Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 17 (1935)

Artikel: Expression des équations de l'électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford

Autor: Mercier, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741561

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

EXPRESSION DES ÉQUATIONS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME AU MOYEN DES NOMBRES DE CLIFFORD

PAR

André MERCIER

INTRODUCTION

Dans ses travaux sur les biquaternions, Clifford a défini des nombres hypercomplexes qui peuvent représenter les substitutions linéaires qui laissent invariantes des sommes de carrés. Ces travaux sont contenus dans trois notes principales: Preliminary Sketch of Biquaternions [1], Further Note on Biquaternions (posthume) et Notes on Biquaternions [2].

Lipschitz [3], en étudiant la théorie des transformations linéaires qui laissent invariantes des sommes de carrés, a utilisé les mêmes nombres. L'exposé de MM. Study et Cartan dans l'Encyclopédie mathématique donne un aperçu clair de leurs principales propriétés [4].

La première application des nombres de Clifford à la physique mathématique est, à notre connaissance, due à M. Proca [5] qui,

[1] *Proc. of the London Math. Soc.*, vol. IV, nos 64, 65, p. 381, 395.

[2] Cf. W. K. Clifford, *Math. Papers* (London, 1882, p. 181, 385, 395 et 402).

[3] Lipschitz, Untersuchungen über die Summen von Quadraten (Bonn, 1886), trad. par J. Molk (*Jour. de Math. pures et appl.* (4), **2**, 373 (1886)).

[4] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. 1, fascicule 3 (1908), p. 463 et ss.

[5] *C. R.*, **190**, 1377, 1930 et **191**, 26, 1930, et *J. de Phys.*, VII, t. 1, 236, 1930.

faisant usage du caractère d'invariance de ces nombres, les a appliqués à la théorie de Dirac. M. Juvet les a appliqués à l'électromagnétisme et à l'équation de Dirac [1]. Enfin MM. Juvet et Schidlof sont parvenus à donner au moyen de ces nombres une forme très élégante aux lois de l'électromagnétisme dans le vide, et ils en ont indiqué une généralisation possible [2]. Nous suivrons en général ces deux auteurs et nous emploierons leurs définitions et leurs notations [3]. Nous avons publié deux notes, sur l'expression du théorème de Lorentz et celle du second principe de la thermodynamique en notation cliffordienne [4].

Dans la première partie de ce travail, après avoir donné une définition des nombres de Clifford, nous montrons quelles en sont les principales propriétés. Dans les applications physiques, nous ferons usage des nombres relatifs à un espace à quatre dimensions; c'est pourquoi nous nous arrêterons plus longuement sur ce cas particulier.

Le chapitre II expose l'analyse cliffordienne, c'est-à-dire les propriétés des nombres de Clifford fonctions du point de l'espace où ils sont définis; cet exposé se fonde sur les travaux de MM. Juvet et Schidlof consacrés plus particulièrement aux espaces à trois et à quatre dimensions. Certaines formules d'intégration partielle, portant sur des multiplicités quelconques, y sont établies sous une forme condensée. Dans ce même chapitre, nous donnons une série d'identités auxquelles satisfont les opérateurs différentiels de l'espace à quatre dimensions.

On peut appliquer les nombres de Clifford à l'étude de l'élec-

[1] G. Juvet, Opératcurs de Dirac et Equations de Maxwell (*Comm. Math. Helv.*, **2**, 225, 1930).

G. Juvet (Congrès int. des mathématiciens, *C. R.*, Zurich, 1932).

[2] G. Juvet et A. Schidlof, Sur les nombres hypercomplexes de Clifford et leurs applications... (*Bull. Soc. neuchâteloise S. nat.*, **57**, 127, 1932).

[3] Nous citerons dorénavant leur mémoire par l'abréviation (J.S.).

[4] A. Mercier, Application des nombres de Clifford à l'établissement du théorème de relativité de Lorentz (*Helv. Phys. Acta*, Vol. VII, p. 649, 1934, et *Actes de la Soc. helv. des Sc. nat. Zurich*, 1934, p. 278).

A. Mercier, Expression du second principe de la thermodynamique au moyen des nombres de Clifford (*C. R. de la Soc. de Phys. et d'Hist. nat. de Genève*. Séance du 6 juin 1935, p. 112. Suppl. aux *Archives des Sc. phys. et nat.*, juillet-août 1935).

tromagnétisme, ainsi que l'ont fait MM. Juvet et Schidlof. Ces auteurs ont écrit sous la forme cliffordienne (invariante par rapport à la transformation de Lorentz) les lois de l'électromagnétisme dans le vide. Dans le chapitre III, nous résumons leurs résultats en un principe de variation et les généralisons en appliquant leur méthode à l'étude de l'électromagnétisme dans la matière. On décrit ainsi, au moyen des nombres de Clifford, les lois des champs et des inductions, du mouvement de la matière et des charges, et de l'énergie électromagnétique.

Chapitre Premier.

Définitions et propriétés.

1. *Définitions.* — Les nombres de Clifford relatifs à un espace euclidien à n dimensions E_n se définissent comme suit. Ce sont des nombres hypercomplexes [1] à 2^n unités, $n+1$ sont fondamentales, et seront désignées par $1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$, les autres résultent de produits des unités fondamentales.

Les unités fondamentales Γ_i satisfont par définition aux conditions

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i\Gamma_j + \Gamma_j\Gamma_i &= 0 \\ \Gamma_i^2 &= 1 \\ 1\Gamma_i = \Gamma_i 1 &= \Gamma_i \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On obtient les autres unités, qui seront appelées unités dérivées, en formant le produit de k unités fondamentales Γ_i $(k = 2, 3, \ldots n)$. En vertu des conditions (1), on n'obtient de la sorte que 2^n unités linéairement indépendantes. Le carré d'une unité dérivée, formée à partir de k unités fondamentales, est égal à 1 si k est pair, et à -1 si k est impair.

[1] Un nombre est hypercomplexe si sa définition nécessite l'introduction d'unités plus nombreuses que 1 et $i = \sqrt{-1}$.

Dans la multiplicité E_n, un nombre de Clifford a la forme générale

$$\begin{aligned} N = a &+ a_1\Gamma_1 + \dots + a_n\Gamma_n \\ &+ a_{12}\Gamma_1\Gamma_2 + \dots + a_{n-1,n}\Gamma_{n-1}\Gamma_n \\ &+ \dots \\ &+ a_{23\dots n}\Gamma_2\Gamma_3 \dots \Gamma_n + \dots + a_{12\dots(n-1)}\Gamma_1\Gamma_2 \dots \Gamma_{n-1} \\ &+ a_{12\dots n}\Gamma_1\Gamma_2 \dots \Gamma_n \\ = a &+ \Sigma a_i\Gamma_i + \Sigma a_{ij}\Gamma_i\Gamma_j + \dots + a_{12\dots n}\Gamma_1\Gamma_2 \dots \Gamma_n , \end{aligned}$$

où les a sont des variables, que l'on peut appeler composantes du nombre de Clifford N relatif à E_n.

En général le terme $\Sigma a_{1\dots k}\Gamma_1 \dots \Gamma_k$ a

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

composantes, car si l'on a formé une unité dérivée au moyen de k Γ_i, il n'y a pas lieu d'en permuter les éléments.

La somme de deux nombres de Clifford sera définie par le nombre dont les composantes sont la somme des composantes correspondantes des deux nombres additionnés. Le produit d'un nombre N de composantes a par un nombre N′ de composantes a' s'obtiendra en faisant la somme de tous les produits possibles

$$a_{i\dots m}\Gamma_i \dots \Gamma_m a'_{j\dots n}\Gamma_j \dots \Gamma_n ,$$

compte tenu naturellement des conditions (1). Le quotient N_3 de deux nombres N_1 et N_2 sera tel que le produit de N_3 par N_2 soit égal à N_1.

En réalité, Clifford (et Lipschitz) ont introduit des unités Γ_i dont les unes ont un carré égal à -1 et les autres un carré égal à $+1$. Nous nous tiendrons au cas défini par (1), bien que pour l'espace minkowskien il soit plus naturel de poser $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = \Gamma_3^2 = -1$, $\Gamma_4^2 = +1$.

