gamma$. La matrice des coefficients ξ_{hi} s'écrit:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \ . \end{matrix}$$

On voit tout de suite que son rang est égal à 3, nombre des coordonnées. Le groupe précédent n'admet donc pas d'invariant.

Il n'en est plus de même pour le groupe des substitutions correspondant à un ensemble de plusieurs points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ... (x_n, y_n, z_n).

Les opérateurs de transformations infinitésimales sont alors:

$$X_1 \equiv \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ \ldots \qquad X_4 \equiv \Sigma \left(y_i \frac{\partial}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \ \ldots \ .$$

On sait qu'ils interviennent constamment en Mécanique classique.

Dans le cas de *deux points* la matrice des ξ_{hi} n'est que de rang cinq. On met ainsi en évidence l'existence d'un seul invariant ($3 \times 2 - 5 = 1$) qui est égal à la *distance euclidienne* des deux points ou à toute fonction de cette distance.

Pour un ensemble de n points, le nombre des invariants indépendants est égal à $3n - 6$. Or ce résultat s'obtient directement par un raisonnement géométrique facile; on sait, en effet, qu'il existe seulement $3n - 6$ distances mutuelles indépendantes.

Le prolongement cinématique du groupe introduit six nouveaux paramètres qui sont les dérivées ou les différentielles des six paramètres de position choisis.

Dans le cas d'un seul point les douze opérateurs des transformations infinitésimales sont:

$$\overline{X}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \ldots \qquad \overline{X}_4 \equiv y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial z} - z'\frac{\partial}{\partial y}, \ldots$$

$$D_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x'}, \ldots \qquad D_4 \equiv y\frac{\partial}{\partial z'} - z\frac{\partial}{\partial y'} \ldots .$$

On vérifiera aisément que les six paramètres d'entraînement: ξ, η, ζ, p, q, r, sont égaux aux composantes, suivant les axes mobiles, de la translation et de la rotation instantanées. De sorte que, pour passer du prolongement statique au prolongement cinématique, on aura à substituer aux composantes x', y', z' de la vitesse relative les composantes

$$u_x = x' + \xi + qz - ry, \qquad u_y = \ldots \qquad u_z = \ldots .$$

de la vitesse absolue.

4. — Revenons aux formules générales. Quels sont les invariants du groupe de relativité ?

Ils doivent annuler les transformations infinitésimales du groupe prolongé suivant le mode cinématique. On reconnaît alors que toute fonction des invariants du groupe initial et de leurs dérivées ou différentielles premières, est un invariant du groupe de relativité. Les fonctions de cette espèce sont d'ailleurs les seuls invariants de ce groupe.

Au contraire, un groupe prolongé suivant le mode statique peut admettre des invariants que n'admet pas le groupe initial.

Ainsi la forme quadratique

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{ou} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

invariante pour le prolongement statique du groupe euclidien, ne l'est pas pour le groupe initial, ni pour son prolongement cinématique. C'est la traduction analytique de ce corollaire

immédiat du théorème de la composition des vitesses: Quand la vitesse d'entraînement est nulle (prolongement statique), la vitesse absolue se confond avec la vitesse relative [1].

5. — Il existe cependant un procédé pour construire des invariants du groupe de relativité à partir d'invariants du groupe prolongé statiquement.

Soit $f(x, x')$ un invariant différentiel de ce dernier groupe. Aux variables x_i' substituons les expressions $u_i = x_i' + \Sigma \varpi_h \xi_{hi}$, puis remplaçons dans $f(x, u)$ les paramètres d'entraînement ϖ_h par des fonctions des variables x_i et x_i' telles qu'on ait:

$$\frac{\partial}{\partial \varpi_h} f(x, u) \equiv 0 .$$

[1] Ces remarques si simples ont permis à M. Le Roux de faire une critique éclairée des transformations de coordonnées en usage dans la théorie d'Einstein.

L'intervalle d'Univers de Minkowski, par exemple,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

est un invariant du prolongement statique du groupe de Lorentz

$$x' = \frac{x - \alpha t}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \alpha x}{\sqrt{1 - \alpha^2}},$$

où α est une constante. Mais ce n'est pas un invariant du prolongement cinématique de ce groupe.

La nécessité de maintenir constant le paramètre α pour conserver l'invariance, enlève aux formules de Lorentz, du point de vue de la théorie des groupes, le sens d'une correspondance établie entre les mesures d'un même événement effectuées dans deux systèmes en état de mouvement relatif.

On dit parfois que, pour les petites vitesses, les formules de Galilée $x' = x - \alpha t$, $y' = y$, $z = z'$ constituent une approximation des formules de Lorentz. Mais cette interprétation n'est pas satisfaisante car les formules galiléennes forment un *groupe*, définissant le passage d'un système de référence S à un autre S′ en translation rectiligne uniforme par rapport à S, lorsqu'on y regarde t, non comme une quatrième coordonnée, mais comme un *paramètre variable*. Il n'en est pas de même pour les formules de Lorentz.

Remarquons encore que les ds^2 de Riemann considérés dans la théorie de la relativité générale ne peuvent en aucun cas être assimilés à des invariants d'un groupe de relativité.

On obtient ainsi une fonction $\varphi(x, x')$ qui est un invariant du groupe prolongé suivant le mode cinématique.

6. — Une loi physique s'exprime par un certain nombre de relations

$$\Phi_1(x) = 0 \ , \ \ldots \qquad \Phi_k(x) = 0$$

entre des mesures [1] x_1, x_2, ... x_n effectuées dans un système de référence S_x. Cette loi est invariante si les mesures y_1, $y_2 \ldots y_n$ correspondant au même phénomène observé dans un autre système quelconque S_y, satisfont aux mêmes relations, c'est-à-dire si l'on a:

$$\Phi_1(y) = 0 \ \ldots \qquad \Phi_k(y) = 0 \ .$$

Il n'est pas nécessaire pour cela que *chaque* fonction $\Phi_\lambda(x)$ soit un invariant du *groupe de relativité* permettant de passer des mesures x_i aux mesures y_i, il suffit que les systèmes d'équations $\Phi_\lambda(x) = 0$ et $\Phi_\lambda(y) = 0$ ($\lambda = 1, \ldots k$) soient *équivalents* dans leur ensemble.

