

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 17 (1935)

**Artikel:** La mécanique des corps déformables [suite et fin]  
**Autor:** Weissenberg, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741554>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA MÉCANIQUE DES CORPS DÉFORMABLES

PAR

**K. WEISSENBERG**

(University College, Southampton)

(Avec 5 fig.)

(suite et fin)

---

## III. — LA DYNAMIQUE DE L'ÉLÉMENT DE VOLUME ET LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

Pour appliquer le principe de d'Alembert à l'élément de volume d'un corps déformable nous suivons le chemin suivant. Nous considérons  $d\varphi$  comme un agrégat de  $N$  points matériels  $P_n$ . Si chaque point pouvait être déplacé arbitrairement dans l'espace nous aurions  $3N$  degrés de liberté pour les déplacements possibles de  $d\varphi$ . Mais par définition  $d\varphi$  ne peut se déplacer que d'une manière linéaire. Soient  $(1)$  et  $(\bar{1})$  deux situations arbitraires,  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les coordonnées correspondantes d'un point matériel par rapport à un système  $\Sigma$  de coordonnées trirectangulaires. Le déplacement  $(1\bar{1})$  sera représenté par la transformation linéaire

$$\bar{x}_i = \tau_i + x_h \psi_{hi} ,$$

où  $\tau_i$  et  $\psi_{hi}$  peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur  $\tau$  et d'un tenseur  $\psi$ . Nous avons donc douze degrés de liberté,  $3\tau_i$  et  $9\psi_{hi}$ , pour les déplacements possibles du point  $P_n$ . Les composantes  $\tau_i$  et  $\psi_{hi}$  peuvent être considérées comme des coordonnées géométriques généralisées de  $d\varphi$  (ou ce

qui revient au même de l'agrégat des  $P_n$  dans  $d\nu$ ), déterminant la position ( $\bar{1}$ ) de  $d\nu$  par rapport à la position (1) choisie comme position de référence. Si on introduit un espace à 12 dimensions, chaque position de  $d\nu$  ou de l'agrégat des  $P_n$  pourrait être représenté par un point à 12 coordonnées. Le déplacement linéaire ( $\bar{1}\bar{1}$ ) est représenté dans cette image par le vecteur ( $\bar{1}\bar{1}$ ), ayant pour origine le point qui représente la position ( $\bar{1}$ ) et pour extrémité le point représentant la position (1). Dans le système de coordonnées introduit, ce vecteur a les douze composantes  $\tau_i$  et  $\psi_{hi}$ .

La cinématique de  $d\nu$  est décrite alors si l'on donne  $\tau_i$  et  $\psi_{hi}$  en fonction du temps. Chaque coordonnée détermine la *position* de  $d\nu$  selon le degré de liberté associé à cette composante.

La dynamique est basée sur les énoncés de Newton et Boltzmann, qui précisent la définition fondamentale de la force mécanique. Ces énoncés se résument — comme on l'a mentionné dans l'introduction — en un principe de variation virtuelle, le théorème de d'Alembert.

Nous admettons que l'action dynamique exercée sur  $d\nu$  est représentée par des variables forces extérieures, fonctions du temps,  $fe_\sigma$  et  $fe_\mu$ , agissant respectivement sur la surface  $\sigma$  et sur la masse  $\mu$  de  $d\nu$ . Le problème exact de la mécanique de  $d\nu$  revient à déterminer une composante de l'action dynamique correspondant à chacun des douze degrés de liberté choisis pour la description de la cinématique, puis à déterminer pour ces douze degrés de liberté les relations entre ces composantes dynamiques et les variables cinématiques.

La détermination des composantes dynamiques correspondant aux composantes cinématiques introduites se fait en écrivant le travail virtuel accompli par  $d\nu$ . Soit  $\delta\mathcal{V}e$  la densité du travail virtuel,

$$\delta\mathcal{V}e = p_m \delta x_m$$

où  $x_m$  représente une composante d'une coordonnée généralisée de position dans le degré de liberté  $m$ , et  $p_m$  la composante dynamique correspondant à  $x_m$ ;  $\delta x_m$  est une variation virtuelle de  $x_m$ . La direction et la dimension de  $p_m$  varient selon le choix de  $x_m$ ; si par exemple  $x_m$  représente une composante de trans-

lation,  $p_m$  est une densité vectorielle de force, si  $x_m$  est un angle de rotation,  $p_m$  est une densité tensorielle de moment de rotation, etc.

