

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 19 (1937)

Artikel: Remarque sur les effets de polarisation pour l'électron de Dirac
Autor: Wannier, Grégoire
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741812>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

REMARQUE
SUR
LES EFFETS DE POLARISATION
POUR L'ÉLECTRON DE DIRAC

PAR

Grégoire WANNIER

Nous déduisons, par des méthodes d'algèbre spinorielle, quelques propriétés générales de certains processus électroniques. Nous prouvons, par exemple, que ni la diffraction de la lumière, ni la « Bremsstrahlung » ne dépendent du spin de l'électron. De même, la création d'une paire par un électron ne dépend pas du spin de celui-ci, si on peut négliger les effets d'échange.

Si nous soumettons un électron à l'influence de deux perturbations, dont les potentiels vecteurs A (avec $A_0 =$ potentiel scalaire) et B sont donnés par¹

$$\begin{aligned} A &= \sum_n K_n \varkappa_n e^{i(k_n, x)} \\ B &= \sum_m P_m \pi_m e^{i(p_m, x)} \end{aligned} \quad (1)$$

le processus du second ordre dû aux deux perturbations a comme élément de matrice l'expression suivante:

$$M = \text{const. } g_0 \left\{ u^*(g) \cdot \gamma_0 \cdot P \cdot K(l) \cdot Q \cdot u(g) \right\} \quad (2)$$

avec

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\varkappa^*, \gamma) K(l-p) (\pi^*, \gamma)}{R(l-p)} + \frac{(\pi^*, \gamma) K(l-k) (\varkappa^*, \gamma)}{R(l-k)} \\ Q &= \frac{(\pi, \gamma) K(l-p) (\varkappa, \gamma)}{R(l-p)} + \frac{(\varkappa, \gamma) K(l-k) (\pi, \gamma)}{R(l-k)} \end{aligned} \quad (3)$$

¹ La signification des lettres est discutée ici très brièvement, parce qu'elle est essentiellement la même que dans E. C. G. STUECKELBERG, *Ann. Phys.*, 21, 1934, 367.

Dans tout ce travail, (π, γ) représente le produit intérieur de deux quadrivecteurs π et γ ; g l'impulsion initiale de l'électron et l son impulsion finale; γ est formé à partir des matrices de Dirac de la manière suivante:

$$\gamma = (\beta \alpha_1, \beta \alpha_2, \beta \alpha_3, \beta) . \quad (4)$$

Les lettres $\pi, \kappa, g, l, p, q, k$, etc., représentent donc toutes des quadrivecteurs.

Les autres expressions employées signifient

$$\begin{aligned} H(q) &= (q, \gamma) + C & C &= \frac{mc}{\hbar} \\ K(q) &= -(q, \gamma) + C & & \\ \Psi(q, x) &= u(q) \cdot e^{\frac{i(q, x)}{\hbar}} & & \\ R(q) &= (q, q) + C^2 , & & \end{aligned} \quad (5)$$

ce qui a comme conséquences

$$\begin{aligned} (A, \gamma)(B, \gamma) + (B, \gamma)(A, \gamma) &= -2(A, B) \\ K(q)(A, \gamma) - (A, \gamma)H(q) &= -2(A, q) \\ H(q)(A, \gamma) - (A, \gamma)K(q) &= -2(A, q) \quad (6) \\ H(q)K(q) &= R(q) \\ H(q)u(q) &= 0 \quad u^* \gamma_0 H(q) = 0 . \end{aligned}$$

* * *

Pour évaluer l'expression (2), il existe deux méthodes. La première, qui est la plus habituelle, consiste à former la moyenne des deux spins de l'électron. On introduit dans ce cas des opérateurs $V(g)$ détruisant les états d'énergie négative et on forme la trace de l'opérateur ainsi obtenu¹; l'opérateur $V(g)$ est

$$V(g) = K(g) \frac{\gamma_0}{2g_0}$$

ce qui donne pour (2)

$$M = \frac{1}{4} \text{Trace} [P K(l) Q K(g)] . \quad (7)$$

¹ G. WANNIER, *Helv. Phys.*, **8**, 1935, 665.