Mais, parmi les lois données par des équations différentielles, les seules qui, sous forme finie, contiennent les constantes arbitraires d'intégration sont celles qui expriment des relations entre invariants du groupe d'arbitraire mobilité des systèmes de référence. Nous n'aurons pas à considérer d'autres lois.

Les résultats généraux précédents constituent l'essentiel des moyens analytiques mis en œuvre par M. Le Roux pour l'édification de sa dynamique invariante.

CHAPITRE IV

Les notions fondamentales de la nouvelle Mécanique.

Que deviennent dans la nouvelle Dynamique les notions fondamentales d'espace de référence, de temps, de masse et de force ?

[1] De coordonnées, de vitesses ou d'autres grandeurs physiques.

§ 1. — *L'Espace et les repères mobiles.*

Dans *Science et Méthode* (p. 95), Poincaré s'exprimait ainsi: « Il est impossible de se représenter l'espace vide; tous nos efforts pour imaginer un espace pur, d'où seraient exclues les images changeantes des objets matériels, ne peuvent aboutir qu'à une représentation où les surfaces fortement colorées, par exemple, sont remplacées par des lignes à faible coloration et l'on ne pourrait aller jusqu'au bout dans cette voie, sans que tout s'évanouisse et aboutisse au néant. C'est de là que provient la relativité irréductible de l'espace.

« Quiconque parle de l'espace absolu, emploie un mot vide de sens. C'est là une vérité qui a été proclamée depuis longtemps par tous ceux qui ont réfléchi à la question, mais qu'on est trop souvent porté à oublier. »

Ce jugement si clair repoussait l'hypothèse newtonienne d'un espace de référence fixe absolu; mais il condamnait aussi, avant l'heure, la conception d'un Espace-temps doué de propriétés autonomes: « L'espace est en réalité amorphe et les choses qui sont dedans lui donnent seules une forme » (Poincaré, *Science et Méthode*, p. 102-103).

La Mécanique moderne classique affirme que ses postulats fondamentaux: principes de l'inertie, de la masse, de l'action et de la réaction de la composition des forces... ne sont vérifiés que dans des systèmes de référence, dits galiléens.

Cette loi ne peut être regardée que comme énonçant une propriété expérimentale, plus ou moins approchée, du repère copernicien.

Au surplus, elle paraît attribuer à ce système de référence un privilège étonnant qui répugne à l'esprit et que la petitesse du monde solaire dans l'immensité des constellations rend incompréhensible.

Il importait donc de nous élever jusqu'à un point de vue plus général qui, en nous libérant de cette restriction, permette de conférer la même dignité à tous les systèmes de référence arbitrairement mobiles.

C'est ce qu'a fait M. Le Roux en formulant les lois invariantes de la Dynamique.

Le concept d'un espace de référence absolu étant, dès lors, disparu, les forces fictives de la théorie classique du mouvement relatif ne doivent plus avoir la même signification. Elles nous apparaîtront maintenant comme dues à l'existence des masses extérieures à l'ensemble matériel étudié et à leurs mouvements.

§ 2. — *Le Temps conventionnel et le Temps canonique.*

La nature, difficile à saisir, du Temps n'a jamais cessé, depuis l'antiquité, de préoccuper les philosophes ; et leurs discussions sur ce sujet ne semblent pas près d'être terminées.

Une distinction, qui paraît essentielle, a toutefois été faite il y a quelques années par M. Bergson. L'éminent philosophe a été, en effet, conduit à distinguer, d'une part, la *durée réelle* vécue par notre conscience, siège de la succession de nos états psychiques et, d'autre part, le *temps des physiciens* que l'on mesure et qui, dans nos formules, est représenté par la lettre t [1].

On conçoit que ce temps-là soit purement conventionnel.

Poincaré l'avait bien reconnu quand il affirmait qu'il n'y a pas de temps absolu; que l'assertion exprimant l'égalité de deux durées n'a « par elle-même aucun sens » et « n'en peut acquérir un que par convention » [2].

Pour affirmer que le temps est absolu ou qu'il est relatif, il faudrait d'abord savoir ce qu'est le temps en soi. Tout ce qu'on

[1] « La vraie durée... n'est pas une quantité, et dès qu'on essaie de la mesurer, on lui substitue inconsciemment de l'espace » (*Essai sur les données immédiates de la conscience*, p. 80).

[2] *La Science et l'Hypothèse*, p. 111. Ici encore il semble qu'EINSTEIN partage la même opinion lorsqu'il dit: « Pour donner au temps une signification physique, il est nécessaire de se servir de certains événements qui établissent des relations entre des lieux différents. Le choix des événements pour obtenir une telle définition du temps est, en soi, indifférent ». Pourtant on sait quel rôle *essentiel* jouent dans la théorie de la Relativité les signaux lumineux et l'interprétation de l'expérience de Michelson. Or, comme l'a fait observer M. Emile PICARD : « Si l'on n'adopte pas ces points de vue, la théorie n'a plus de base » (*La théorie de la Relativité et ses applications à l'Astronomie*, p. 11).

peut dire c'est que, pour déterminer un événement dans la métrique einsteinienne, on fait usage d'une variable t dont la grandeur est *relative* au système de référence choisi. Mais, cette grandeur résulte de procédés *conventionnels* de mesure au même titre que celle du temps sidéral.

La Mécanique de Le Roux ne postule aucun repérage spécial du temps dont la mesure garde le caractère conventionnel que lui reconnaissait Poincaré.

