

Zeitschrift:	Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber:	Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band:	17 (1935)
Artikel:	Sur l'équation différentielle générale du second ordre caractérisant l'équilibre thermodynamique des sphères gazeuses
Autor:	Tiercy, Georges
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-741590

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Georges Tiercy. — *Sur l'équation différentielle générale du second ordre caractérisant l'équilibre thermodynamique des sphères gazeuses.*

Il s'agit ici de l'équation donnant la densité en fonction du rayon; elle est issue, comme on sait, de l'équation de l'équilibre mécanique:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho, \quad \text{où} \quad g = \frac{GM_r}{r^2},$$

et où P représente la pression totale $P = p + p'$; on a:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (1)$$

D'ailleurs, si l'équilibre est de caractère polytropique, on a aussi:

$$P = C \cdot \rho^\chi, \quad (2)$$

où C est une constante.

On a encore les égalités connues:

$$\begin{cases} p = \frac{R}{\mu} \rho T, \\ p' = \frac{1}{3} \alpha T^4; \end{cases} \quad (3)$$

et l'on pose:

$$\begin{cases} p = \beta P, \\ p' = (1 - \beta)P. \end{cases} \quad (4)$$

Nous écrirons ensuite:

$$T = \Theta \cdot \rho^{\chi-1}, \quad (5)$$

comme dans la théorie d'Emden (où l'on néglige p') ou dans celle de Bialobrzeski (où $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$); mais nous supposerons ici Θ variable avec r .

Il vient:

$$\begin{aligned} P &= \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4 ; \\ P &= \frac{R}{\mu} \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot \rho^{4(\mathcal{K}-1)} ; \end{aligned} \quad (6)$$

et en utilisant la substitution d'Emden $\rho = u^n$, $n = \frac{1}{\mathcal{K}-1}$:

$$P = \frac{R}{\mu} \Theta \cdot u^{n+1} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot u^4 . \quad (7)$$

L'équation (1) de l'équilibre mécanique devient:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{R}{\mu} \Theta \cdot (n+1) + \frac{4a}{3} \cdot \Theta^4 \cdot u^{3-n} \right] \frac{du}{dr} + \frac{d\Theta}{dr} \cdot \left[\frac{R}{\mu} \cdot u + \frac{4a}{3} \Theta^3 \cdot u^{4-n} \right] &= \\ = - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r u^n r^2 dr . \end{aligned} \right. \quad (8)$$

En dérivant à nouveau cette égalité (8) par rapport à r , et en tenant compte de (8) elle-même, on obtiendra l'équation différentielle de second ordre qui lie la fonction u à la variable r . On voit bien qu'en général cette équation sera compliquée.

Le calcul deviendrait beaucoup plus simple si l'on supposait d'emblée, comme l'avait fait M. Bialobrzeski, que $\Theta = \text{const.}$; une note antérieure¹ a montré que cette hypothèse donne un équilibre polytropique et entraîne l'obligation de faire $n = 3$; de sorte que, avec l'hypothèse d'entrée $\Theta = \text{const.}$, on n'a pas à poursuivre le calcul à partir de (8) avec n quelconque.

Abandonnons donc l'hypothèse initiale de Bialobrzeski, et considérons que Θ est fonction de r ; il en sera de même de β . Ainsi, la température T ne sera plus proportionnelle à u , comme c'est le cas dans la théorie de M. Bialobrzeski.

¹ Note précédente.

En dérivant l'égalité (8) par rapport à r , on trouve:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{R}{\mu} \Theta \cdot (n+1) + \frac{4a}{3} \Theta^4 \cdot u^{3-n} \right] \frac{d^2 u}{dr^2} + \\ & \left[\frac{R}{\mu} (n+1) + \frac{R}{\mu} + \frac{4a}{3} (8-n) \Theta^3 \cdot u^{3-n} \right] \frac{du}{dr} \cdot \frac{d\Theta}{dr} + \\ & \frac{4a}{3} (3-n) \cdot \Theta^4 \cdot u^{2-n} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 + 4a \cdot \Theta^2 \cdot u^{4-n} \left(\frac{d\Theta}{dr} \right)^2 + \\ & \left[\frac{R}{\mu} \cdot u + \frac{4a}{3} \Theta^3 \cdot u^{4-n} \right] \frac{d^2 \Theta}{dr^2} = -4\pi G u^n + \frac{2(4\pi G)}{r^3} \int_0^r u^n r^2 dr . \end{aligned} \right. \quad (9)$$