Une seconde méthode a été indiquée par E. C. G. Stueckelberg dans un travail récent¹. Elle consiste à transformer l'expression $PK(l)Q$ de façon à la rendre linéaire en γ ; alors on peut immédiatement substituer

$$\{ u^*(g) \gamma_0 \gamma u(g) \} = \frac{g}{g_0} . \quad (8)$$

Cette méthode n'est pas toujours applicable, mais si elle l'est, elle nous apprend que l'effet considéré ne dépend pas du spin de l'électron. Nous allons prouver maintenant en toute généralité que *l'effet de toute perturbation dont la polarisation est réelle ne dépend pas du spin.*

En effet $PK(l)Q$ est dans ce cas une somme de termes de la forme

$$F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 + F_7 F_6 F_5 F_4 F_3 F_2 F_1 \quad (9)$$

où les F sont des expressions linéaires ou de degré 0 en γ . En plus, les expressions (κ, γ) et (π, γ) apparaissent deux fois chacune, occupant les places 1, 3, 5, 7. Si les expressions aux places 3 et 5 sont les mêmes, par exemple (κ, γ) , nous pouvons les transporter l'une vers l'autre par les relations de commutation (6). Dans les autres cas, il faut, par exemple, transporter de 5 à 1. Toutes les expressions intermédiaires, de même que l'expression finale, sont alors du degré 5 ou moindre en γ . En plus, si nous effectuons nos commutations d'une manière symétrique pour les deux termes de (9), nous trouvons une somme d'expressions

$$F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 + F_5 F_4 F_3 F_2 F_1$$

qui contiennent toutes encore deux facteurs (π, γ) ou (κ, γ) , ce qui permet de les ramener au troisième degré par le même procédé. Il y a là toutefois une exception, résultant de la permutation nécessaire de (π, γ) avec (κ, γ) ; ce terme a la forme

$$- 2(\pi, \kappa)(\pi, \gamma)(k, \gamma) H(l)(p, \gamma)(\kappa, \gamma) + \text{sym}$$

¹ E.-C.-G. STUECKELBERG, *loc. cit.*

ou aussi en vertu de $l = g + p + k$

$$\begin{aligned} & 2(\pi, \alpha) \cdot (\pi, \gamma) (k, k) (p, \gamma) (\alpha, \gamma) + \text{sym} \\ & + 2(\pi, \alpha) \cdot (\pi, \gamma) (k, \gamma) (p, p) (\alpha, \gamma) + \text{sym} \\ & - 2(\pi, \alpha) \cdot (\pi, \gamma) (k, \gamma) H(g) (p, \gamma) (\alpha, \gamma) + \text{sym}. \end{aligned}$$

Pour réduire le dernier terme, nous y permutoons $H(g)$ avec (p, γ) et (α, γ) ; tous les termes intermédiaires sont du troisième degré en γ et l'expression finale est nulle à cause de (6) (dernière ligne). Donc l'expression est une somme de termes du troisième degré au plus, qui ont tous la forme

$$F_1 F_2 F_3 + F_3 F_2 F_1.$$

Mais en vertu de la relation

$$\begin{aligned} & (A, \gamma) (B, \gamma) (C, \gamma) + (C, \gamma) (B, \gamma) (A, \gamma) = \\ & - (A, B) (C, \gamma) - 2(B, C) (A, \gamma) + 2(A, C) (B, \gamma) \quad (10) \end{aligned}$$

une telle expression est linéaire, c. q. f. d.

* * *

Ceci ne sera plus vrai si une des deux polarisations devient complexe. Mais nous allons montrer que *si on prend la moyenne des deux spins, l'élément de matrice du processus peut être formé comme si α était réel, pourvu qu'on effectue finalement la substitution*

$$\begin{aligned} & (\alpha, A) (\alpha, B) \longrightarrow (\alpha^*, A) (\alpha, B) + (\alpha^*, B) (\alpha, A) \\ & (\alpha, \alpha) \longrightarrow (\alpha^*, \alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

Pour ceci, nous avons besoin de la formule

$$\text{Trace} [F_1 F_2 F_3 \dots F_n] = \text{Trace} [F_n F_{n-1} \dots F_2 F_1], \quad (12)$$

où les F sont des expressions linéaires quelconques en γ .

Nous allons prouver ce résultat par récurrence, car il est sans doute vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons qu'il soit juste pour $n = m - 1$; alors, pour $n = m$, il ne faut le prouver que pour les termes

$$(A_1, \gamma) (A_2, \gamma) \dots (A_m, \gamma).$$

Si m est impair, la trace est nulle et la relation est vérifiée, si m est pair, on peut écrire par permutations successives

$$(A_1, \gamma) (A_2, \gamma) \dots (A_m, \gamma) + (A_2, \gamma) (A_3, \gamma) \dots (A_m, \gamma) (A_1, \gamma) \\ = \text{expression de degré } m - 2 \text{ en } \gamma .$$

Le second terme du premier membre a la même trace que le premier, parce qu'une trace est évidemment invariante par rapport à une permutation cyclique des facteurs. Donc la trace à effectuer se trouve réduite à la trace d'une expression de degré $m - 2$; mais pour celle-ci, le renversement des facteurs est permis par hypothèse; c. q. f. d.