Un ensemble matériel quelconque, dont les déformations présentent une certaine périodicité, sera adjoint à l'ensemble dont on étudie le mouvement et pourra pratiquement servir de chronomètre. La variable t servant à définir le temps n'aura plus que la signification d'une coordonnée géométrique précisant la position relative de certains éléments du chronomètre.

La notion de simultanéité est conservée, mais elle est généralisée. Elle traduit la nécessité de considérer le même ensemble de valeur des paramètres a_k de position pour passer des coordonnées x_i d'un ensemble matériel repéré dans un système S_x, aux coordonnées y_i du même ensemble repéré dans S_y, en mouvement par rapport à S_x [1].

D'une façon générale, on voit donc qu'on n'observera en fait que des variations concomitantes de coordonnées géométriques.

Dans l'expression invariante d'une loi, il faut que le paramètre mesurant le temps disparaisse, pour ne laisser subsister que les invariants géométriques. Ce résultat s'obtient facilement dans le cas de la gravitation par l'application du principe de la moindre action, convenablement adapté *(V. infra)*.

Les équations du mouvement obtenues par cette méthode constituent un système invariant, indépendant du temps. Il est ensuite possible de les ramener à une forme canonique par l'introduction d'une variable auxiliaire nouvelle, définie comme un invariant intégral, en fonction des invariants du groupe géométrique.

C'est le temps canonique.

[1] Envisagée de ce point de vue, la notion de simultanéité persiste dans les formules de Lorentz.

§ 3. — *Masse et force.*

On sait par quelles vicissitudes sont passés les concepts étroitement liés de *masse* et de *force*.

Tantôt la masse est assimilée à la mesure d'une quantité de matière; tantôt elle apparaît comme un coefficient de résistance au mouvement. « Qu'est-ce que la *masse* ? C'est, répond Newton, le produit du volume par la densité. — Il vaudrait mieux dire, répondent Thomson et Tait, que la densité est le quotient de la masse par le volume. — Qu'est-ce que la *force* ? C'est répond Lagrange, une cause qui produit le mouvement d'un corps ou qui tend à le reproduire. — C'est, dira Kirchhoff, le produit de la masse par l'accélération. Mais alors, pourquoi ne pas dire que la masse est le quotient de la force par l'accélération ? » (Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 110).

Il n'existe pour Poincaré qu'un seul moyen pour sortir de ce dilemme: considérer la masse de chaque élément matériel comme un simple coefficient choisi de façon à donner à l'ensemble des lois de la Mécanique la forme la plus simple [1].

On est bien obligé, en effet, d'attribuer à chaque élément matériel une existence propre indépendante de son mouvement ou de celui du système de référence. En regardant la masse d'un élément matériel comme un *invariant*, on donne à son individualité un sens physique.

Le coefficient *masse* sera donc la *caractéristique mécanique* d'un élément matériel. Et l'égalité des masses signifiera l'équivalence dynamique des éléments [2].

La masse d'un élément formé par la juxtaposition de plusieurs autres éléments sera égale, comme le voulait Newton, à la somme des masses des éléments composants.

[1] Du point de vue logique cette définition est suffisante. Mais il reste au physicien la tâche de montrer comment la notion de masse résulte des propriétés intimes de la matière.

[2] Dans la théorie d'Einstein le rapport d'une masse donnée à une masse prise pour unité est encore un invariant pourvu que ces deux masses soient dans un même état de mouvement.

S'il est une définition qui a fait couler de l'encre, c'est bien celle de la force.

Cette notion est certainement née des sensations que provoquent nos efforts musculaires. De cette intuition directe a été tirée l'idée de force considérée comme *cause* de mouvement ou de déformation.

Un tel concept métaphysique donne aux forces une existence propre indépendante des systèmes matériels physiques qui les produisent.

On raisonne sur une force unique, isolée agissant sur un point matériel.

On applique une même force à des corps différents.

On pense aussi savoir ce qu'il faut entendre quand on dit que plusieurs forces sont appliquées simultanément au même point matériel.

W. Thomson, J. J. Thomson, Hertz, Mach, Poincaré ont souligné l'absence de valeur physique de ce concept. Nous ne reviendrons pas sur leurs judicieuses critiques.

Nous croyons que cette idée, de regarder la force comme une cause réelle, peut être tenue pour responsable des nombreuses et vaines tentatives de démonstration logique de la règle fameuse du parallélogramme. Le principe de causalité exige qu'il n'y ait rien dans l'effet qui ne soit déjà dans la cause; et l'hypothèse de l'existence de plusieurs forces agissant sur un élément matériel implique nécessairement celle de leurs effets: accélérations ou déformations. Dans l'insuccès des démonstrations du postulat de la composition des forces — où tant de savants se sont exercés — le principe de symétrie, abusivement appliqué, nous paraît moins en cause que la notion acceptée de force elle-même.

Dans la Mécanique de Le Roux, la force, considérée isolément, n'est plus un concept fondamental essentiel; on pourrait s'en passer. Toutefois, pour la commodité des calculs, il peut être opportun de conserver la définition purement nominale ou analytique de Kirchoff. La force: c'est le *produit* de la masse par l'accélération. Cette grandeur n'a aucun caractère invariant; sa mesure résulte, en effet, du choix du solide de référence et de la métrique utilisée pour repérer l'espace et le temps.

En adoptant ce point de vue on ne nie pas la réalité des influences physiques que peuvent exercer les uns sur les autres les systèmes matériels. Mais on laisse à la Physique proprement dite le soin de préciser dans chaque cas, le mode d'interaction de ces influences.

On pourrait penser que cette façon d'envisager la masse et la force soit contredite par les expériences très précises de MM. Ch.-Eugène Guye et Lavanchy, qui ont donné des formules de Lorentz et d'Einstein une brillante vérification [1]. Mais il est facile de voir que cette divergence est plus formelle que foncière. Nous pouvons, en effet, sans rien changer à la relation qui, en Relativité restreinte, relie entre elles la force F, l'accélération J, la vitesse v du corpuscule, sa masse au repos m_0 et la vitesse c de la lumière, écrire:

$$m_0 \mathrm{J} = \mathrm{F} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Formule que nous interprétons en disant que l'*influence* d'un champ électrique ou magnétique sur un corpuscule électrisé dépend de la vitesse de ce corpuscule par rapport au système producteur du champ.