En général les  $p_m$  sont des composantes de densités tensorielles, c'est-à-dire des pseudo-tenseurs<sup>1</sup>, pourvu que les  $x_m$  soient des composantes de tenseurs, car le produit des  $p_m$  par les  $\delta x_m$  est une densité scalaire, donc un pseudo-scalaire. Si on détermine les composantes dynamiques correspondant aux composantes  $\tau_i$  et  $\psi_{hi}$  de la cinématique, on trouve des relations extrêmement compliquées en général, étant donné la liberté que nous avons dans le choix des variables. Nous ferons ce choix de manière que le principe de d'Alembert s'exprime pour  $d\varphi$  dans la forme la plus simple et la plus intuitive possibles, et nous déterminerons les variables cinématiques correspondantes au moyen du théorème du travail virtuel.

Pour adapter la forme dans laquelle nous avons introduit le principe de d'Alembert au cas particulier d'un élément de volume  $d\varphi$  il faut appliquer ce principe à la portion infinitésimale  $dm$  de la matière contenue dans  $d\varphi$  — ce qu'on fait en rapportant les travaux à l'unité de masse. Les variations virtuelles de ces travaux par unité de masse seront désignées par  $\delta\mathcal{V}e^*$ ,  $\delta\mathcal{V}e^*$  et  $\delta\mathcal{V}i^*$ .

On a tout d'abord

$$(\delta\mathcal{V}e^*)_r = (\delta\mathcal{V}e^*)_r + (\delta\mathcal{V}i^*)_r.$$

Or  $(\delta\mathcal{V}e^*)_r$  est nul pour toute action dynamique exercée dans les six degrés de liberté qui correspondent aux déformations pures virtuelles; ce principe exprime par conséquent que toute action dynamique exercée sur un élément suffisamment petit du corps peut être décomposée à chaque instant en deux parties:

Une partie, attachée aux six degrés de liberté de la déformation pure, effectue un travail virtuel dans un de ces six degrés au moins, mais un travail virtuel nul le long de tout déplacement virtuel rigide; il y correspond comme action dynamique une densité tensorielle symétrique  $P$  appelée la *tension* et définie par

<sup>1</sup> La théorie des pseudo-tenseurs a été donnée par Brillouin (*Ann. de Phys.*, III, p. 251, 1925).

$(\delta \mathcal{E}^*(P))_r = 0$ ; c'est elle seule qui est à chaque instant en équilibre avec les forces intérieures. L'autre partie, attachée aux six degrés de liberté qui correspondent aux déplacements rigides, effectue un travail virtuel selon ces six degrés de déplacement rigide seulement. Cette partie seule est en équilibre avec les forces d'inertie. Nous la décomposerons en une densité vectorielle de force  $F$  et une densité tensorielle antisymétrique de moment de rotation  $M$ , de sorte que  $F$  n'effectue de travail virtuel que par suite d'une translation, et  $M$  par suite d'une rotation. En désignant par  $J$  et  $\mathcal{J}$  la densité vectorielle des forces d'inertie et la densité tensorielle antisymétrique du moment résultant des forces d'inertie, le principe de d'Alembert s'exprime par

$$F + J = 0$$

et

$$M + \mathcal{J} = 0 ,$$

et

$$P - \tilde{P} = 0 .$$

Les composantes de ces densités tensorielles  $F$ ,  $M$  et  $P$  sont les composantes dynamiques les mieux adaptées au principe fondamental de la mécanique. Nous nous proposons premièrement de déterminer  $F$ ,  $M$  et  $P$  en fonction des forces extérieures  $fe_\sigma$  et  $fe_\mu$ , et deuxièmement de trouver les variables géométriques correspondantes.

Nous définirons des variables dynamiques en écrivant des relations de proportionnalité entre  $fe_\mu$  et  $d\nu$ , d'une part,  $fe_\sigma$  et  $\sigma$ , de l'autre:

$$fe_\mu = F_\mu d\nu ,$$

$$fe_\sigma = II \cdot \frac{1}{2} \sigma \times ^1 .$$

<sup>1</sup>  $\sigma$  est une surface, donc un tenseur antisymétrique de deuxième ordre. C'est le produit vectoriel de deux vecteurs  $a$  et  $b$  infiniment petits, qui s'exprime dans la forme tensorielle par:

$$\sigma = [ab] = a_i b_j (e_i e_j - e_j e_i) ,$$

d'où l'on tire la forme pseudo-vectorielle

$$\frac{1}{2} \sigma \times = a_i b_j e_k ,$$

les trois indices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  se rapportant aux trois axes de coordonnées pour lesquelles on choisit un ordre de succession  $i j k$ .