2. *Sur le caractère des nombres de Clifford fonctions des coordonnées d'un point de l'espace.* — Les nombres de Clifford sont définis dans une multiplicité E_n qui est euclidienne. Un point Q

de cette multiplicité peut être représenté par un nombre de la forme particulière $X = \Sigma x_i \Gamma_i$ et il est indiqué d'appeler les x_i les coordonnées de ce point. Comme le disent MM. Juvet et Schidlof [1] toute transformation linéaire consistant à passer des n coordonnées x_i à n autres x'_i, et symbolisée par un opérateur B, transforme le nombre X en un autre $X' = \Sigma x'_i \Gamma_i$ selon

$$X' = BX$$

de sorte que X peut être considéré comme un vecteur. Le point Q en est l'extrémité dans l'espace euclidien E_n. Tout autre nombre $V = \Sigma a_i \Gamma_i$ (où les a_i sont fonctions des coordonnées x_i(se transforme de la même manière et en général, d'après ces auteurs, les diverses parties a, $\Sigma a_i \Gamma_i$, ... $a_{1 \ldots n} \Gamma_1 \ldots \Gamma_n$ du nombre général N se comportent comme des tenseurs d'ordre zéro, un, deux ... n. A l'exception des deux premiers qui sont donc un invariant et un vecteur, ces tenseurs sont antisymétriques. En effet, une permutation entre Γ_i et Γ_j dans un élément d'une partie de N nécessite un changement de signe. L'invariant et le vecteur ne présentent pas ce caractère, puisque leurs éléments ne comportent aucun, ou qu'un seul Γ_i.

Dans E_4, le terme $a_{1234} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$ est un tenseur antisymétrique de quatrième ordre, qui se réduit à un seul élément distinct. Le tenseur d'ordre n dans E_n se réduit également à un seul élément.

M. Juvet [2] démontre dans le cas particulier des nombres de Clifford relatifs à E_4, que ceux-ci sont invariants vis-à-vis de la transformation de Lorentz, ce qui rend leur application recommandable dans nombre de problèmes de la relativité restreinte, pour autant, naturellement, que les grandeurs physiques que ces nombres doivent représenter possèdent le caractère d'antisymétrie. Pour les vecteurs, il n'y a pas de difficulté. Les grandeurs géométriques telles que surfaces, volumes, etc. sont antisymétriques; et la plupart des grandeurs qui interviennent dans l'électromagnétisme minkowskien sont

[1] *Loc. cit.*, Introd., § 3, p. 128.
[2] *Loc. cit.*, § 1, p. 227 et ss.

antisymétriques. D'où l'application des nombres de Clifford qu'a ingénieusement proposée M. Juvet.

Nous appellerons produit k-vectoriel la partie du produit cliffordien de k vecteurs qui est un tenseur antisymétrique d'ordre k, et nous appelerons bivecteur, trivecteur, quadrivecteur... k-vecteur des tenseurs antisymétriques particuliers qui peuvent se mettre respectivement sous la forme d'un produit bivectoriel de deux vecteurs, trivectoriel de trois vecteurs, etc.

3. *Nombres de Clifford relatifs à* E_4. — Les nombres de Clifford de l'E_4 sont particulièrement utiles dans l'électromagnétisme minkowskien. Pour abréger on pose (J.S.):

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 = \Gamma$$

en remarquant que $\Gamma\Gamma_i = -\Gamma_i\Gamma$. Le nombre de Clifford complet de E_4 peut se mettre alors sous la forme

$$N = I_1 + V_1 + T + \Gamma(V_2 + I_2) \ ,$$

où I_1 et I_2 sont deux invariants, V_1 et V_2 deux vecteurs, et T un tenseur antisymétrique du second ordre.

Le nombre de la forme

$$S = V_1 + \Gamma V_2$$

est appelé survecteur (J.S.). Le produit, à gauche ou à droite, d'un tel nombre par un tenseur antisymétrique du second ordre, fournit à nouveau un survecteur.

Le produit de deux vecteurs V et W est la somme d'un invariant et d'un tenseur antisymétrique particulier que nous appelons bivecteur. Ces deux parties du produit sont le produit scalaire V.W et le produit bivectoriel $V \times W$. On notera donc

$$VW = V \cdot W + V \times W \ ,$$

d'où

$$V \cdot W = \frac{VW + WV}{2} \ ,$$

$$V \times W = \frac{VW - WV}{2} \ .$$

Le produit d'un vecteur V et d'un tenseur T est un survecteur, dans lequel apparaissent les deux vecteurs

$$\sum_i \Gamma_i \sum_j t_{ij} v_j = \mathrm{T} \cdot \mathrm{V}$$

et

$$\sum_i \Gamma_i (t_{jk} v_l + t_{kl} v_j + t_{lj} v_k) = \mathrm{T} \times \mathrm{V} .$$

Les produits cliffordiens TV ou VT sont d'une part

$$\mathrm{TV} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{V} + \Gamma \mathrm{T} \times \mathrm{V}$$

et d'autre part

$$\mathrm{VT} = - \mathrm{T} \cdot \mathrm{V} + \Gamma \mathrm{T} \times \mathrm{V} .$$

On en déduit

$$\mathrm{T} \cdot \mathrm{V} = \frac{\mathrm{TV} - \mathrm{VT}}{2}$$

et

$$\mathrm{T} \times \mathrm{V} = \Gamma \frac{\mathrm{TV} + \mathrm{VT}}{2} .$$

Remarque. — Dans la multiplicité E_4 la mise en évidence de l'unité dérivée Γ nous a permis de représenter le tenseur d'ordre 3 ($= n - 1$) par un vecteur. Pour n quelconque, on peut, en mettant en évidence l'unité dérivée $\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n = \Gamma$, représenter tout tenseur d'ordre $n - 1$ de E_n par un vecteur à n dimensions. L'unité Γ sera commode pour l'écriture de certaines formules d'intégration partielle.

Chapitre II.

Analyse Cliffordienne.

1. *Les opérateurs* $\nabla\rightarrow$ *et* $\leftarrow\nabla$. — Soit un nombre de Clifford C dont les coefficients sont fonctions des coordonnées x_i et que nous appellerons champ cliffordien. Les symboles $\nabla\rightarrow \mathrm{C}$ et $\mathrm{C} \leftarrow\nabla$ remplaceront les opérations de dérivation suivantes:

$$\nabla\rightarrow \mathrm{C} = \sum_1^n \Gamma_i \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x_i} , \tag{2}$$

$$\mathrm{C} \leftarrow\nabla = \sum_1^n \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x_i} \Gamma_i . \tag{3}$$

2. *Cas où* n = 4. — Dans E_4 on introduit (J.S.) une série d'opérateurs partiels, qui sont les suivants:

$$\text{grad I} = \sum \Gamma_i \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_i}$$

$$\text{div V} = \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\text{rot V} = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \Gamma_i \Gamma_k$$

$$\text{DIV T} = \sum_i \Gamma_i \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{(divergence vectorielle)}$$

$$\text{max T} = \Gamma_1 \left(\frac{\partial t_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_4} + \frac{\partial t_{24}}{\partial x_3}\right) + \ldots \quad \text{(maxwellien).}$$

Les v_i sont les composantes du vecteur V, les t_{ij} celles du tenseur antisymétrique T. On obtient les quatre termes du vecteur max T par permutation circulaire. Dès lors les opérations $\nabla\!\!\rightarrow$ C et C $\leftarrow\!\!\nabla$ effectuées sur un champ cliffordien $\mathrm{C} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{V}_1 + \mathrm{T} + \Gamma(\mathrm{V}_2 + \mathrm{I}_2)$, fonction des points de E_4, s'écrivent

$$\nabla\!\!\rightarrow \mathrm{C} = \text{div V}_1 + \text{grad I}_1 + \text{DIV T} + \text{rot V}_1 + \\ + \Gamma(\text{max T} - \text{rot V}_2 - \text{grad I}_2 - \text{div V}_2),$$

$$\mathrm{C} \leftarrow\!\!\nabla = \text{div V}_1 + \text{grad I}_1 - \text{DIV T} - \text{rot V}_1 + \Gamma(\text{max T} - \\ - \text{rot V}_2 + \text{grad I}_2 + \text{div V}_2)\,.$$

Indiquons la règle de dérivation suivante, C et C′ étant deux champs cliffordiens:

$$\nabla\!\!\rightarrow (\mathrm{CC}') = \nabla\!\!\rightarrow (\underset{\uparrow}{\mathrm{C}}\mathrm{C}') + \nabla\!\!\rightarrow (\mathrm{C}\underset{\uparrow}{\mathrm{C}}')\,,$$

où seule est considérée comme variable dans chaque parenthèse du second membre la quantité désignée par la flèche.