Si nous développons maintenant notre expression (7) pour $\alpha = \lambda + i\mu$ et π réel, nous trouvons qu'il n'y reste que les termes contenant deux fois λ ou deux fois μ . Tous les autres disparaissent en vertu de la formule (12) que nous venons de prouver, par exemple:

$$+ i(\lambda, \gamma) K(l-p)(\pi, \gamma) K(l)(\pi, \gamma) K(l-p)(\mu, \gamma) K(g) \\ - i(\mu, \gamma) K(l-p)(\pi, \gamma) K(l)(\pi, \gamma) K(l-p)(\lambda, \gamma) K(g) ,$$

ce qui est de la forme désirée après une permutation cyclique.

Les termes qui subsistent donnent maintenant évidemment la même trace que si α était réel et la somme des termes en λ et en μ s'obtient par les substitutions (11).

Pour deux polarisations complexes, la situation est malheureusement tout à fait différente; car on trouve dans ce cas des termes mixtes non nuls.

* * *

Le premier des résultats obtenus s'applique immédiatement à la formule de Klein-Nishina, à la « Bremsstrahlung » de l'électron, etc., et nous apprend que l'effet considéré ne dépend pas du spin; mais il faut toutefois faire la restriction que le spin dans l'état final est bien une fonction du spin dans l'état initial.

On peut appliquer le second résultat à l'effet de la lumière polarisée circulairement; elle agit sur le spin d'après notre résultat, mais après avoir formé la moyenne des deux spins, son effet est le même que celui de la lumière ordinaire. Il existe

cependant une application plus intéressante. On peut montrer¹ que le champ d'un électron créant une paire² est encore de la forme (1) si l'on néglige les effets d'échange, seulement il faut remplacer la polarisation α par l'expression $(v_{\text{final}}^* \gamma_0 \gamma' v_{\text{init.}})$, où v est la partie spinorielle de la fonction ψ et γ' le vecteur (4) de Dirac pour cet électron. Pour former la trace par rapport à l'électron d'énergie négative, on peut considérer α comme un nombre, même réel en vertu de notre second résultat; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{R^2(g+p)} \left\{ -\frac{1}{2} (\pi, \pi) (\alpha, \alpha) [R(g+p) R(g+k) - (p, p)(k, k)] \right. \\
 &\quad + 2(\alpha, \alpha) (\pi, g) (\pi, g+p) (k, k) + 2(\pi, \pi) (\alpha, l) \cdot \quad (12) \\
 &\quad \left. (\alpha, g+p) (\pi, \pi) + 8(\pi, g) (\pi, g+p) (\alpha, l) (\alpha, g+p) \right\} \\
 &+ \frac{1}{R^2(g+k)} \left\{ -\frac{1}{2} (\pi, \pi) (\alpha, \alpha) [R(g+p) R(g+k) - (p, p)(k, k)] \right. \\
 &\quad + 2(\pi, \pi) (\alpha, g) (\alpha, g+k) (p, p) + 2(\alpha, \alpha) (\pi, l) \cdot \\
 &\quad \left. (\pi, g+k) (k, k) + 8(\pi, l) (\pi, g+k) (\alpha, g) (\alpha, g+k) \right\} \\
 &+ \frac{2}{R(g+p) R(g+k)} \left\{ \left(-\frac{1}{2} (\pi, \pi) (\alpha, \alpha) + (\pi, \alpha)^2 \right) \right. \\
 &\quad [R(g+p) R(g+k) - (p, p)(k, k)] \\
 &\quad + 2(\pi, \alpha) [(\pi, p) (\alpha, p) (k, k) + (\pi, \alpha) (\alpha, k) (p, p)] \\
 &\quad + (\alpha, \alpha) [2(\pi, g) (\pi, l) (k, k) + (\pi, p) (\pi, k) (k, k) \\
 &\quad + 2(\pi, p) (\pi, k) (p, k) - (\pi, \alpha)^2 (p, p)] \\
 &\quad + (\pi, \pi) [2(\alpha, g) (\alpha, l) (p, p) + (\alpha, k) (\alpha, p) (p, p) \\
 &\quad + 2(\alpha, k) (\alpha, p) (p, k) - (\alpha, p)^2 (k, k)] \\
 &\quad + 8(\pi, l) (\pi, g) (\alpha, l) (\alpha, g) + 4(\pi, p) (\pi, k) (\alpha, l) (\alpha, g) \\
 &\quad \left. + 4(\pi, l) (\pi, g) (\alpha, p) (\alpha, k) \right\} \\
 &- \frac{4}{R(g+p)} (\pi, \alpha) \{ (\pi, g+p) (\alpha, g+p) + (\pi, g) (\alpha, l) \} \\
 &- \frac{4}{R(g+k)} (\pi, \alpha) \{ (\pi, g+k) (\alpha, g+k) + (\pi, l) (\alpha, g) \}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

¹ Voir, par exemple, E. C. G. STUECKELBERG, *C. R. Soc. de phys. et des Sc. nat. de Genève*, 54, 47 (1937); et, du même auteur, un article à paraître au *Mémorial des Sciences physiques*, chez Gauthier-Villars, à Paris.

