

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 18 (1936)

**Artikel:** Sur l'équation des vibrations d'une plaque  
**Autor:** Weinstein, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-743093>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

La maille élémentaire n'est pas rhombique comme Mark et v. Susich l'avaient indiqué, mais faiblement monoclinique. Les dimensions sont les suivantes:

$$\begin{aligned}a &= 8,54 \text{ \AA} \\b &= 8,20 \text{ \AA} \text{ (axe de la fibre)} \\c &= 12,65 \text{ \AA} \\\beta &= 83^\circ\end{aligned}$$

Ces valeurs ont été obtenues au moyen d'un diagramme de référence, sur une préparation épaisse de 0,2 mm, et recouverte d'une trace de chlorure de sodium comme substance de comparaison. Elles sont exactes à 0,5% près.

Nous avons déterminé la densité du caoutchouc sur un morceau cristallisé fortement étiré à 0° C. En se basant sur le chiffre trouvé  $\delta = 0,965$ , on obtient 7,6 pour le nombre de radicaux isoprène dans la maille élémentaire. La densité du caoutchouc amorphe est de 0,93 selon les travaux de divers auteurs. Si l'on suppose que le caoutchouc, en tant qu'hydrocarbure, montre, lors de la cristallisation, une augmentation de densité semblable à celle des paraffines à longue chaîne, c'est-à-dire environ 10%, le nombre  $z$  se rapprocherait de 8.

La statistique des interférences constatées, ainsi que les extinctions observées, permettent avec une certaine probabilité de classer le caoutchouc dans le groupe spatial  $C_{2h}^5$ . Ce dernier possède des hélicogyres digonaux selon  $b$  et des plans de symétrie de glissement selon  $c$ . Ces éléments de symétrie permettent d'admettre un arrangement semblable à celui proposé par Mark et v. Susich pour les chaînes à valences principales du caoutchouc.

**A. Weinstein. — Sur l'équation des vibrations d'une plaque.**

Considérons l'intégration de l'équation qui se présente dans le problème des vibrations d'une plaque encastrée:

$$\Delta\Delta\omega - \lambda\omega = 0 \quad (1)$$

valable dans le carré S:  $|x| \leq \pi/2$ ,  $|y| \leq \pi/2$ , avec les conditions aux limites

$$\omega = 0, \quad d\omega/dn = 0 \quad (2)$$

sur la frontière C de S. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  les valeurs caractéristiques de ce problème, rangées par ordre de grandeur et en tenant compte de leurs multiplicités. On sait que<sup>1</sup>

$$\lambda_n \geq \omega_n^2 \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

où  $\omega_1, \omega_2, \dots$  désignent les valeurs caractéristiques de l'équation classique pour les vibrations d'une membrane:

$$\Delta u + \omega u = 0 \quad \text{dans } S, \quad u = 0 \quad \text{sur } C, \quad (4)$$

On a

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 5, \quad \omega_3 = 5, \quad \omega_4 = 8, \dots \quad (5)$$

Un procédé que j'ai indiqué récemment<sup>2</sup> donne l'inégalité

$$13.29 < \lambda_1 < 13.37. \quad (6)$$

On déduit aisément de (3), (5) et (6) que *l'ordre de multiplicité de  $\lambda_1$  est égal à un*.

Nous nous proposons de développer un procédé permettant d'établir des inégalités pour  $\lambda_2$ .

Soit AB le segment  $x = 0, |y| \leq \pi/2$ , qui partage S en deux rectangles  $S^+(x > 0)$  et  $S^-(x < 0)$ . Considérons la première fonction caractéristique  $\omega^+ = \omega_1^+$  du problème suivant:

$$\Delta \Delta \omega^+ - \lambda^+ \omega^+ = 0 \quad \text{dans } S^+, \quad (7)$$

$$\omega^+ = 0 \quad \text{sur } AB, \quad (8)$$

$$\omega^+ = 0 \quad \text{et} \quad d\omega^+/dn = 0 \quad (9)$$

sur les trois autres segments de la frontière  $C^+$  de  $S^+$ . Soit  $\lambda_1^+$  la valeur correspondante de  $\lambda^+$ . On obtient par la méthode de Ritz  $\lambda_1^+ < 52.26$ . Posons  $\omega_2(x, y) = \omega_1^+(x, y)$  dans  $S^+$  et  $= \omega_1^+(-x, y)$  dans  $S^-$ . Soit  $\omega_3(x, y) = \omega_2(y, x)$ . Il est aisément démontré que  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont deux fonctions carac-

<sup>1</sup> R. COURANT, Math. Zeitschrift, 15, 1922, p. 195.

<sup>2</sup> A. WEINSTEIN, C. R. Paris, 200, 1935, p. 107; Journ. London Math. Soc., 10, 1935, p. 184; Proc. Cambridge Phil. Soc., 32, 1936, p. 96; S. TOMOTIKA. Aeron. Institute, Tôkyô Imp. University, n° 129, 1935, p. 299.

téristiques *indépendantes* du problème (1). Ces fonctions correspondent à  $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^+$ . On a

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 52.26 < \lambda_4 .$$

Par conséquent l'ordre de multiplicité de  $\lambda_2$  est égal à *deux*.

Pour trouver une limite inférieure pour  $\lambda_2$  nous allons considérer le problème suivant: Déterminer la plus petite valeur caractéristique  $\varphi = \varphi_1$  de l'équation

$$\Delta \Delta \varphi - \varphi \varphi = 0 \quad \text{dans } S^+ \quad (10)$$

avec les conditions

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } C^+, \quad \int \int_{S^+} p(x, y) \Delta \varphi \, dx \, dy = 0 \quad (11)$$

où  $p$  désigne la fonction

$$\frac{\cos h 2y \sin 2x}{\cos h \pi} + \frac{\sin h x \cos y}{\sin h \frac{\pi}{2}} .$$

On aura  $\varphi_1 \leq \lambda_1^+ = \lambda_2$ . La méthode que j'ai indiquée, *l. c. 2*, permet de donner une expression *explicite* pour la première fonction caractéristique  $\varphi_1$  de ce problème, ainsi que de calculer la valeur correspondante de  $\varphi_1$ . On obtient  $\varphi_1 > 50$ . Par conséquent on a les inégalités

$$50 < \lambda_2 < 52.26 . \quad (12)$$

Je me propose de donner prochainement les démonstrations de ces résultats et d'étendre la méthode au calcul de  $\lambda_4, \lambda_5, \dots$

**Ernest C. G. Stueckelberg.** — *Radioactivité  $\gamma$  avec un spectre continu. Essai d'une nouvelle théorie unitaire du champ.*

Le fait que des électrons positifs et négatifs peuvent se recombiner en produisant un quantum de lumière nous permet de prévoir une nouvelle espèce de radioactivité. La théorie de Dirac d'une part, de nombreuses expériences d'autre part, ont prouvé la réalité de cette « recombinaison ».