3. *Seconde définition des opérateurs et formules d'intégration partielle.* — Pour que les opérations symbolisées par le $\nabla\rightarrow$ au § 1 aient un sens, il faut admettre que les fonctions (champs cliffordiens) sur lesquelles on opère sont continues et admettent des dérivées continues. Pour la définition du $\nabla\rightarrow$ que nous allons donner dans ce paragraphe, il n'est pas essentiel de soumettre les champs à ces restrictions, il faut que la limite qui définit l'opération existe, et nous donnons plus loin les conditions qui doivent être remplies pour cela. Toutefois, dans tout ce travail, à moins de spécifier le contraire, nous supposerons satisfaites à la fois les restrictions correspondant à la première et à la seconde définition de l'opérateur, pour pouvoir en particulier justifier l'identité des deux définitions du $\nabla\rightarrow$ que nous donnons. Dans les applications que nous ferons des nombres de Clifford à la physique mathématique, nous aurons toujours affaire à des fonctions soumises à de pareilles restrictions.

Dans E_3, soit un volume τ (d'élément $d\tau = dx_1dx_2dx_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$) limité par une surface σ (d'élément $d\sigma = dx_2dx_3\Gamma_2\Gamma_3 + dx_3dx_1\Gamma_3\Gamma_1 + dx_1dx_2\Gamma_1\Gamma_2$). On écrit par définition (J.S.):

$$\nabla\rightarrow \mathrm{C} = -\Gamma \lim_{\tau\rightarrow 0} \frac{\oint d\sigma\, \mathrm{C}}{|\tau|}, \tag{4}$$

$$\mathrm{C} \leftarrow\nabla = -\Gamma \lim_{\tau\rightarrow 0} \frac{\oint \mathrm{C}\, d\sigma}{|\tau|}. \tag{5}$$

Le signe $|\ |$ indique que l'on envisage le nombre qui mesure le volume τ. L'équivalence des deux définitions (2) et (4) sera donnée dans le cas général où n est quelconque.

Soit alors τ un volume dans lequel C est défini et continu ainsi que sur la surface qui le limite, et soit d'autre part S' une surface ouverte sur laquelle C est défini, frontière comprise (d'élément dl). MM. Juvet et Schidlof intègrent l'équation (4):

$$\int \nabla\rightarrow \mathrm{C}\, d\tau = \oint d\sigma\, \mathrm{C} \tag{6}$$

d'où ils déduisent les quatre formules d'intégration partielle dont voici l'écriture vectorielle:

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, |d\tau| = \oint \overrightarrow{d\sigma} \cdot \vec{V} \qquad \text{(Ostrogradzky)}$$

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{V} \, |d\tau| = \oint \overrightarrow{d\sigma} \times \vec{V}$$

$$\oint \vec{dl} \cdot \vec{V} = \int_{S'} \overrightarrow{d\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \qquad \text{(Stokes)}$$

$$\oint \vec{dl} \times \vec{V} = \int_{S'} (\overrightarrow{d\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{V} \, .$$

Remarquons qu'en faisant $C = I$ dans (6), on a le théorème du gradient

$$\int \vec{\nabla} \, I \, |d\tau| = \oint I \, \overrightarrow{d\sigma} \, .$$

La définition intrinsèque de $\nabla\!\rightarrow$ et $\leftarrow\!\nabla$ dans E_4 est analogue. On considère un champ cliffordien dans E_4. On entoure un point, dans le voisinage duquel C est défini, d'une hypersurface τ limitant un hypervolume ρ. Posons

$$d\tau = dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, \Gamma_1 \, \Gamma_2 \, \Gamma_3 + \ldots$$

que nous appelerons l'élément d'hypersurface orienté. MM. Juvet et Schidlof écrivent pour définir $\nabla\!\rightarrow C$ et $C \leftarrow\!\nabla$

$$\nabla\!\rightarrow C = -\Gamma \lim_{\rho \to 0} \frac{\oint d\tau \, C}{|\rho|} \tag{7}$$

$$C \leftarrow\!\nabla = \lim_{\rho \to 0} \frac{\oint C \, d\tau}{|\rho|} \, \Gamma \, . \tag{8}$$

Si on pose alors $d\rho = \Gamma \, | \, d\rho \, |$ et qu'on intègre (7) dans un hypervolume ρ de dimensions finies, il vient

$$\int d\rho \; \nabla\!\rightarrow C = -\oint d\tau \, C \tag{9}$$

On peut obtenir une série de formules d'intégration partielle à partir de (9).

Si C = I (un invariant), et qu'on pose $d\tau = \Gamma d\xi$ [1], il vient

$$\int |d\rho| \text{ grad I} = -\oint d\xi \, \mathrm{I} \, .$$

Si C = V (un vecteur), il vient

$$\Gamma \int |d\rho| \, (\text{div V} + \text{rot V}) = -\Gamma \oint d\xi \, \mathrm{V} \, ,$$

d'où, par identification, en vertu des définitions du § 3, chap. I,

$$\int |d\rho| \text{ div V} = -\oint d\xi \cdot \mathrm{V}$$

et

$$\int |d\rho| \text{ rot V} = \oint d\xi \times \mathrm{V} \, .$$

Si C est un tenseur antisymétrique T, il vient

$$\Gamma \int |d\rho| \, (\text{DIV T} + \Gamma \text{ max T}) = -\Gamma \oint d\xi \, \mathrm{T} \, ,$$

[1] Il faut prendre garde aux signes qui interviennent lors de la formation de $d\xi$. En effet, l'hypersurface élémentaire est définie par

$$\begin{aligned} d\tau &= \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 + \dots \\ &= \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \, d\xi_4' \qquad + \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \, d\xi_1' \qquad + \dots \\ &= \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \, d\xi_4' \Gamma_4^2 \qquad + \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \, d\xi_1' \Gamma_1^2 \qquad + \dots \\ &= \Gamma (d\xi_4' \Gamma_4 - d\xi_1' \Gamma_1 + d\xi_2' \Gamma_2 - d\xi_3' \Gamma_3) \, . \end{aligned}$$

On peut poser

$$d\xi_1 = -d\xi_1', \quad d\xi_2 = d\xi_2', \quad d\xi_3 = -d\xi_3', \quad d\xi_4 = d\xi_4'$$

et il vient

$$d\tau = \Gamma \Sigma d\xi_i \Gamma_i = \Gamma d\xi$$

d'où l'on déduit de la même manière

$$\int |d\rho| \, \mathrm{DIV}\, \mathrm{T} = - \oint d\xi \cdot \mathrm{T}$$

et

$$\int |d\rho| \, \max \mathrm{T} = - \oint d\xi \times \mathrm{T} \, .$$

Passons à la définition intrinsèque des opérateurs dans E_n, ce qui nous permettra d'écrire la formule générale d'intégration partielle (formule (10)). Nous étions partis d'une première définition

$$\nabla\!\!\!\rightarrow = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Gamma_n \frac{\partial}{\partial x_n} \, .$$

Selon la seconde définition, ce sera la limite d'un rapport: soit un domaine R_n de E_n, dR_n un élément de ce domaine. R_n est limité par une frontière R_{n-1} dont l'élément s'écrit sous la forme d'un tenseur d'ordre $n - 1$:

$$dR_{n-1} = \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} + dx_2 dx_3 \ldots dx_n \, \Gamma_2 \Gamma_3 \ldots \Gamma_n + \\ + \ldots + \Gamma_n \Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-2} \, dx_n dx_1 \ldots dx_{n-2} \, .$$

Posons $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n$. On peut alors représenter dR_{n-1} par un vecteur à n dimensions:

$$dR_{n-1} = \Gamma \, d\Pi \, ,$$

où $d\Pi$ vaut

$$d\Pi = d\Pi_i = \Gamma_n \, dx_1 \ldots dx_{n-1} + \Gamma_1 \, dx_2 \ldots dx_n + \\ + \ldots + \Gamma_{n-1} \, dx_n \ldots dx_{n-2}$$

si n est impair, et

$$d\Pi = d\Pi_p = \Gamma_n \, dx_1 \ldots dx_{n-1} - \Gamma \, dx_2 \ldots dx_n + \\ + \ldots - \Gamma_{n-1} \, dx_n \ldots dx_{n-2}$$

si n est pair.

Soit alors un nombre de Clifford C, fonction des points de E_n.