En réalité, on le sait, il y aurait lieu d'écrire encore pour une action s'exerçant dans le sens de la vitesse:

$$m_0 \mathrm{J} = \mathrm{F} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} ;$$

puisqu'on distingue les actions transversales des actions longitudinales.

Cette manière de voir nous semble naturelle et, d'ailleurs, nous y sommes accoutumés par l'utilisation classique en Electrodynamique de la force de Laplace qui dépend à la fois de la vitesse et de sa direction dans le champ magnétique.

Il est bien évident que cette interprétation, qui conserve les formules précédentes, est en parfait accord avec les expériences de M. Ch.-Eug. Guye.

De ces formules on déduit d'ailleurs, comme dans la théorie

[1] Cf. Ch.-Eug. Guye, *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, 1921.

d'Einstein, que la masse définie comme *capacité d'impulsion* [1] est proportionnelle à l'énergie [2].

§ 4. — *Les lois intrinsèques.*

Faisons encore une remarque générale.

Dans la mécanique de M. Le Roux les invariants indépendants d'un ensemble matériel peuvent se réduire aux distances mutuelles de ses éléments et à leurs variations mesurées suivant le mode conventionnel qui correspond au système géométrique adopté.

Il suit de là que les seules lois intrinsèques du mouvement de l'ensemble sont celles qui régissent la variation de sa configuration géométrique.

Des mouvements d'un même ensemble, dans lesquels les configurations successives sont identiques, sont équivalents. Ils ne pourraient être distingués qu'à la condition d'adjoindre à l'ensemble étudié un autre ensemble extérieur permettant de définir un solide de référence et une coordonnée de temps.

C'est ainsi que, du point de vue de la Dynamique invariante, les mouvements de deux éléments isolés, obéissant à la loi de Newton ou au ds^2 de Schwarzschild, sont regardés comme semblables, pourvu que le maximum et le minimum de la distance mutuelle de ces éléments restent les mêmes dans ces deux hypothèses.

CHAPITRE V

La Dynamique invariante et la loi de la gravitation.

§ 1. — *L'énergie cinétique invariante et le solide de référence principal.*

1. — M. Le Roux donne encore le nom d'énergie cinétique relative à l'expression classique:

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ;$$

[1] On appelle ainsi le coefficient m de proportionnalité entre l'*impulsion* communiquée, Ft, par la force F pendant le temps t, et la vitesse acquise v: $m = Ft/v$.

[2] Cf. Francis Perrin, *La Dynamique relativiste et l'inertie de l'énergie*, Paris, 1932.

mais cette définition est généralisée par la possibilité d'introduire des formes de ds^2, invariantes pour le prolongement statique de groupes non euclidiens [1] et par l'indétermination de la variable t.

Une importante remarque permet tout d'abord de rattacher à la notion unique de transformation infinitésimale cinématique les grandeurs fondamentales de la Mécanique classique. On a, en effet, pour le groupe euclidien:

$$D_1(T) = \Sigma m x' \ , \ \ldots$$
$$D_4\ T) = \Sigma m (yz' - zy') \ \ldots$$

Ainsi, les transformations du premier ordre du groupe de relativité fournissent les composantes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

Si l'on pose:

$$T_{hk} = T_{kh} = D_{kh} T$$

on a ensuite:

$$\begin{aligned} T_1 T_1 &= T_{22} = T_{33} = \Sigma m \ , \\ T_{12} &= T_{13} = T_{14} = \ldots = 0 \ , \\ T_{44} &= \Sigma m (y^2 + z^2) \ , \ \ldots \ T_{45} = - \Sigma myz \ , \\ T_{15} &= \Sigma mz \ , \qquad T_{10} = - \Sigma my \ \ldots \end{aligned}$$

La *masse totale*, les *moments d'inertie*, les *produits d'inertie*, les *coordonnées du centre de gravité* s'obtiennent donc par l'application répétée des transformations du mode cinématique.

Ces résultats remarquables donnent déjà une idée de la puissance synthétique de la nouvelle méthode.

2. — Voici maintenant, toujours pour le groupe euclidien, un théorème fondamental de la Mécanique invariante:

L'énergie cinétique relative d'un ensemble est minimum quand

[1] On a $\overline{X}_h(T) = 0$.

on rapporte le mouvement à un solide de référence dans lequel le centre de gravité est immobile et le moment cinétique nul [1].

3. — Il était réservé à M. Le Roux de donner l'expression explicite du minimum W de l'énergie relative, dans le cas général d'un groupe quelconque, et de montrer que cette expression est un invariant du groupe de relativité se déduisant de l'invariant T, pour le prolongement statique, par le procédé que nous avons déjà indiqué (*cf. infra*, p. 16, n° 5).

4. — Cette grandeur invariante W ne dépend que de la variation de la distribution des masses et peut être regardée comme mesurant l'*énergie cinétique de déformation de l'ensemble.*

L'excès

$$\Theta = T - W$$

de l'énergie cinétique relative T sur l'énergie minimum W est l'*énergie d'entraînement.*

Les systèmes de référence S_0 par rapport auxquels l'énergie d'entraînement Θ est nulle, ou, ce qui revient au même, pour lesquels l'énergie cinétique T prend sa valeur minimum W, ont un mouvement caractérisé par les valeurs communes de leurs paramètres d'entraînement ϖ_h.

Par un artifice analogue à celui qui, en Mécanique analytique, conduit aux équations de Hamilton, on exprime ces paramètres sous la forme élégante

$$\varpi_h = -\frac{\partial \Theta}{\partial T_h}$$

où T_h est mis pour $D_h T$.

Une remarque qui souligne le caractère de généralité de cette théorie, s'impose aussitôt.

