A. Putnis. — *Sur le théorème de Stokes pour les ellipsoïdes hétérogènes en rotation permanente.*

Le théorème de Stokes s'énonce ainsi: le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre est entièrement déterminé par des éléments stokiens: la surface libre, la vitesse angulaire ω et la masse totale M de l'astre.

Stokes et Poincaré ont démontré ce théorème pour des astres tournant en bloc autour de l'axe de rotation.

M. Wavre et M. Dive ont démontré la validité de ce théorème aussi pour des rotations permanentes de l'astre. Enfin M. Wavre a démontré ce théorème dans le cas le plus général, pour des accélérations superficielles quelconques [1].

En supposant que la surface libre de l'astre est un ellipsoïde de révolution aplati, animé d'un mouvement de rotation permanente autour de l'axe polaire, nous allons former des relations entre les éléments stokiens et le potentiel newtonien.

Si on suppose la pression constante sur la surface libre, l'équation de la rotation permanente de cette surface s'écrit

$$dU_s + \frac{\omega^2}{2} dl_s^2 = 0 \ , \tag{1}$$

où U_s est le potentiel newtonien de l'astre en un point de la surface libre, l_s est la distance de ce point à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de ce point.

Employons des coordonnées elliptiques liées aux coordonnées cartésiennes par des équations

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \cos \varphi \\ z &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Il est facile de vérifier que dans ces expressions les surfaces $r = \text{const}$ sont des ellipsoïdes de révolution d'excentricité linéaire e.

[1] Wavre, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 194, p. 1447, 1932.

Posons pour le centre de l'astre $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et x dans la direction de l'axe de rotation.

Si la surface libre est un ellipsoïde de révolution de demi-axe polaire s et de rayon équatorial $\sqrt{s^2 + e^2}$ (c'est-à-dire d'excentricité linéaire e), on a sur cette surface $r = s = \text{const}$, et l'équation (1) s'écrit

$$dU_s = \frac{s^2 + e^2}{2} \omega^2 d \cos^2 \vartheta . \tag{3}$$

Supposons la loi de la rotation permanente de la surface libre de la forme suivante

$$\omega^2 = \omega_0 + \omega_2 P_2(\cos \vartheta) , \tag{4}$$

où ω_0 et ω_2 sont des constantes. P_n sera le n^e polynôme de Legendre, et Q_n la n^e fonction sphérique de seconde espèce. D'après (3) et (4) le potentiel newtonien sur la surface libre s'écrit

$$U_s = \frac{s^2 + e^2}{2} \left[\left(\frac{2}{3} \omega_0 + \frac{2}{21} \omega_2 \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{6}{35} \omega_2 P_4 (\cos \vartheta) \right] + C . \tag{5}$$

Un calcul facile donne la constante d'intégration

$$C = \frac{i}{e} Q_0 \left(\frac{is}{e} \right) M ,$$

où $i = \sqrt{-1}$ et M est la masse totale de l'astre.

En résolvant le problème de Dirichlet, on trouve le potentiel U à l'extérieur pour un point de coordonnées (r, ϑ):

$$U = \frac{i}{e} M Q_0 \left(\frac{ir}{e} \right) + F_2 Q_2 \left(\frac{ir}{e} \right) P_2 (\cos \vartheta) + F_4 Q_4 \left(\frac{ir}{e} \right) P_4 (\cos \vartheta) , \tag{6}$$

où

$$F_2 = (s^2 + e^2) \frac{\frac{1}{3} \omega_0 + \frac{1}{21} \omega_2}{Q_2 \left(\frac{is}{e} \right)} \quad \text{et} \quad F_4 = (s^2 + e^2) \frac{\frac{3}{35} \omega_2}{Q_4 \left(\frac{is}{e} \right)} .$$

Les coefficients de l'expression (6) du potentiel ne dépendent que des éléments stokiens M, s, e, ω_0, ω_2.

Ce procédé s'étend au cas où ω^2 est exprimée au moyen de polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre n.

Il faut remarquer qu'aucune hypothèse sur la constitution intérieure et sur le mouvement à l'intérieur de l'astre n'est faite.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Wavre pour ses précieux conseils dans ma recherche concernant cette note.

R. Wavre. — *Sur la détermination des densités à l'intérieur d'une figure d'équilibre hétérogène.*

Envisageons un fluide parfait dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton. Supposons-le en état d'équilibre relatif, le fluide tournant tout d'une pièce autour d'un axe fixe Oz avec une vitesse ω. On sait que si p est la pression, ρ la densité, U le potentiel newtonien et Q celui de la force centrifuge, les équations du mouvement se résument ainsi:

$$\Phi + k = \mathrm{U} + \mathrm{Q} \qquad (1) \qquad\qquad \text{avec} \qquad \Phi = \int_0^p \frac{dp}{\rho(p)}\,, \qquad (2)$$

k étant une constante. Sur la surface libre qui est supposée à pression nulle l'on a $\Phi = 0$ d'où

$$\mathrm{U} = k - \mathrm{Q}\ .$$

La masse totale détermine k et la fonction U étant harmonique en dehors de l'astre, y est entièrement déterminée, par la résolution du problème extérieur de Dirichlet, à partir des éléments stokiens S, ω, M.

L'attraction est donc entièrement déterminée par les éléments précédents dans l'espace extérieur à l'astre. Peut-on bénéficier de ce fait pour déterminer les densités à l'intérieur de l'astre ? Sans prétendre apporter une solution à ce redoutable problème je voudrais indiquer ici une de ses transcriptions analytiques.

Remarquons tout d'abord que la recherche d'un corps créant le potentiel extérieur donné admettrait vraisemblablement une infinité de solutions qui seraient autant de répartitions équipo-