Soit un point Q à l'intérieur du sous-espace R_{n-1} et Q′ un point de l'élément dR_{n-1}. Formons le rapport

$$\frac{\oint dR_{n-1}\, C(Q')}{R_n}.$$

Puis faisons tendre R_n vers Q, de manière qu'il s'évanouisse dans toutes ses dimensions. Si le rapport tend vers une limite, celle-ci définit $\nabla\!\rightarrow C$. On écrira

$$\nabla\!\rightarrow C = -\,\Gamma \lim_{R_n \to 0} \frac{\oint dR_{n-1}\, C}{|R_n|},$$

et une relation analogue pour l'opérateur $\leftarrow\!\nabla$. [1]

On montre l'équivalence des deux définitions du $\nabla\!\rightarrow$ comme suit: donnons à R_n la forme d'un domaine *parallélépipédique* rectangle dont toutes les dimensions sont infiniment petites (pour $n = 4$ on dirait parallélostère). On forme le produit $dR_{n-1}C$ dont on calcule la dérivée extérieure qui est égale [2] à

$$\frac{\oint dR_{n-1}\, C}{R_n};$$

[1] Il est entendu qu'on ne peut donner cette définition que lorsque certaines conditions sont remplies. L'intégrale au numérateur est riemannienne. Il faut tout d'abord que le nombre de Clifford C soit intégrable sur le domaine R_{n-1}; c'est-à-dire que toutes ses composantes le soient. Il faut de plus que la limite du rapport existe. Cela est possible lorsque C n'est pas trop irrégulier dans le domaine R_n.

Bien que cette seconde définition soit plus commode que la définition (2) pour la démonstration des identités entre intégrales, et qu'il ne soit pas nécessaire de postuler l'existence des dérivées pour la formuler, elle n'est valable que si l'on prend les précautions nécessaires pour assurer l'existence de la limite. Nous n'insisterons pas sur la *pathologie* des fonctions sur lesquelles on opère, et nous admettrons dorénavant, ainsi que nous l'avons déjà dit, et en particulier dans l'application de l'analyse cliffordienne aux équations de l'électromagnétisme, que les opérations effectuées gardent toujours un sens analytique.

[2] Voir E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922, VII.

en tenant compte des changements qui résultent des permutations des indices i, on obtient la somme des dérivées telle que la donne la définition (2). Réciproquement, si l'on part de la définition (2) et qu'on intègre $d\mathrm{R}_n \nabla\!\rightarrow \mathrm{C}$, on obtient, par intégration partielle, la formule générale suivante, qui est équivalente à la définition intégrale du $\nabla\!\rightarrow$:

$$(-1)^{n-1} \int d\mathrm{R}_n \nabla\!\rightarrow \mathrm{C} = \oint d\mathrm{R}_{n-1} \mathrm{C} \ . \tag{10}$$

4. *Itération de l'opérateur. Théorème de Green et théorème connexe.* — L'itération de $\nabla\!\rightarrow$ ou de $\leftarrow\!\nabla$ fournit, quelle que soit la valeur de n, le laplacien, que nous noterons

$$\nabla^2 = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ .$$

Dans E_4, lorsqu'on pose $x_4 = ict$, le laplacien devient le dalembertien

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^3}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ .$$

Etablissons maintenant le théorème de Green relatif à E_n, ce qui par la même occasion, fournira un autre théorème analogue [1]. Envisageons pour cela deux fonctions scalaires (deux invariants de E_n), φ et ψ. Formons $\psi \nabla\!\rightarrow \varphi$ et $\varphi \nabla\!\rightarrow \psi$, puis intégrons $\nabla\!\rightarrow (\psi \nabla\!\rightarrow \varphi)$ et $\nabla\!\rightarrow (\varphi \nabla\!\rightarrow \psi)$. En vertu de (10),

$$(-1)^{n-1} \left\{ \int d\mathrm{R}_n (\nabla\!\rightarrow \psi)(\nabla\!\rightarrow \varphi) + \int d\mathrm{R}_n \psi \nabla^2 \varphi \right\} = \\ = \oint d\mathrm{R}_{n-1} \psi \nabla\!\rightarrow \varphi \ .$$

[1] Il est intéressant de remarquer que la méthode d'identification que nous avons déjà employée et dont nous faisons usage fréquemment fournit toujours deux ou plusieurs identités, dont la parenté est étroite puisqu'elles se déduisent de la même égalité lorsqu'on les établit par la méthode cliffordienne.

Intervertissons φ et ψ, et soustrayons; il vient

$$(-1)^{n-1}\Gamma\int|d\mathrm{R}_n|\left\{(\nabla\rightarrow\psi)(\nabla\rightarrow\varphi)-(\nabla\rightarrow\varphi)(\nabla\rightarrow\psi)\right\}+$$

$$+(-1)^{n-1}\Gamma\int|d\mathrm{R}_n|(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)$$

$$=\Gamma\oint d\Pi(\psi\nabla\rightarrow\varphi-\varphi\nabla\rightarrow\psi)\ .$$

Remarquons que

$$(-1)^{n-1}(\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot\frac{d\Pi}{|d\Pi|}\ ,$$

— où le point signifie que l'on prend l'invariant du produit de deux vecteurs, — est la dérivée normale $d\varphi/d\nu$, ν étant la normale extérieure au sous-espace R_{n-1}. On obtient alors par identification les deux formules

$$\int(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\,|d\mathrm{R}_n|=\oint\left(\psi\frac{d\varphi}{d\nu}-\varphi\frac{d\psi}{d\nu}\right)|d\Pi|\ ,$$

$$2\int(\nabla\rightarrow\psi)\times(\nabla\rightarrow\varphi)\,|d\mathrm{R}_n|=-\oint(\psi\nabla\rightarrow\varphi-\varphi\nabla\rightarrow\psi)\times d\Pi\ ,$$

dont la première est la généralisation, dans E_n, du théorème de Green, et la seconde une formule anonyme. Dans cette seconde relation, la croix désigne le bivecteur du produit de deux vecteurs.

Toutes les opérations représentées par le $\nabla\rightarrow$ au cours de l'établissement de ces théorèmes peuvent être considérées comme définies uniquement par (10). Si l'on convient de définir le laplacien ∇^2 par l'application deux fois répétée de l'opération de limite, le théorème de Green et le théorème connexe conservent leur sens même lorsque les fonctions φ et ψ ne sont pas soumises à la condition d'existence des dérivées partielles de premier et second ordre au moins, pourvu que les limites qui définissent $\nabla\rightarrow\varphi$, $\nabla\rightarrow\psi$, $\nabla^2\varphi$ et $\nabla^2\psi$ existent.

5. *Quelques identités entre des intégrales relatives à* E_3 *et à* E_4. — Dans E_3, on a

$$\int (\nabla\rightarrow C)\,|d\tau| = \oint d\sigma\, C\,.$$

Si $C = \nabla\rightarrow I$ (I = invariant), on obtient par identification des formules bien connues dont l'écriture vectorielle est

$$\int \vec{\nabla}^2 I\,|d\tau| = \oint d\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} I$$

$$\oint d\vec{\sigma}\times\vec{\nabla} I \equiv 0\,.$$

Si $C = \nabla\rightarrow V$ (V = vecteur), on obtient par identification (symboles vectoriels):

$$\int \nabla^2\vec{V}\,|d\tau| = \oint d\vec{\sigma}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} - \oint (\vec{\nabla}\times\vec{V})\times d\vec{\sigma}$$

et

$$\oint d\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \equiv 0\,.$$

On peut établir une formule due à Lord Kelvin. Soit $C = \varphi u\,\nabla\rightarrow\psi$, où φ, u et ψ sont des fonctions scalaires. On a

$$\oint d\sigma\,\varphi\,u\,\nabla\rightarrow\psi = \int \nabla\rightarrow(\varphi\,u\,\nabla\rightarrow\psi)\,d\tau$$

$$= \int (\nabla\rightarrow\varphi)\,u\,(\nabla\rightarrow\psi)\,d\tau + \int \varphi\,\nabla\rightarrow(u\,\nabla\rightarrow\psi)\,d\tau\,.$$

Développant le produit en un produit scalaire et un produit bivectoriel, on obtient par identification la formule cherchée qui s'écrit en symboles vectoriels

$$\int u\,\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi\,|d\tau| = \oint \varphi\,u\,\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\sigma} - \int \varphi\,\vec{\nabla}\cdot(u\,\vec{\nabla}\psi)\,|d\tau|$$

et une formule connexe

$$-\int u\,\vec{\nabla}\varphi\times\vec{\nabla}\psi\,|d\tau| = \oint \varphi\,u\,\vec{\nabla}\psi\times d\vec{\sigma} + \int \varphi\,\vec{\nabla}\times(u\,\vec{\nabla}\psi)\,|d\tau|\,.$$

