

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 17 (1935)

Artikel: Sur la démonstration donnée par Schläfli de la formule de Schwarz-Christoffel
Autor: Weinstein, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741658>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le roentgénogramme que nous avons obtenu a été comparé et trouvé identique avec le diagramme de la chitine animale. Il en résulte que la structure, c'est-à-dire l'arrangement des atomes dans les cristallites, ainsi que la texture, c'est-à-dire l'orientation de ces cristallites, sont les mêmes dans les deux substances.

Ainsi on trouve le fait intéressant que les deux matériaux de construction de la nature, la chitine animale et végétale, malgré une constitution assez compliquée, sont identiques. On se rappelle qu'une pareille identité a été trouvée pour la cellulose végétale et la cellulose animale (tunicine).

A. Weinstein. — *Sur la démonstration donnée par Schläfli de la formule de Schwarz-Christoffel.*

Pendant les Conférences internationales de Mathématiques organisées par l'Université de Genève il a été souvent question de la *méthode de continuité*. Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que cette méthode si féconde a été introduite dans l'Analyse par le mathématicien suisse Schläfli. En effet, Schläfli a appliqué ce procédé dès 1874 ¹ au problème suivant.

La formule de Schwarz-Christoffel

$$z = M \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{-\beta_2} \dots \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right)^{-\beta_n} d\zeta, \quad \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} = M \quad (1)$$

$$\left(\text{où } M > 0, \quad \zeta_k = e^{i\sigma_k}, \quad |\beta_k| < 1, \quad \sum_1^n \beta_k = 2 \right)$$

donne la représentation conforme du cercle $|\zeta| < 1$ sur un polygone aux angles extérieurs $\beta_k \pi$. Le point $\zeta = 0$ correspond au point $z = 0$ à l'intérieur du polygone.

Problème. — Déterminer les paramètres $M, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ de manière à obtenir dans le plan z un polygone à sommets $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ donnés.

¹ Journal für Mathematik, 78 (1874), p. 63.

La méthode classique de continuité déduit la solution de ce problème des propositions suivantes.

1. *Le déterminant de Schläfli*

$$\frac{D(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}{D(M, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})}$$

est différent de zéro. Ce résultat a été démontré par Schläfli au moyen de calculs très ingénieux. Une nouvelle démonstration a été donnée il y a quelques années ¹.

2. *Existence de limitations a priori.* — On peut affirmer que les grandeurs $M, |\sigma_{k+1} - \sigma_k|$ ($k = 1, \dots, n - 1$) restent entre certaines limites positives lorsqu'on se donne des limites pour les valeurs (x_k, y_k) . Cette question a fait l'objet de plusieurs travaux (voir l. c. ²). Nous nous proposons de donner une nouvelle variante de la démonstration de ce théorème en ce qui concerne le paramètre M . Nous allons mettre en évidence que *les bornes de M sont positives, si la plus petite et la plus grande distance du point $z = 0$ au contour du polygone restent comprises entre deux valeurs positives.* Cette démonstration permettra d'expliquer un fait paradoxal en apparence.

Faisons varier les (x_k, y_k) en admettant que le point $z = 0$ reste toujours à distance finie et positive de chaque point du contour. Le seul cas qui exige une démonstration de l'existence des bornes pour M est le suivant: Soit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ ($2 \leq p \leq n$) un groupe de paramètres tel que la borne inférieure de $|\sigma_p - \sigma_1|$ soit 0. Considérons un point variable $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$ restant toujours à distance angulaire finie (non inférieure, par exemple, à π/n) des points ζ_k , ($k = 1, \dots, n$). La distance du point z_0 , image de ζ_0 au point $z = 0$ sera donnée, d'après (1), par $|z_0| = M \left| \int_0^{\zeta_0} \right|$.

Or il est évident que $\left| \int_0^{\zeta_0} \right|$ et $|z_0|$ possèdent des bornes positives. Par conséquent M restera aussi compris entre deux limites positives, q.e.d.

¹ A. WEINSTEIN, Mathematische Zeitschrift, 21 (1924), p. 72.

Cette démonstration tomberait en défaut pour la formule de Schwarz donnant la représentation conforme d'un *demi-plan* sur un polygone. Prenons comme exemple les rectangles donnés par la formule

$$z = M \int_0^v \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(\rho - \varepsilon)(\rho - 2\varepsilon)(\rho - 3\varepsilon)}} \quad (2)$$

($\text{Im} \rho \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$) .

Posons $\rho = \varepsilon \omega$, $M = \varepsilon$. On obtient alors la formule

$$z = \int_0^{\varepsilon \omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)(\omega - 3)}} \quad (2')$$

qui donne la représentation conforme du demi-plan sur un rectangle non dégénéré pour des valeurs arbitrairement petites de $\varepsilon = M$. Nous pouvons facilement expliquer cette contradiction apparente avec notre résultat précédent: D'après (2) le point $z = 0$ se trouve sur le contour du polygone, tandis que d'après la formule (1) il se trouve à l'intérieur du domaine. Il est donc plus avantageux de se servir de la formule (1) pour achever la démonstration de Schläfli.