[1] MM. Levi-Civita et Amaldi ont donné cette proposition dans leurs *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, 1re partie, p. 307-309.

Indiquons que l'étude du problème de l'extinction des mouvements internes d'une masse fluide visqueuse nous avait également conduit à ce théorème sans avoir eu connaissance de la démonstration de MM. Lévi-Civita et Amaldi.

Dans l'équation précédente, la valeur de ϖ_h est homogène par rapport aux dérivées a'_k des paramètres de position, et il en est de même de $\frac{\partial \Theta}{\partial T_h}$ par rapport aux dérivées des coordonnées x'_i; cette équation n'est donc pas modifiée par une transformation arbitraire $t = \varphi(\tau)$ effectuée sur le paramètre t servant à définir le temps.

Les systèmes de référence S_0, invariablement liés entre eux, sont en nombre infini; leur ensemble est le *solide de référence principal* du système matériel considéré.

5. — La notion de solide de référence principal est essentielle. C'est à elle qu'il faudra toujours revenir pour donner aux grandeurs et aux lois de la Mécanique un sens intrinsèque. De plus, grâce à l'introduction de ce solide, on verra s'unifier en un énoncé synthétique des principes qui paraissaient autrefois n'avoir aucun lien entre eux.

Ainsi, on sera sans doute surpris d'apprendre que le principe de Newton de l'action et de la réaction et le principe dit de la composition des forces, n'expriment pas des propriétés de la matière, ni même des conséquences du concept de force envisagé comme une cause de mouvement, mais bien tout simplement le résultat d'un choix convenable du système de référence.

En faisant, tout d'abord, usage du groupe euclidien, ce qui permet d'utiliser le langage de la Mécanique classique, M. Le Roux obtient, en effet, ce remarquable et important théorème, tout à fait inattendu:

Quelle que soit la constitution d'un ensemble matériel isolé, quelque désordonné que soit son mouvement, et quel que soit même le paramètre t *jouant le rôle du temps, les mouvements des éléments de cet ensemble, rapporté à son solide principal, semblent dus à des actions mutuelles satisfaisant au principe de l'égalité de l'action et de la réaction* [1].

[1] La démonstration de ce théorème se déduit par un raisonnement élémentaire du fait que le système des vecteurs forces $m_i J_i$ forme, par rapport au solide principal, un système équivalent à zéro.

Pour étendre cette proposition au cas d'un groupe non euclidien, on considérera l'expression

$$\mathcal{X}_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

comme une composante de force.

Les quantités

$$\mathfrak{M}_h = \Sigma \mathcal{X}_i \xi_{hi}$$

sont alors des généralisations (on s'en rend compte aisément) des composantes de la somme géométrique et du moment résultant des forces euclidiennes. M. Le Roux les nomme *moments généralisés* des forces apparentes.

Or on a

$$\frac{dT_h}{dt} = \Sigma \mathcal{X}_i \xi_{hi}\ ^{1}.$$

Cette équation rassemble et généralise les théorèmes généraux de la Mécanique relatifs aux quantités de mouvement et aux moments cinétiques.

Rapportons le mouvement à un système tel que les T_h soient des constantes c_h, on aura

$$\mathfrak{M}_h = 0 .$$

Si nous choisissons en outre les invariants indépendants du groupe utilisé parmi les invariants binaires (distances euclidiennes ou non) ρ_{ij} obtenus en associant deux à deux les éléments de l'ensemble, le travail virtuel des forces apparentes $\delta\mathfrak{T} = \Sigma \mathcal{X}_i \delta x_i$ prend la forme

$$\Sigma P_{ij} \delta \rho_{ij}$$

où $P_{ij}\delta\rho_{ij}$ est interprété comme le travail élémentaire de deux forces égales et opposées P_{ij} et P_{ji}.

Ainsi le travail virtuel total $\delta\mathfrak{T}$ des forces apparentes résulte uniquement d'une *déformation* de l'ensemble.

[1] Equation qui résulte de ce que $\overline{X}_h(T) = 0$.

Les systèmes de référence dans lesquels cette condition est réalisée sont appelés *systèmes à gravitation apparente* [1].

Ces systèmes dépendent, en général, du mode de repérage du temps t. Si, au lieu de t, on prenait une nouvelle variable τ telle que $t = \varphi(\tau)$ on aurait, en effet, $\Theta_h = c_h \varphi'(\tau)$ au lieu de $T_h = c_h$ et $\frac{d\Theta_h}{d\tau} = c_h \varphi''(\tau)$ au lieu de $\frac{dT_h}{dt} = 0$.

Mais si $T_h = c_h = 0$, conditions qui caractérisent le solide de référence principal, $\delta\mathfrak{T}$ est toujours un travail de déformation et les équations $\mathfrak{M}_h = 0$ sont vérifiées quelle que soit la marche du chronomètre adopté.

Les systèmes de référence liés au solide principal sont donc les seuls par rapport auxquels la loi de l'action et de la réaction de Newton est vraie pour un choix arbitraire de la variable mesurant le temps.

§ 2. — *Le principe de la moindre action et la loi de la gravitation.*

Les résultats obtenus jusqu'ici n'expriment aucune loi physique; ils concernent seulement les rapports mathématiques de mouvements absolument quelconques et des systèmes de référence.

La loi de Newton qui affirme la réciprocité des actions mutuelles de deux éléments ne peut être — on vient de le voir — que *relative* à certains systèmes de référence.

Pour présenter un caractère synthétique, et pour être invariante, une loi de gravitation doit faire intervenir toutes les masses de l'Univers et s'exprimer uniquement en fonction des invariants d'un groupe de relativité.

Par une analyse habile, M. Le Roux a tiré du principe de la moindre action la forme invariante générale de la loi de la gravitation.

1. — Postulons l'existence d'une fonction des forces U identique ou analogue au potentiel newtonien.