Dans E_4, on a

$$\int d\rho \, \nabla\!\!\rightarrow \mathrm{C} = -\int d\tau \, \mathrm{C} \; .$$

Si on pose $\mathrm{C} = \nabla\!\!\rightarrow \mathrm{I}$ (I = invariant), on trouve par identification

$$\int |d\rho| \, \nabla^2 \mathrm{I} = -\oint d\xi \cdot \nabla\!\!\rightarrow \mathrm{I}$$

et

$$\oint d\xi \times \nabla\!\!\rightarrow \mathrm{I} \equiv 0 \; .$$

Si on pose $\mathrm{C} = \nabla\!\!\rightarrow \mathrm{V}$ (V = vecteur), on trouve

$$\int |d\rho| \, \nabla^2 \mathrm{V} = -\oint d\xi \, \mathrm{div}\, \mathrm{V} - \oint d\xi \cdot \mathrm{rot}\, \mathrm{V}$$

et

$$\oint d\xi \times \mathrm{rot}\, \mathrm{V} \equiv 0 \; .$$

Si l'on pose enfin $\mathrm{C} = \nabla\!\!\rightarrow \mathrm{T}$ (T = tenseur antisymétrique du second ordre), on obtient par identification les trois identités

$$\int |d\rho| \, \nabla^2 \mathrm{T} = \Gamma \oint d\xi \times \mathrm{max}\, \mathrm{T} - \oint d\xi \times \mathrm{DIV}\, \mathrm{T} \; ,$$

$$\oint d\xi \cdot \mathrm{DIV}\, \mathrm{T} \equiv 0$$

et

$$\oint d\xi \cdot \mathrm{max}\, \mathrm{T} \equiv 0 \; .$$

6. *Quelques identités différentielles relatives à* E_4. — Donnons maintenant quelques relations entre les opérateurs de E_4.[1] Soit, dans E_4, un invariant I. On a

$$\nabla\!\!\rightarrow \mathrm{I} = \mathrm{grad}\, \mathrm{I} \; .$$

L'itération de l'opérateur fournit

$$\nabla^2 \mathrm{I} = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \mathrm{I} + \mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \mathrm{I} \; .$$

[1] Ces relations sont tout-à-fait analogues à celles du paragraphe précédent.

On en déduit par identification

$$\nabla^2 \mathrm{I} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{I}\ ,$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} \equiv 0\ .$$

Soit, d'autre part, un vecteur V de E_4. On a

$$\nabla\!\rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{div}\,\mathrm{V} + \mathrm{rot}\,\mathrm{V}\ .$$

Itérant l'opérateur $\nabla\!\rightarrow$, on obtient

$$\nabla^2 \mathrm{V} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V} + \mathrm{DIV}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{V} + \Gamma\,\mathrm{max}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{V}\ .$$

Par identification, on voit que

$$\mathrm{max}\,\mathrm{rot} \equiv 0$$
$$\mathrm{DIV}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{V} = \nabla^2 \mathrm{V} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\ .$$

Soit enfin un tenseur antisymétrique T. On a

$$\mathrm{T} = \mathrm{DIV}\,\mathrm{T} + \Gamma\,\mathrm{max}\,\mathrm{T}\ .$$

Itérant,

$$\nabla^2 \mathrm{T} = \mathrm{div}\,\mathrm{DIV}\,\mathrm{T} + \mathrm{rot}\,\mathrm{DIV}\,\mathrm{T} - \Gamma(\mathrm{div}\,\mathrm{max}\,\mathrm{T} + \mathrm{rot}\,\mathrm{max}\,\mathrm{T})\ .$$

On en déduit

$$\nabla^2 \mathrm{T} = \mathrm{rot}\,\mathrm{DIV}\,\mathrm{T} - \Gamma\,\mathrm{rot}\,\mathrm{max}\,\mathrm{T}$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{DIV} \equiv 0$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{max} \equiv 0\ ,$$

7. *L'opérateur médian.* — MM. Juvet et Schidlof ont introduit, comme Silberstein, un nouvel opérateur opérant sur un produit de deux nombres de Clifford M et N. Dans E_3, ils définissent cet opérateur par la relation

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3\, \mathrm{M} \leftarrow\!\nabla\!\rightarrow \mathrm{N} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint \mathrm{M}\, d\sigma\, \mathrm{N}}{|\tau|}\ .$$

Dans E_4, ils le définissent en écrivant

$$M \leftarrow \overset{\triangledown}{\nabla} \rightarrow N = \lim_{\rho \to 0} \frac{\oint M \, d\tau \, N}{|\rho|}$$

où $\overset{\triangledown}{\nabla} = \nabla\Gamma = -\Gamma\nabla$.

Nous allons généraliser cet opérateur médian opérant sur un produit. Pour une valeur quelconque de n, on forme le rapport

$$\frac{\oint M \, dR_{n-1} \, N}{|R_n|} .$$

Considérons un point de R_n où M et N prennent les valeurs M_0 et N_0. Lorsque le domaine s'évanouit, on a, sur la frontière de R_n,

$$M = M_0 + dM , \qquad N = N_0 + dN .$$

Par conséquent

$$M \, dR_{n-1} \, N = M_0 \, dR_{n-1} \, N + M \, dR_{n-1} \, N_0 + \\ + dM \, dR_{n-1} \, dN - M_0 \, dR_{n-1} \, N_0 .$$

On remarque que l'intégrale du dernier terme du second membre est nulle, car la frontière de R_n est fermée. D'autre part, le troisième terme est d'ordre infinitésimal supérieur à celui des deux premiers. Donc (si les limites existent)

$$\lim_{R_n \to 0} \frac{\oint M \, dR_{n-1} \, N}{|R_n|} = \lim_{R_n \to 0} \frac{M_0 \oint dR_{n-1} \, N}{|R_n|} + \lim_{R_n \to 0} \frac{\left(\oint M \, dR_{n-1}\right) N_0}{|R_n|} .$$

Si n est pair, il vient

$$\lim_{R_n \to 0} \frac{\oint M \, dR_{n-1} \, N}{|R_n|} = -M \Gamma \nabla \rightarrow N + M \leftarrow \nabla \Gamma N \\ = M \leftarrow \overset{\triangledown}{\nabla} \rightarrow N .$$

D'où la formule d'intégration partielle

$$\int \mathrm{M} \leftarrow\!\!\!

Dans le vide, le champ électromagnétique est un tenseur antisymétrique F formé au moyen du champ magnétique $\vec{H}$ et du champ électrique $\vec{E}$:

$$F = \underbrace{f_{23}\Gamma_2\Gamma_3 + f_{31}\Gamma_3\Gamma_1 + f_{12}\Gamma_1\Gamma_2}_{\vec{H}} + \underbrace{f_{14}\Gamma_1\Gamma_2 + f_{24}\Gamma_2\Gamma_4 + f_{34}\Gamma_3\Gamma_4}_{\vec{E}} .$$

Le courant tridimensionnel et la densité électrique ρ sont groupés en un vecteur de courant

$$S = s_1\Gamma_1 + s_2\Gamma_2 + s_3\Gamma_3 + s_4\Gamma_4 , \qquad (\rho = |s_4|) .$$

On pose (J.S.) les équations de Maxwell sous la forme suivante

$$\nabla\!\rightarrow F = -S .$$

Comme $\nabla\!\rightarrow F$ est un survecteur:

$$\nabla\!\rightarrow F = \mathrm{DIV}\, F + \Gamma \max F ,$$

et que S est un vecteur, il faut que

$$\max F = 0 ,$$

ce qui permet de faire dériver F d'un potentiel en vertu du § 6, chap. II

$$F = \nabla\!\rightarrow \Phi ,$$

où le potentiel Φ est un vecteur dont la divergence doit être nulle

$$\mathrm{div}\, \Phi = 0 .$$

Montrons qu'on peut obtenir les lois de l'électromagnétisme dans le vide sous leur forme cliffordienne par un principe de

$\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = \Gamma_3^2 = -1$, et $\Gamma_4^2 = 1$, pour ne pas introduire le symbole $i = \sqrt{-1}$ dans la quatrième dimensions de l'espace-temps. Nous choisissons cependant tous les carrés positifs pour appliquer facilement les règles d'algèbre et d'analyse données dans les chapitres précédents.

variation. On définira le champ électromagnétique F par la relation

$$F = \nabla\!\!\rightarrow \Phi$$

où Φ est un vecteur appelé le vecteur potentiel.