En prenant tous les termes dans le premier membre, on remplacera l'intégrale par l'expression suivante tirée de (8):

$$\begin{aligned} -\frac{2(4\pi G)}{r^3} \int u^n r^2 dr &= \frac{2}{r} \left[\frac{R}{\mu} \Theta \cdot (n+1) + \frac{4a}{3} \Theta^4 \cdot u^{3-n} \right] \frac{du}{dr} + \\ &+ \frac{2}{r} \left[\frac{R}{\mu} u + \frac{4a}{3} \Theta^3 \cdot u^{4-n} \right] \frac{d\Theta}{dr} . \end{aligned} \quad (10)$$

L'égalité (9) est l'équation différentielle générale du problème. Elle se simplifie toujours jusqu'au type de l'équation d'Emden lorsqu'on considère un cas polytropique (2). Il suffit pour cela de choisir la variation de Θ de telle sorte qu'on ait:

$$\frac{R}{\mu} \Theta + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot \rho^{3K-4} = C \quad (\text{const.}) ; \quad (11)$$

alors l'expression (6) de P se réduit à $P = C\rho^K$. La condition (11) montre que, lorsqu'on va de la périphérie au centre, Θ diminue puisque ρ augmente.

Dans ces conditions, on portera directement l'expression (2) dans (1); et l'on trouve tout de suite l'équation réduite:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{4\pi G}{(n+1)C} \cdot u^n = 0 , \quad (12)$$

quel que soit K .

Cela revient à dire que, dans les cas polytropiques, l'équation différentielle n'est jamais d'un type compliqué tel que (9).

Remarquons encore que, lorsque la condition (11) est satisfaite et que P se réduit à (2), le facteur Θ est proportionnel à β . On a en effet:

$$\begin{aligned} P &= \frac{p}{\beta} = \frac{R}{\beta \mu} \cdot \rho T ; \\ T &= \frac{\beta \mu}{R} \cdot \frac{P}{\rho} = \frac{C \beta \mu}{R} \cdot \rho^{\mathcal{K}-1} ; \end{aligned} \quad (13)$$

de sorte qu'on peut écrire:

$$\Theta = \frac{C \mu \beta}{R} ; \quad (14)$$

cela montre bien encore que Θ sera constant si β l'est; et l'on a vu que le cas se présente pour la classe polytropique $n = 3$, c'est-à-dire pour $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$.

Séance du 16 mai 1935.

M. Gysin. — *Les minerais de cuivre de Kinsenda (Congo belge).* Note n° 2. *Sur la présence de deux variétés de chalcosine.*

Nous avons indiqué précédemment¹ que le minerai primaire de Kinsenda était essentiellement constitué par des mouches de bornite criblées de fines lamelles de chalcopyrite et associées à des grains de chalcopyrite compacte. En outre, dans un grand nombre d'échantillons, la bornite est envahie périphériquement par une chalcosine bleue, formant un liseré plus ou moins large. Cette chalcosine n'est pas polychroïque; entre les nicols croisés, en lumière réfléchie, elle paraît sensiblement isotrope. On l'observe, non seulement à la périphérie des plages de bornite, mais encore autour des fissures de ce dernier minéral. Les contacts bornite-chalcosine sont flous. Les fines lamelles de chalcopyrite incluses dans la bornite sont elles-mêmes aussi transformées en chalcosine, mais ce remplacement est plus

¹ M. GYSIN, *Les minerais de cuivre de Kinsenda (Congo belge).* Note n° 1. *Les associations bornite-chalcopyrite.* C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, vol. 52, n° 1, janvier-mars 1935.