² Voir, par exemple, E. C. G. STUECKELBERG, *Helv. Phys. Acta*, 8, 326 (1935).

Dans cette expression il faut faire maintenant les substitutions (10) et considérer α comme élément de matrice. De ce point de vue, (12) consiste en une somme de termes

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \left\{ v_{in}^* \gamma_0 \gamma A v_{fin} \right\} \left\{ v_{fin}^* \gamma_0 \gamma B v_{in} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left\{ v_{in}^* \gamma_0 \gamma A v_{fin} \right\}, \left\{ v_{fin}^* \gamma_0 \gamma A v_{in} \right\} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ou

$$\left. \left(\left\{ v_{in}^* \gamma_0 \gamma v_{fin} \right\}, \left\{ v_{fin}^* \gamma_0 \gamma v_{in} \right\} \right) \right\}.$$

Il nous faut sommer ensuite cette expression sur tous les états finaux possibles, donc aussi sur les deux spins. Nous effectuons ceci par notre opérateur détruisant les états d'énergie négative, ce qui nous laisse

$$\left\{ v_{in}^* \gamma_0 [(\gamma, A) K(l) \cdot (\gamma, B) + (\gamma, B) \cdot K(l) \cdot (\gamma, A)] v_{in} \right\} \quad (15)$$

ou

$$\left\{ v_{in}^* \gamma_0 (\gamma, K(l) \gamma) v_{in} \right\}. \quad (13b)$$

Les deux expressions sont linéaires en γ en vertu de (10); donc *dans la création de paires d'électrons par des électrons, le spin de ces derniers n'intervient pas*, si on néglige les effets d'échange.

La contribution étudiée récemment par Racah¹ où l'électron créant la paire est perturbé en seconde approximation et l'électron d'énergie négative en première, est aussi indépendante du spin.

On peut se demander dans le premier cas s'il est possible de linéariser (13), après avoir substitué la première formule (14) dans (3). On peut voir facilement que la preuve donnée plus haut peut être généralisée pour ce cas. La formule principale, dont il faut se servir pour cette preuve, est

$$\begin{aligned} & (P, \gamma) (A_1, \gamma) (A_2, \gamma) \dots (A_n, \gamma) (Q, \gamma) \\ & + (Q, \gamma) (A_1, \gamma) (A_2, \gamma) \dots (A_n, \gamma) (P, \gamma) = \text{expression de degré } n \text{ en } \gamma. \end{aligned}$$

¹ G. RACAH, *Nature*, **136**, 1935, 393.

L'évaluation de (15) nous donne maintenant ce qui remplace la polarisation κ dans (13). Nous trouvons

$$\begin{aligned} (\kappa, A)(\kappa, B) &\longrightarrow \frac{1}{2P_0Q_0} [(A, P)(B, Q) + (A, Q)(B, P) \\ &\quad - (A, B)(P, Q) + C^2] \end{aligned} \quad (16)$$

$$(\kappa, \kappa) \longrightarrow -\frac{2C^2 + (P, Q)}{P_0Q_0}$$

où P est l'impulsion initiale de l'électron et Q son impulsion finale. Si ces deux grandeurs sont très considérables par rapport à leur différence k , on retombe sur l'expression habituelle (voir référence ¹); comme il est bien connu que ce cas donne la plus grande contribution à la section efficace, l'ordre de grandeur de celle-ci ne changera pas pour les raisons considérées ici.

* * *

Je me suis efforcé d'intégrer l'expression différentielle de la section efficace (donnée essentiellement par M (2) et (12)), avec le concours aimable de Mme G. Stoll et de M. J. Ruffet, mais nous avons abandonné ce travail, parce que ce résultat sera publié bientôt par G. Racah.

Je ne voudrais pas manquer de remercier M. le professeur E. C. G. Stueckelberg, qui m'a proposé le problème, et dont la compétence et la bienveillante assistance sont pour beaucoup dans ces réflexions.

*Institut de Physique,
Université de Genève.*

¹ Voir, par exemple, E. C. G. STUECKELBERG, *Helv. Phys. Acta*, 8, 326 (1935).