Se plaçant dans l'espace des potentiels, on définira alors une variation δL à partir d'une variation $\delta\Phi$ du potentiel, et du courant S:

$$\delta L = (\delta F)\Gamma F + (\delta\Phi)\Gamma S$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}\delta L &= \nabla\!\!\rightarrow (\delta\Phi)\Gamma F + (\delta\Phi)\Gamma S \\ &= -(\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla F + (\delta\Phi)\Gamma S\,.\end{aligned}$$

Or

$$(\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla\!\!\rightarrow F = \delta\Phi \nabla\!\!\rightarrow F + (\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla F\,.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\delta L &= -(\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla\!\!\rightarrow F + \delta\Phi(\nabla\!\!\rightarrow F + \Gamma S) \\ &= -(\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla\!\!\rightarrow F + \delta\Phi\Gamma(\nabla\!\!\rightarrow F + S)\,.\end{aligned}$$

Posons

$$\delta A = \int_R \delta L\,|d\rho|\,,$$

$d\rho$ étant ici l'élément géométrique quadridimensionnel. On obtient les équations de l'électromagnétisme en imposant la condition $\delta A = 0$, soit

$$-\int_R (\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla\!\!\rightarrow F\,|d\rho| + \int_R \delta\Phi\, d\rho\,(\nabla\!\!\rightarrow F + S) = 0\,,$$

les intégrales étant étendues à une région d'univers R. Le terme

$$-\int_R (\delta\Phi) \leftarrow\!\!\nabla\!\!\rightarrow F\,|d\rho|$$

se ramène à une intégrale triple

$$\oint \delta\Phi \, d\tau \, \mathrm{F}\,\Gamma$$

prise sur les limites de la région R, en vertu du paragraphe 7 du chapitre II. Conformément aux conventions du calcul des variations, la variation $\delta\Phi$ doit s'annuler sur la frontière de R. Donc cette dernière intégrale est nulle. D'autre part, comme $\delta\Phi$ est arbitraire, il faut que

$$\mathrm{S} = -\nabla\!\!\rightarrow \mathrm{F} \ .$$

A propos des lois de l'électromagnétisme dans le vide, MM. Juvet et Schidlof ont cherché à quelles conséquences conduit l'hypothèse

$$\max \mathrm{F} \neq 0 \ .$$

Elle apporte aux lois observables les modifications suivantes: le champ F reste un tenseur antisymétrique, mais il est quelconque, puisque son maxwellien n'est pas nul. Alors, au lieu du vecteur courant, il faut introduire un survecteur:

$$\mathrm{C} = \mathrm{S} + \Gamma\mathrm{M} \ .$$

pour que l'on puisse toujours poser $\nabla\!\!\rightarrow \mathrm{F} = -\mathrm{C}$, et on interprète M comme un courant magnétique. C'est appelé le courant total. D'autre part, au lieu du vecteur potentiel Φ, il faut prendre un survecteur potentiel $\mathrm{U} = \Phi + \Gamma\Psi$, pour que l'on ait encore

$$\nabla\!\!\rightarrow \mathrm{U} = \mathrm{F} \ ,$$

ce qui implique

$$\operatorname{div}\Phi = \operatorname{div}\Psi = 0$$

et

$$\nabla^2 \mathrm{U} = -\mathrm{C} \ .$$

Ce qu'il y a de remarquable dans l'introduction d'un survecteur potentiel et d'un survecteur courant, c'est qu'elle ne détruit pas le caractère vectoriel de la force de Lorentz, qui

garde la même forme dans la théorie de Maxwell et dans la théorie modifiée où max F $\neq$ 0. Elle vaut (voir J.S.):

$$-\frac{1}{2}\mathrm{F} \leftarrow\nabla\rightarrow \mathrm{F} \ ,$$

et il en résulte que les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement sont exactement les mêmes que celles de la théorie ordinaire.

Les équations suivantes, que sur la proposition de M. Juvet, nous appellerons équations de Schidlof:

$$\mathrm{F} = \nabla\rightarrow \mathrm{U}$$
$$\mathrm{C} = -\nabla\rightarrow \mathrm{F}$$

peuvent être déduites du même principe de variation. En effet, rien n'est changé dans les calculs relatifs à cette variation si l'on prend pour le potentiel, à la place du vecteur Φ, un survecteur U. On écrit alors que le courant est un survecteur C, on définit δL par

$$\delta \mathrm{L} = (\delta \mathrm{F})\Gamma\mathrm{F} + (\delta \mathrm{U})\Gamma\mathrm{C}$$

où F est quelconque (son maxwellien n'est pas nul), et C satisfait à la relation

$$\nabla\rightarrow \mathrm{F} = -\mathrm{C}$$

en vertu du principe de variation

$$\int_{\mathrm{R}} \delta \mathrm{L}\,|d\rho| = 0 \ .$$

On a ainsi ramené les équations de l'électromagnétisme (de Schidlof ou ordinaires) pour le vide à un principe de variation.

2. *Cas des corps en mouvement.* — A. *Définitions.* — La matière, dans son mouvement, est caractérisée par des lignes d'univers, d'arc x, dont la tangente a pour coefficients directeurs les quatre grandeurs suivantes:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dx}\ , \qquad v_2 = \frac{dx_2}{dx}\ , \qquad v_3 = \frac{dx_3}{dx}\ , \qquad v_4 = \frac{dx_4}{dx}\ .$$

Le vecteur $V = \Sigma v_i \Gamma_i$ est le vecteur d'univers de la matière. Par rapport à un certain système de référence galiléen tridimensionnel, la matière a une vitesse $\vec{v}$ telle que

$$(v_1, v_2, v_3) = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} .$$

De plus,

$$v_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - v^2}} .$$

Nous avons posé égale à l'unité la vitesse de la lumière.

Pour représenter les champs et les inductions, il faut introduire deux tenseurs antisymétriques; l'un, F, composé de l'induction magnétique $\vec{B}$ et du champ électrique $\vec{E}$, l'autre ,H, composé du champ magnétique $\vec{H}$ et du déplacement électrique $\vec{D}$:

$$F = \underbrace{f_{23}\Gamma_2\Gamma_3 + f_{31}\Gamma_3\Gamma_1 + f_{12}\Gamma_1\Gamma_2}_{\vec{B}} + \underbrace{f_{14}\Gamma_1\Gamma_4 + f_{24}\Gamma_2\Gamma_4 + f_{34}\Gamma_3\Gamma_4}_{\vec{E}}$$

$$H = \underbrace{h_{23}\Gamma_2\Gamma_3 + h_{31}\Gamma_3\Gamma_1 + h_{12}\Gamma_1\Gamma_2}_{\vec{H}} + \underbrace{h_{14}\Gamma_1\Gamma_4 + h_{24}\Gamma_2\Gamma_4 + h_{34}\Gamma_3\Gamma_4}_{\vec{D}}$$

Le courant électrique quadridimensionnel S est formé comme dans le cas du vide.

B. *Relations invariantes entre les champs et les inductions, et théorème de Lorentz.* — Dans un milieu homogène et isotrope, ces équations s'écrivent sous la forme cliffordienne (invariante) que voici

$$\left.\begin{aligned} H \cdot V &= \varepsilon F \cdot V , \\ F \times V &= \mu H \times V . \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

où ε et μ sont la constante diélectrique et la perméabilité magnétique de la matière, et V sa direction d'univers.

Ces équations contiennent implicitement le théorème de relativité de Lorentz. En effet, désignons par des astérisques

les valeurs des champs et des inductions que fournissent des appareils de mesure en repos par rapport à la matière:

$$\frac{1}{i}\overrightarrow{E^*} = (f^*_{14}, f^*_{24}, f^*_{34})$$

$$\frac{1}{i}\overrightarrow{D^*} = (h^*_{14}, h^*_{24}, h^*_{34})$$

$$\overrightarrow{B^*} = (f^*_{23}, f^*_{31}, f^*_{12})$$

$$\overrightarrow{H^*} = (h^*_{23}, h^*_{31}, h^*_{12}) .$$

Il suffit de faire $|v_4| = 1$, $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ (c'est-à-dire $\vec{v} = 0$) dans les équations (11) pour obtenir les relations

$$\overrightarrow{D^*} = \varepsilon\,\overrightarrow{E^*} ,$$
$$\overrightarrow{B^*} = \mu\,\overrightarrow{H^*} .$$

D'autre part, une décomposition en espace et en temps consisterait à séparer les termes des équations (11) en ceux qui contiennent Γ_1, Γ_2, Γ_3, d'une part, et ceux qui contiennent Γ_4, d'autre part, ces derniers correspondant à l'axe du temps. Identifiant alors les termes en Γ_1, Γ_2, Γ_3, on voit qu'il faut poser

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} &= \overrightarrow{E^*} \\ \text{et} \qquad \vec{D} + \vec{v} \times \vec{H} &= \overrightarrow{D^*} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

pour retrouver la relation $\overrightarrow{D^*} = \varepsilon\overrightarrow{E^*}$, et

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E} &= \overrightarrow{B^*} \\ \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} &= \overrightarrow{H^*} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

pour retrouver la relation $\overrightarrow{B^*} = \mu\overrightarrow{H^*}$.