[1] M. Platrier a démontré que dans de tels systèmes l'énergie d'accélération est minima (*C. R. Ac. d. Sc.*, t. 189, 1929, p. 23).

Si Γ_1 et Γ_2 désignent deux configurations données de l'ensemble, le principe de la moindre action, sous la forme donnée par Jacobi, s'exprime par la condition de minimum:

$$\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \sqrt{2(U+h)} \cdot \sqrt{\Sigma m ds^2} = 0 \qquad \text{(J)}$$

où h est la constante des forces vives.

Substituons à $\Sigma m ds^2$ la forme invariante de différentielles $d\sigma^2 = 2W dt^2$ déduite de l'énergie invariante W en remplaçant les dérivées x_i' par les différentielles dx_i, et prenons pour U un invariant du groupe initial uniquement fonction des distances mutuelles des éléments de l'ensemble; on obtient la forme invariante du principe de la moindre action:

$$\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \sqrt{2(U+h)} \cdot d\sigma = 0 \ . \qquad \text{(I)}$$

Introduisons une variable t, telle que

$$dt^2 = \frac{d\sigma^2}{2(U+h)} \ .$$

Les équations d'Euler qui expriment la condition de minimum [1] prennent alors la forme classique de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i'}\right) = \frac{\partial E}{\partial x_i} \ ,$$

où $E = U + W$ désigne l'énergie totale invariante.

Le paramètre t est le *temps canonique* propre de l'ensemble.

Dans la Mécanique classique le principe de la moindre action se présente comme une conséquence des équations du mouvement, formées au moyen des notions préalables de temps et de force et en admettant l'existence d'une fonction des forces.

Dans la Mécanique invariante c'est le principe de la moindre action, convenablement adapté, qui sert de base pour former les équations du mouvement et définir ensuite les notions de temps et de force.

[1] Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 560.

Il existe entre la forme jacobienne (J) du principe de la moindre action et sa forme invariante (I) une réciprocité importante.

Si le mouvement d'un ensemble est régi par ce principe sous la forme (I), *ce mouvement, rapporté au solide principal de l'ensemble, est également régi par le même principe sous sa forme* (J). La réciproque est vraie.

2. — Cherchons maintenant à appliquer à l'Univers observable les formules théoriques précédentes.

Il convient, tout d'abord, pour que le concept de solide principal ne demeure pas purement théorique, de montrer qu'il est possible, approximativement au moins, de définir le mouvement de ce solide par rapport aux systèmes de référence et au temps de la Mécanique céleste classique.

Pour cela, M. Le Roux a cherché les limites vers lesquelles tendent les paramètres d'entraînement du solide principal, donnés par les équations:

$$\varpi_h = -\frac{\partial \Theta}{\partial T_h},$$

quand on considère des domaines emboîtés de plus en plus vastes de l'Univers stellaire.

Les éléments d'une solution rigoureuse manquent évidemment et ce projet peut paraître bien audacieux.

Pourtant, il suffit d'admettre:

1° que les étoiles éloignées n'ont qu'une vitesse angulaire très faible par rapport aux axes de Copernic — ce que confirme l'observation — et

2° que les moments d'inertie principaux des ensembles matériels contenus dans les domaines considérés croissent indéfiniment,

pour montrer que le Solide principal de l'Univers observable doit être animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à tout système de Galilée.

Or, on sait que dans le champ gravitationnel des corps célestes, le mouvement de tout élément matériel M_i, rapporté

au système d'axes de Copernic et au temps sidéral, obéit, avec une grande approximation, à une équation de la forme:

$$\frac{\overrightarrow{d^2 M_i}}{dt^2} = \overrightarrow{\text{grad}\, U} \; ;$$

où U, fonction des forces apparentes, est maintenant regardé comme un *invariant* ne dépendant que des distances mutuelles des éléments.

D'après ce qui précède, il en est encore de même dans tout système invariablement lié au solide principal.

De plus, en Mécanique rationnelle, on déduit de cette équation générale le théorème des forces vives et la forme jacobienne (J) du principe de la moindre action.

L'équation des forces vives

$$dt^2 = \frac{\Sigma m\, ds^2}{2\,(U + h)}$$

montre que le temps canonique propre de l'Univers observable coïncide *pratiquement* avec le temps sidéral de l'Astronomie.

Mais il importe d'observer que le temps canonique est lié à la configuration de l'Univers, par le facteur statique $(U + h)$, et à la variation de sa configuration, par le facteur différentiel $d\sigma$ [1].

De la validité de la forme jacobienne (J) du principe de la moindre action dans le solide principal on conclut, en vertu du théorème de réciprocité, que le mouvement des astres rapporté à un système de référence arbitrairement mobile est régi par le même principe sous sa forme invariante:

$$\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \sqrt{2\,(U + h)}\, d\sigma = 0 \; . \qquad \text{(I)}$$

[1] Pour reprendre une belle pensée de Bergson, ne nous serait-il pas possible de dire que le temps canonique « transmet, jusqu'à la plus petite parcelle du monde où nous vivons, la durée immanente au tout de l'Univers » ? (Bergson, *L'évolution créatrice*, p. 11).

De ce point de vue la notion de temps canonique universel semblerait donc se prêter à un rapprochement entre la durée réelle des philosophes et le temps mathématique des physiciens.

Telle est la *forme générale de la loi invariante de la gravitation*, donnée en 1931, par M. Le Roux [1].

Il résulte de cette loi que le mouvement d'un élément matériel dépend non seulement des masses et des positions de *tous* les autres éléments de l'Univers, mais encore, de leurs vitesses par le facteur différentiel $d\sigma$.

Le caractère synthétique de ce remarquable résultat répond complètement aux vœux de Mach et de Poincaré [2].

On voit que la loi de la gravitation n'est plus, à proprement parler, une loi de force, mais une loi de mouvement.

La loi de l'attraction universelle de Newton perd son sens physique habituel pour n'apparaître plus que comme une traduction, dans le langage classique, de l'une des formes possibles du mouvement de l'Univers matériel rapporté à son solide principal [3].

