Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 18 (1936)

Artikel: Relations entre les grandeurs spinorielles et cliffordiennes
Autor: Mercier, André
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743104

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Séance du 18 juin 1936.

André Mercier. — *Relations entre les grandeurs spinorielles et cliffordiennes.*

G. Juvet et A. Schidlof [1] ont écrit l'équation de Dirac et son associée sous les formes cliffordiennes

$$\nabla\!\!\!\rightarrow \psi + \alpha\psi = 0 \,, \qquad \psi' \leftarrow\!\!\!\nabla + \psi'\alpha = 0 \,, \tag{1}$$

où ψ et ψ' sont des fonctions d'onde associées l'une à l'autre; α est une constante scalaire. Ils en déduisent la loi de conservation qu'on peut écrire

$$\oint \psi' \, d\Sigma \, \psi = 0 \tag{2}$$

où $d\Sigma$ est l'élément d'hypersurface. Si l'interprétation physique ordinaire est valable, le produit $\psi'\psi$ doit être un invariant, puisqu'il revêt le caractère d'une probabilité. Or on n'est pas assuré *a priori* que le produit d'un ψ solution de l'équation de Dirac par un ψ' solution de l'équation associée est invariant, ψ et ψ' étant deux nombres de Clifford. Si l'on se donne, d'ailleurs, un nombre de Clifford C arbitraire, il n'est pas possible de définir d'*une manière simple* un autre C′ de manière que le produit C′C soit scalaire (c'est aisé par exemple lorsque C est du type d'un quaternion).

On peut, même en conservant l'opérateur $\nabla\!\!\!\rightarrow$ qui est un opérateur de Clifford, remplacer le caractère cliffordien de ψ par un caractère spinoriel, tout en laissant sa forme à l'équation. Pour cela, indiquons qu'on peut mettre les nombres de Clifford sous forme de matrices carrées. Le moyen d'y arriver est fourni par des calculs indiqués par M. Cartan [2] au sujet de la représentation spinorielle du groupe des rotations dans un espace $E_n^{(\gamma)}$

[1] G. Juvet et A. Schidlof, Bull. Soc. neuch. Sc. nat., **57,** 127, 1933.

[2] E. Cartan, Cours professé à la faculté des Sciences de Paris en 1935/36.

où il définit une certaine forme quadratique χ. Passons de cette forme quadratique χ à une autre q égale à une somme de carrés qui corresponde à la définition des nombres de Clifford. Voici brièvement comment on obtient ceux-ci: à chaque vecteur $\vec{\Xi}$, dans $E_n^{(\chi)}$, Cartan associe une certaine matrice carrée Ξ dont la structure correspond à la forme quadratique χ; elle devient X (associée à $\vec{X}$) pour la forme q. Or Ξ jouit de la propriété qu'étant donnés $\vec{\Xi}$ et $\vec{H}$, on a $2\vec{\Xi} \cdot \vec{H} = \Xi H + H\Xi$. Cette propriété est encore vraie dans le système des $\vec{X}$, de sorte que les matrices particulières attachées aux vecteurs ortho-normaux $\vec{\Gamma}_i$, pris comme base dans l'$E_n^{(q)}$ où l'on définit les nombres de Clifford, satisfont précisément aux relations

$$\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i = 2\,\delta_{ij}$$

qui définissent les unités fondamentales des nombres de Clifford. On peut alors définir ces derniers en formant tout d'abord des combinaisons linéaires quelconques à coefficients réels de ces Γ_i, et tous les produits que l'on peut faire avec ces combinaisons sont des nombres de Clifford. Cette définition est équivalente à celle donnée ailleurs [1].

Dans $E_n^{(\chi)}$, Cartan introduit, à côté des matrices carrées associées aux vecteurs (et celles qui s'en déduisent, associées aux multivecteurs), des matrices σ à une colonne, appelées spineurs, qui, si l'on passe à notre forme q, se transforment en des grandeurs que nous désignerons par s. Aux transposées σ^* des σ correspondent des grandeurs s^*. Désignons par (s), (s^*) et (C) respectivement les classes de ces nombres s, s^* et des nombres de Clifford. Ces nombres ont diverses propriétés. Nous retiendrons les suivantes:

1° Lors des rotations et retournements effectués par des opérateurs R (nombres de Clifford), les nombres de Clifford se transforment selon le schéma

$$C \longrightarrow R C R^{-1}$$

[1] Voir par exemple A. Mercier, Thèse, Genève, 1935.

tandis que les s et les s^* se transforment d'après

$$s \rightarrow \mathrm{R}s\ , \qquad \text{et} \qquad s^* \rightarrow s^*\mathrm{R}^{-1}\ .$$

2° Tous les produits st^* sont des nombres de Clifford, même si t^*, de la classe (s^*), n'est pas associé à s (correspondant au transposé). Cette propriété est conforme à la relation $st^* \rightarrow \mathrm{R}\,st^*\,\mathrm{R}^{-1}$.