Les expressions (12) et (13) sont la base du théorème de relativité de Lorentz. Elles sont implicitement contenues dans (11).

C. *Courant de conduction et courant de convection.* — Le courant électrique S quadridimensionnel se compose, d'une part du courant tridimensionnel dû au mouvement des charges

dans la matière, d'autre part de celui dû à l'entraînement des charges au repos, par suite du mouvement de celle-ci [1]. Cette seconde partie due à l'entraînement des charges, et qui est mesurée par le vecteur — V (V.S) (le signe — provenant du caractère imaginaire de la quatrième dimension), n'intervient pas dans la relation qui lie le courant au champ. Soit σ la conductibilité électrique de la matière. Soustrayant — V (V.S) de S, la relation en question s'écrit

$$S + V(V \cdot S) = \sigma F \cdot V .$$

Si, dans cette relation, on pose $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, il vient

$$\overrightarrow{s^*} = \sigma \overrightarrow{E^*} , \tag{14}$$

où $\overrightarrow{s^*}$ est le courant tridimensionnel.

Une décomposition en espace et en temps suivie d'une identification des termes telle qu'on l'a faite au sujet du théorème de relativité, entraîne, afin de respecter (14), la relation suivante

$$\vec{s} - \vec{v}\,\frac{\rho - \vec{v} \cdot \vec{s}}{1 - v^2} = \sigma \frac{\overrightarrow{E^*}}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{15}$$

où l'on a posé

$$s_4 = i\rho ,$$

$$v_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - v^2}} ,$$

donc

$$v_4 s_4 = - \frac{\rho}{\sqrt{1 - v^2}} .$$

Dans la relation (15), la quantité

$$\vec{v}\,\frac{\rho - \vec{v} \cdot \vec{s}}{1 - v^2}$$

est le courant de convection, et $\vec{s}$ le courant total. On remarquera

[1] Par le terme « courant » nous entendons réellement la densité de courant.

que la relation (14), soit la loi de conductibilité, n'est valable que pour $\vec{v} = 0$.

D. *Equations du champ. Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.* — En présence de la matière, la forme cliffordienne des équations du champ est la suivante: le champ F dérive d'un potentiel Φ:

$$F = \nabla\rightarrow \Phi$$

ce qui nécessite que

$$\operatorname{div} \Phi = 0 ,$$

puisque F est un tenseur de second ordre. Et comme max rot $\equiv 0$, on a nécessairement

$$\max F = 0 . \tag{16}$$

D'autre part, le courant est relié au tenseur H par la relation

$$S + \mathrm{DIV}\, H = 0 \tag{17}$$

et comme div DIV $\equiv 0$, il s'en suit que

$$\operatorname{div} S = 0$$

ce qui exprime la conservation de l'électricité.

Des relations suivantes, valables pour le vide: $F = \nabla\rightarrow \Phi$, et $-S = \nabla\rightarrow F$, on déduit l'équation (J.S.):

$$\nabla^2 \Phi = -S$$

qu'on peut appeler l'équation de Poisson. Dans la matière, on ne peut pas écrire cette équation. On a DIV H $= -$ S, mais d'autre part, le maxwellien de H n'est pas nul, aussi ne peut-on pas faire dériver H d'un potentiel. F dérive bien d'un potentiel, puisque son maxwellien est nul, mais sa divergence vectorielle n'est pas égale au courant. On ne peut donc pas écrire l'équation de Poisson.

Considérons maintenant plus spécialement les équations (16) et (17). En les combinant on obtient

$$F \cdot \mathrm{DIV}\, H + H \times \max F + F \cdot S = 0 \tag{18}$$

Or F · S est la force de Lorentz $\sum_i \sum_k f_{ik} s_k \Gamma_i$. (18) exprime la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. On est ramené au vide en posant $\varepsilon = \mu = 1$, ce qui fournit bien la relation

$$\mathrm{F} \cdot \mathrm{S} + \frac{1}{2} \mathrm{F} \leftarrow\nabla\rightarrow \mathrm{F} = 0$$

donnée par MM. Juvet et Schidlof.

Dans le vide, la force de Lorentz est rattachée à la mécanique par la relation (J.S.)

$$m_0 \frac{d\mathrm{V}}{dx} + \frac{1}{2} \mathrm{F} \leftarrow\nabla\rightarrow \mathrm{F} = 0$$

où m_0 est la densité de la répartition matérielle, et V sa direction d'univers. Comme $\mathrm{V}.d\mathrm{V} = 0$, on doit avoir

$$(\mathrm{F} \cdot \mathrm{S}) \cdot \mathrm{V} = 0$$

c'est-à-dire que la force de Lorentz est toujours orthogonale à la direction d'univers de la matière.

Reprenons la relation (18) en examinant sa signification du point de vue tridimensionnel. On peut la soumettre à une décomposition en espace et en temps. Les termes correspondant à la quatrième composante du vecteur que représente le premier membre de (18) se traduisent en langage vectoriel par

$$\vec{\mathrm{E}} \cdot \dot{\vec{\mathrm{D}}} + \vec{\mathrm{H}} \cdot \dot{\vec{\mathrm{B}}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}} + \vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{s} = 0 \,.$$

$-\vec{\mathrm{E}} \,.\, \vec{s}$ est le travail de Joule par unité de temps et de volume, qui entraîne une diminution de la densité d'énergie électromagnétique tandis que la divergence du vecteur de Poynting exprime l'afflux d'énergie rayonnante.

Il est plus intéressant d'examiner les termes d'espace provenant de la décomposition de (18). En effet, ils représentent la variation de la quantité de mouvement, et se traduisent par la relation

$$\vec{\mathrm{B}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{H}}) + \vec{\mathrm{D}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}}) - \vec{\mathrm{E}}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}} - \vec{\mathrm{H}}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathrm{D}} \times \vec{\mathrm{B}}) + \rho \vec{\mathrm{E}} + \vec{\mathrm{B}} \times \vec{s} = 0 \,. \qquad (19)$$

Le terme $\rho\vec{E}$ correspond à la force de Coulomb, et $\vec{B} \times \vec{s}$ à l'action dynamique de l'induction sur le courant (Loi de Biot et Savart). Dans le vide, (19) se réduit à

$$\vec{H} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}\,\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \vec{H}\,\vec{\nabla} \cdot \vec{H} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{H}) + \rho\vec{E} + \vec{H} \times \vec{s} = 0$$

qui est une relation connue [1]. On déduirait de (19) la force résultante $\vec{K}$ à l'intérieur d'un volume τ contenant de la matière dont la perméabilité et la constante diélectrique sont des tenseurs symétriques, ce volume étant traversé par de l'énergie électromagnétique:

$$\vec{K} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \vec{\mathcal{S}}\,d\tau - (\varepsilon\mu - 1)\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \vec{\mathcal{S}}\,d\tau + \int_\sigma (\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}) \,.\, \vec{d\sigma} - \int_\sigma W\,\vec{d\sigma}\,,$$

où il s'ajoute à la force $-\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{\mathcal{S}}\,d\tau$ bien connue ($\vec{\mathcal{S}}$ = vecteur de Poynting) des termes dépendant du vecteur de Poynting, des tenseurs $\vec{D}\vec{E}$ et $\vec{B}\vec{H}$ (tensions de Maxwell) et de la densité d'énergie. Par suite du passage de l'énergie rayonnante dans un milieu différent du vide, il se produit une action mécanique proportionnelle à la variation dans le temps de cette énergie, et qui est d'autant plus faible que le produit $\varepsilon\mu$ se rapproche de l'unité.