§ 3. — *Signification des forces fictives de la théorie des mouvements relatifs.*

On a coutume de regarder l'expérience du pendule de Foucault comme révélant la rotation absolue de la Terre dans l'espace. On conçoit, d'après ce que nous avons vu, que la Mécanique invariante donne à cette expérience un sens très différent.

Déjà, dans *La Science et l'Hypothèse* (p. 138), Poincaré avait insisté sur ce qu'il y a de choquant à dire que la Terre tourne dans l'espace: « S'il n'y a pas d'espace absolu, peut-on tourner sans tourner par rapport à quelque chose et d'autre part, comment pourrions-nous admettre la conclusion de Newton et croire à l'espace absolu ? ».

Pour expliquer les apparences, allons-nous croire à l'existence de l'invisible et mystérieux corps de référence alpha ?

[1] *C. R. Ac. d. sc.*, t. 192, 1931, p. 1439.

[2] Cf. E. Mach, *La Mécanique*, p. 220 à 234, trad. E. Bertrand, introd. de E. Picard.

[3] M. Le Roux a montré que la loi de Newton est impliquée par le principe de la moindre énergie moyenne d'accélération et par une condition nécessaire de stabilité de l'ensemble (*Principes mathématiques de la théorie de la gravitation*, p. 29 et suivantes).

Quelle est donc dans la nouvelle dynamique la signification des forces fictives de la théorie du mouvement relatif ?

Soit S le système d'axes de référence choisi. Désignons par V_x, V_y, V_z les composantes, suivant ces axes, de la vitesse d'un élément de masse m, par rapport au solide principal S_0 de l'Univers; et appelons p, q, r les paramètres d'entraînement, composantes de la rotation instantanée, du mouvement de S par rapport à S_0.

En coordonnées euclidiennes les équations de Lagrange, déduites de la forme (I) du principe de la moindre action, s'écrivent:

$$m_j \left(\frac{dVx_j}{dt} + qVz_j - rVy_f \right) = \frac{\partial U}{\partial x_j} \cdot$$

Ces relations sont identiques *formellement* à celles de la théorie du mouvement relatif de la Mécanique classique. Mais ici les symboles p, q, r ne représentent pas des fonctions données du temps; ce sont des fonctions des *masses*, des *coordonnées* et des *vitesses* par rapport à S, des éléments de l'Univers.

Les forces dites fictives sont donc dues à ces masses et peuvent, dès lors, être interprétées comme des influences extérieures, au même titre, par exemple, que les forces newtoniennes.

Ainsi est obtenu un résultat important, vainement cherché par Mach, qui n'a pas trouvé dans la Mécanique classique les « moyens d'expression nécessaires » [1] pour l'atteindre.

CHAPITRE VI

Valeur théorique et pratique de la Mécanique invariante.

Nous pouvons apprécier maintenant la valeur considérable de la théorie de Le Roux pour la philosophie scientifique.

La possibilité de donner aux lois de la Mécanique des formes générales invariantes dans tous les systèmes de référence arbitrairement mobiles, indépendantes du choix du paramètre

[1] Einstein, *Quatre conférences...*, *loc. cit.*, p. 50.

mesurant le temps et applicables à tous les systèmes de géométrie, euclidiens ou non, confirme définitivement les idées de Poincaré sur la relativité de l'Espace, sur le caractère conventionnel du repérage du Temps et sur l'équivalence théorique de toutes les géométries de Lie.

L'unification des principes fondamentaux, l'interprétation des forces fictives de la théorie du mouvement relatif, ont permis de dissiper les ombres qui, du point de vue philosophique, nuisaient à la Mécanique classique.

Par l'usage des groupes géométriques non euclidiens, la Mécanique invariante constituera enfin un instrument plus souple et plus puissant pour l'explication des phénomènes naturels.

On cherchera probablement un jour à utiliser la loi de la gravitation de Le Roux pour rendre compte des irrégularités des mouvements des corps célestes, telles que les avances inexpliquées des périhélies de Mercure, de Mars ou du nœud de Vénus, *si toutefois ces irrégularités ne sont pas dues à des causes physiques, électriques ou magnétiques, encore inconnues;* question qui n'a pas été encore élucidée [1].

[1] Dans cette recherche des irrégularités des mouvements des périhélies on peut se demander quelle est l'influence du champ magnétique solaire — attribuable en partie au moins aux circulations des charges électriques entraînées par la rotation de l'astre sur lui-même. Soient H la valeur du champ sur l'orbite de la planète étudiée, q sa charge par unité de masse, ω la vitesse angulaire du périhélie. Nous avons établi la relation très simple

$$\omega = 2qH .$$

D'après Newcomb les valeurs des résidus des avances observées sont:

Mercure: 43″ — Vénus: 16″ — Terre: 10″ — Mars: 5″.

Dans l'hypothèse où ces avances résiduelles proviendraient entièrement de l'action du magnétique solaire, la formule précédente donnerait en unités c. g. s.:

$qH = 3{,}1 \,.\, 10^{-14}$ pour Mercure; $1{,}2 \,.\, 10^{-14}$ pour Vénus;
$0{,}7 \,.\, 10^{-14}$ pour la Terre; $0{,}37 \,.\, 10^{-14}$ pour Mars.

Mais ces chiffres conduisent à attribuer aux charges q ou au champ H des valeurs qui paraissent trop grandes.

A ce propos, je remercie M. Tiercy, directeur de l'Observatoire de Genève, et M. Cailliatte, astronome à l'observatoire de Nice, des documents utiles qu'ils m'ont procurés sur ce sujet.

Contentons-nous de noter pour le moment qu'il semble possible de rattacher le concept de solide principal de l'Univers à l'existence d'un éther homogène et isotrope jouant le rôle de l'espace absolu de Newton [1].

Nous voudrions encore prévenir une objection.