3° Tous les produits t^*s sont des invariants, car $t^*s \rightarrow t^*\mathrm{R}\mathrm{R}^{-1}s$.

4° Le nombre $v = \mathrm{C}s$, où s est dans (s) et C dans (C), appartient à (s), tandis que le nombre $w^* = s^*\mathrm{C}$ appartient à (s^*). En effet: $v \rightarrow \mathrm{R}\mathrm{C}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{R}s$, $w^* \rightarrow s^*\mathrm{R}^{-1}\mathrm{R}\mathrm{C}\mathrm{R}^{-1}$.

5° L'inverse à droite d'un s est un t^*, et l'inverse à gauche d'un s^* est un t. Alors $(st^*)^{-1} = t^{*-1}s^{-1} = t_1 s_1^*$, qui est bien un nombre de Clifford.

Des équations telles que

$$\mathrm{C}s = 0 \qquad \text{et} \qquad s^*\mathrm{C} = 0 \tag{3}$$

appartiennent respectivement aux classes (s) et (s^*). Une équation telle que

$$s^*\mathrm{C}s = \mathrm{I}$$

a un sens pourvu que I soit un invariant. On rapproche (3) et (4) de (1) et (2), et l'on voit que la difficulté concernant l'invariance du produit $\psi'\psi$ (en nombres de Clifford) disparaît si l'on convient de faire de ψ et ψ' des nombres de (s) et (s^*). La relation (2) est toujours conséquence de (1), on est sûr que $\psi'\psi = \psi^*\psi$ est scalaire, même si ψ' n'a pas de rapport simple avec ψ.

Dans la forme matricielle, les σ et σ^* ont des coefficients complexes, ils dépendent donc de huit paramètres réels. Nous avons d'ailleurs démontré [1] par une méthode purement cliffordienne que si ψ est dans (C) et non dans (s), il ne dépend effectivement que de huit paramètres réels, ce qui rejoint des calculs donnés par W. Franz [2].

[1] A. Mercier, C. R., **201,** 1320, 1935.

[2] W. Franz, Sitzungsber. d. Bayerischen Akad. der Wiss., 2. nov. 1935.

Jusqu'ici on ne sait pas si tous les produits st^* que l'on obtient avec tous les nombres des classes (s) et (s^*) épuisent les nombres de la classe (C). Si les s (et les t^*) sont des spineurs simples (ou leurs associés), au sens de Cartan, ce n'est pas le cas, car dans la représentation matricielle, un σ simple est une colonne, un τ^* une ligne, ce qui fait $2p$ paramètres alors qu'un C en a p^2, de sorte que si on se donne un nombre de Clifford C on ne peut en général trouver s et t^* tels que $st^* = \mathrm{C}$. Mais en prenant des combinaisons linéaires dans (s) et (s^*):

$$(s_1 + s_2 + \ldots)(t_1^* + t_2^* + \ldots) = s_1 t_1^* + \ldots$$

avec un nombre suffisant de termes, on peut déterminer successivement s_1, t_1, s_2, t_2, ... de manière à égaler le produit à C. Ce procédé est utilisable dans $\mathrm{E}_n^{(q)}$ quelconque. Les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° restent valables pour ces combinaisons linéaires.

R. Wavre. — *Les quatre potentiels logarithmiques d'une circonférence.*

Les potentiels des corps continus sont des intégrales définies dépendant de certains paramètres. Ces paramètres sont les coordonnées du point argument en lequel on calcule le potentiel. Il est alors naturel de donner à ces paramètres l'ensemble de leurs valeurs possibles en y comprenant les valeurs complexes. D'ailleurs, lorsque l'on affirme qu'un potentiel est une fonction analytique en dehors des masses attirantes on entend qu'elle est développable en une série de Taylor des variables x_1, x_2, x_3, coordonnées du point argument; mais l'analyticité ne prend sa pleine signification que lorsque l'on donne à ces variables des valeurs complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1 , \qquad z_2 = x_2 + iy_2 , \qquad z_3 = x_3 + iy_3 .$$

Le point-argument se déplacera donc dans l'espace des trois variables complexes z_1, z_2, z_3.

D'autre part, dans l'étude des potentiels nous nous sommes