3. *Indétermination du vecteur potentiel.* — Nous allons montrer que le potentiel électromagnétique Φ, solution de l'équation $F = \nabla\rightarrow \Phi$, n'est pas complètement déterminé.

Il est certain que le champ F est univoque; par conséquent, si nous avons trouvé deux solutions Φ' et Φ'' de l'équation $F = \nabla\rightarrow \Phi$, leur différence $\psi = \Phi'' - \Phi'$ doit satisfaire à la relation

$$\nabla\rightarrow \psi \equiv 0\,.$$

[1] Voir par exemple L. Page, *Introduction to theoretical Physics* (N. Y., 1930, 3d. ed., p. 442).

Cette conclusion s'applique au cas du vide. Comme $\operatorname{div}\Phi' = \operatorname{div}\Phi'' = 0$, $\operatorname{div}\psi$ est nulle. Cela montre que ψ est le gradient d'une fonction scalaire φ:

$$\psi = \Phi'' - \Phi' = \nabla\rightarrow \varphi \ .$$

Cette fonction φ n'est pas arbitraire, car, soit $\Phi = \Phi' + \nabla\rightarrow \varphi$ la solution choisie de l'équation de Poisson, on doit avoir

$$F = \nabla\rightarrow \Phi = \nabla\rightarrow \Phi' + \nabla^2 \varphi \ .$$

Comme F est un tenseur et $\nabla^2 \varphi$ une grandeur scalaire, il faut que

$$\nabla^2 \varphi = 0 \ .$$

4. *Ondes électromagnétiques.* — Il est en général impossible de donner une forme invariante à l'équation de propagation d'ondes électromagnétiques dans la matière. On y parvient dans le cas particulier du vide, et dans celui d'un milieu où les deux tenseurs F et H sont égaux. On a alors rigoureusement propagation d'ondes dans une région où le courant est nul.

En effet, par hypothèse, $F = H$; alors $S + \nabla\rightarrow F = 0$, et s $S = 0$, on a

$$\nabla^2 F = 0$$

ce qu'on peut écrire, au moyen du dalembertien $\square$,

$$\square F = 0 \ .$$

Comme $F = H$, on peut tout aussi bien écrire

$$\square H = 0 \ .$$

Il se propage une onde F et une onde H, soit une onde $\vec{B}$, $\vec{E}$, et une autre $\vec{H}$, $\vec{D}$.

On a aussi $\nabla^2\Phi + S = 0$; donc, si $S = 0$,

$$\square \Phi = 0 \ ,$$

qui exprime la propagation d'une onde de potentiel.

Dans la matière, si $S = 0$, $\mathrm{DIV}\, H = 0$, ou

$$\nabla\rightarrow H - \Gamma \max H = 0 \ ,$$

et comme div max $\equiv 0$,

$$\nabla^2 \mathrm{H} + \Gamma \operatorname{rot} \max \mathrm{H} = 0 \ .$$

Le rotationnel d'un maxwellien n'est en général pas nul, cette équation ne représente donc pas une propagation d'ondes. Même si ε et μ sont des constantes, on ne peut pas dire que max H $= 0$, bien que max F $= 0$, car H n'est pas proportionnel à F.

Dans un milieu polarisable, la relation

$$\nabla^2 \mathrm{H} + \Gamma_5 \operatorname{rot} \max \mathrm{H} = 0$$

se réduit à $\Box \mathrm{H} = 0$ si rot max H $= 0$; c'est le cas si l'on a

$$\max \mathrm{H} = \operatorname{grad} \mathrm{h} \ ,$$

h étant une fonction scalaire. Nous savons que div max $\equiv 0$ et que div grad $\equiv \nabla^2$, donc h satisfait à l'équation des ondes

$$\nabla^2 h = \Box h = 0 \ .$$

Pour le tenseur F, on trouve quelque chose d'analogue. On a

$$\nabla^2 \mathrm{F} = \operatorname{rot} \mathrm{DIV\ F}$$

puisque div DIV $\equiv 0$ et que max F $= 0$. On pourrait écrire $\nabla^2 \mathrm{F} = \Box \mathrm{F} = 0$ si l'on avait rot DIV F $= 0$; ce serait le cas si

$$\mathrm{DIV\ F} = \operatorname{grad} f$$

et la fonction scalaire f satisferait, comme h, à la relation

$$\Box f = 0 \ .$$

On ne trouve pas non plus d'onde de potentiel, puisqu'il est impossible de donner à F une forme particulière dont la divergence vectorielle s'annulle identiquement.

Si F varie lentement, DIV F est approximativement nulle, et $\Box \Phi \sim 0$; on a alors une onde de potentiel sans dispersion appréciable dans une région d'univers suffisamment petite. Dans ce cas, il y a aussi une équation d'onde en F, mais pas nécessairement en H.

5. *Forme intégrale des lois de l'électromagnétisme.* — Les résultats obtenus aux paragraphes 3 et 5 du chapitre II nous permettent de transformer sans difficulté les lois différentielles en relations entre intégrales.

Dans le vide, on obtient tout d'abord

$$\int |d\rho|\, \mathrm{S} = \oint d\xi \cdot \mathrm{F} ,$$

relation que l'on pourrait appeler le théorème de Gauss. Appelons flux électromagnétique élémentaire $\delta\mathcal{H}$ l'expression

$$\delta\mathcal{H} = d\xi \cdot \mathbf{F} .$$

Le flux à travers une hypersurface ouverte T sera

$$\mathcal{H} = \int_{\mathrm{T}} \delta\mathcal{H} .$$

Donc, à travers une hypersurface fermée, le flux vaut

$$\mathcal{H}_0 = \int |d\rho|\, \mathrm{S}$$

et l'intégrale $\int |d\rho|\, \mathrm{S}$, que nous appellerons électricité totale à l'intérieur de l'hypervolume ρ, joue le rôle de source du flux.

On a, d'autre part,

$$\oint d\xi \times \mathrm{F} = 0 .$$

Si on définit une autre espèce de flux comme étant le produit $\times$ de $d\xi$ par F, ce flux $\mathcal{F}$ est toujours nul à travers n'importe quelle hypersurface fermée.

La conservation de l'électricité s'écrit

$$\oint d\xi \cdot \mathrm{S} = 0 ,$$

et dans la théorie modifiée de Schidlof, on aurait également conservation des pôles magnétiques

$$\oint d\xi \cdot \mathrm{M} = 0 .$$

On obtient l'équation de propagation d'ondes dans le vide à partir de la relation

$$\int |d\rho| \nabla^2 \mathrm{F} = \Gamma \oint d\xi \times \max \mathrm{F} - \oint d\xi \times \mathrm{DIV\,F} .$$

Cette relation doit être vraie pour un hypervolume quelconque; or max F = 0; par suite, si le courant S = — DIV F est nul, $\nabla^2 \mathrm{F} = 0$.

On a enfin une relation intégrale entre le champ F et le potentiel:

$$\int |d\rho| \mathrm{F} = \oint d\xi \times \Phi .$$

Dans la matière, ces relations sont modifiées de la manière suivante:

Entre le courant et le tenseur H existe la relation

$$\int |d\rho| \mathrm{S} = \oint d\xi \cdot \mathrm{H} ,$$

et si on définit le flux $\mathcal{H}$ à travers une hypersurface T en posant

$$\mathcal{H} = \int_{\mathrm{T}} d\xi \cdot \mathrm{H}$$

on peut toujours dire que $\int |d\rho| \mathrm{S}$ joue le rôle de source du flux, c'est-à-dire que le flux total $\mathcal{H}_0$ à travers une hypersurface fermée est égal à l'électricité totale (théorème de Gauss):

$$\mathcal{H}_0 = \int |d\rho| \mathrm{S} .$$

On peut encore définir un second flux $\mathcal{F}$, en posant

$$\mathcal{F} = \int_{\mathrm{T}} d\xi \times \mathrm{F} .$$

Le flux $\mathcal{F}_0$ à travers une hypersurface fermée est toujours nul.

La conservation de l'électricité s'écrit comme pour le cas du vide

$$\oint d\xi \cdot \mathrm{S} = 0 ,$$

et l'on a encore la relation

$$\int |d\rho| \, \mathrm{F} = \oint d\xi \times \Phi$$

entre le champ F et le potentiel. Rappelons que si l'on appelle φ une fonction scalaire quelconque,

$$\oint d\xi \times \operatorname{grad} \varphi \equiv 0 ,$$

ce qui montre de nouveau que Φ est déterminé à un gradient près.