La Mécanique invariante indique les méthodes et les relations générales qui doivent permettre de satisfaire le principe de relativité tel que le comprenait Poincaré.

Le problème a été résolu, pour la loi de la gravitation, par M. Le Roux lui-même.

Mais l'intérêt de sa théorie ne saurait se borner là.

Les physiciens doués d'esprit philosophique chercheront sans doute à s'en servir pour donner aux lois naturelles leurs formes intrinsèques.

Or ce résultat ne peut être obtenu qu'à la condition de savoir exprimer les grandeurs physiques, concourant à la production d'un phénomène, en fonction des seules variables dont dépendent la configuration de l'ensemble et sa variation.

On peut donc prévoir que le développement ultérieur de la théorie de Le Roux consistera surtout dans la recherche des invariants physiques appartenant aux divers groupes de relativité.

Si des écarts existent par rapport à la loi invariante, nous devrons avant tout songer à une connaissance incomplète des faits et à la nécessité de recourir à une expérimentation plus précise ou plus expressive.

CONCLUSIONS

M. Le Roux est resté, comme il l'a dit, sur le terrain solide des vérités démontrées. Il serait donc vain d'opposer la Mécanique invariante à une théorie reposant sur des hypothèses physiques.

Mais il est permis de penser que cette nouvelle Mécanique

[1] Une expérience très ingénieuse de M. Esclangon paraît, en effet, avoir révélé un vent d'éther concordant avec le mouvement astronomique de la Terre (cf, *C. R. Paris*, 192). Or, nous savons que ce mouvement peut être, approximativement, considéré comme rapporté au solide principal de l'Univers.

peut se concilier avec la théorie dite semi-einsteinienne de la relativité qui interprète les formules d'Einstein dans le temps et l'espace classiques.

On comprend alors que le recours au solide principal de l'Univers permettrait de revenir à une représentation, fictive il est vrai, des influences mutuelles des masses par des forces apparentes obéissant aux postulats anciens de l'addition des forces et de l'égalité instantanée de l'action et de la réaction. Or ces postulats ne sont, au fond, nous l'avons vu, que des lois de mouvement particulières aux systèmes sans accélération par rapport au solide principal.

Peut-être même trouvera-t-on quelque relation entre ce solide et le milieu fondamental dans lequel se propagent les ondes électromagnétiques et lumineuses.

D'ailleurs les difficultés des interprétations d'Einstein sur le temps relatif et l'espace physique non euclidien[1] ne peuvent pas porter atteinte à la valeur pragmatique des équations relativistes. Un assez grand nombre de physiciens estiment que ces équations — surtout celles de la Relativité restreinte — concordent bien avec les faits connus pour qu'on ait intérêt à les conserver. Il convient alors de rechercher une véritable explication[2] physique de cette réussite et, pour cela, il faut démasquer la réalité cachée sous le symbolisme mathématique[3].

[1] Cf. Pierre Dive, Difficultés dans l'interprétation einsteinienne du temps et de l'espace relatifs. *Enseignement math.*, 1937, nos 1-2.

Sur la Géométrie d'un champ gravifique d'Einstein-Schwarzschild. *Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Clermont-Fd.*, 1937, t. LVII, No 494.

La Géométrie du disque tournant dans la métrique d'Einstein. *C. R. des séances de la Société de Phys. et d'Hist. nat. de Genève*, vol. 54, no 1, janvier-mars 1937; supplément aux *Archives*, 1937.

Sur les temps propres relatifs de la théorie d'Einstein. *C. R. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Clermont-Fd.*, juillet 1937.

[2] Analogue, par exemple, à celle que la Thermodynamique générale trouve dans la théorie des quanta.

[3] Certes, nous ne pouvons pas prétendre atteindre la réalité profonde des choses en son essence même, et nous devrons toujours nous contenter de représentations plus ou moins adéquates à cette réalité. Mais il est certain que ce renoncement ne diminue en rien notre besoin de raisonner sur des concepts clairs, à partir de postulats

Dans ce but, des résultats très intéressants ont été déjà obtenus par M. Varcollier. Ce savant a donné une théorie générale de l'aberration des ondes et des forces qui conduit à retrouver dans le temps et l'espace ordinaires, donc aussi en prenant comme repère le Solide principal de Le Roux, les formules essentielles de la Théorie d'Einstein [1]. L'idée féconde de M. Varcollier consiste à associer à chaque milieu dans lequel se propagent des ondes une équation de la forme:

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} = 0$$

appelée *ondulation élémentaire.* Le premier membre est une forme quadratique des dx^{μ} qui peut être regardée comme un ds^2 d'Espace-temps fictif, susceptible de donner lieu aux mêmes développements analytiques que les ds^2 d'Univers d'Einstein. On pressent donc par là que la théorie de M. Varcollier ne doit rien négliger des travaux mathématiques suscités par l'interprétation relativiste. En particulier, il n'est pas impossible que les géométries de Riemann et de Weyl, et la belle généralisation qu'en a donné M. Elie Cartan par la considération si profonde des espaces à torsion [2], trouvent dans cette théorie, comme dans celle d'Einstein, un vaste champ d'applications.

Saint-Julien-en-Genevois, octobre 1936.

ou d'hypothèses nettement exprimés. Une théorie ne saurait satisfaire pleinement l'esprit qu'à la condition de *sauver* * les lois de notre entendement en même temps que les phénomènes qui nous sont extérieurs. Comme l'a si justement écrit M. Varcollier: « Notre intelligence évite instinctivement de raisonner sur des objets qu'elle ne puisse clairement se figurer. Peut-être est-il dangereux de l'en détourner ».

[1] H. VARCOLLIER, *La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques*, Paris, 1925.

[2] Elie CARTAN, Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ. *Actualités scientifiques et industrielles*, XLIV, Paris, 1932.
Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. *Cahiers scientifiques*, fasc. XVII, 1937.

* Σώζειν τά φαινόμενα, sauver les phénomènes, locution due à Platon.