$F_\mu$  est une densité vectorielle et  $\Pi$  une densité tensorielle.  
On a alors

$$P = \frac{1}{2}(\Pi + \tilde{\Pi}) \quad \text{avec } P = \tilde{P}$$

$$M = \frac{1}{2}(\Pi - \tilde{\Pi}) \quad \text{avec } M = -\tilde{M}$$

$$F = F_v + \operatorname{div} P^1.$$

Si on exprime  $F$ ,  $M$  et  $P$  dans un système trirectangulaire portant des vecteurs unités  $e_k$  on trouve pour  $F$  trois composantes dynamiques  $F_k$  dans les trois degrés de liberté de la translation. On trouve de même neuf composantes pour  $M$ , mais à cause de l'antisymétrie, les trois composantes  $M_{ii}$  sont nulles et  $M_{ik} = -M_{ki}$ , soit: trois composantes indépendantes pour les trois degrés de liberté de la rotation. Enfin, il y a neuf composantes pour  $P$ , mais à cause de la symétrie,  $P_{ik} = P_{ki}$ , ce qui réduit à six le nombre des composantes indépendantes de  $P$  pour les six degrés de liberté de la déformation.

Il nous faut maintenant les variables cinématiques en fonction de  $\tau$  et  $\psi$ , et correspondant à  $F$ ,  $M$  et  $P$ . Pour les trouver, il faut reprendre la décomposition du déplacement linéaire en

<sup>1</sup> Les grandeurs tensorielles  $\Pi$ ,  $P$  et  $M$  qui sont définies à l'aide de  $\frac{1}{2}\sigma_{\times}$  sont des densités tensorielles qui, par multiplication avec le volume donnent de vrais tenseurs. On les appelle des pseudo-tenseurs. Si on veut éviter l'emploi des pseudo-tenseurs il faut poser  $f\sigma = \Pi \dots d\sigma$ , où  $\Pi$  représente un tenseur du troisième ordre et  $d\sigma$  le même tenseur antisymétrique du deuxième ordre que plus haut. On obtient pour la tension et le moment de rotation de vrais tenseurs de troisième ordre  $P_{\text{III}}$  et  $M_{\text{III}}$ ; leurs composantes se déterminent à partir de celles des pseudo-tenseurs  $P$  et  $M$  de la manière suivante

$$(P_{\text{III}})_{lii} = (M_{\text{III}})_{lii} = 0 ,$$

$$(P_{\text{III}})_{lij} = - (P_{\text{III}})_{lji} = \frac{1}{2} P_l^k ,$$

$$(M_{\text{III}})_{lij} = - (M_{\text{III}})_{lji} = \frac{1}{2} M_l^k .$$

Nous préférons nous en tenir aux pseudo-tenseurs, qui sont plus simples que les vrais tenseurs, ayant moins de composantes (voir L. Brillouin, *l. c.*).

translation, rotation et déformation, et faire correspondre à ces trois mouvements une grandeur vectorielle ou tensorielle qui satisfasse les conditions imposées par le théorème du travail virtuel. Ces grandeurs vectorielles et tensorielles, multipliées respectivement par  $F$ ,  $M$  et  $P$ , doivent donner la densité du travail virtuel correspondant.

Ces variables cinématiques cherchées sont les suivantes: le *vecteur de translation*  $\tau$  correspondant à  $F$ , le *tenseur d'angle de rotation*  $\omega = \ln \omega = \ln ((\psi \cdot \tilde{\psi}^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi))$  correspondant à  $M$  (on a  $\omega = -\tilde{\omega}$ ), et le *tenseur de déformation*  $s = sa = \ln \mathfrak{D}a = \ln (\psi \cdot \tilde{\psi})$  correspondant à  $P$  (on a  $s = \tilde{s}$ ). La translation est représentée comme d'habitude par un vecteur. La rotation est représentée par un tenseur antisymétrique  $\omega$ . Enfin, la déformation est caractérisée par un tenseur symétrique  $s$  dont les axes principaux sont trirectangulaires et parallèles aux directions dans lesquelles l'allongement trirectangulaire antérotationnel est effectué. Les valeurs propres  $s_k$  de  $s$  mesurent la déformation dans ces directions, déformations représentées par le logarithme de l'allongement. Les composantes  $\tau_k$ ,  $\omega_{ik}$  et  $s_{ik}$  correspondent aux composantes  $F_k$ ,  $M_{ik}$  et  $P_{ik}$ , et sont considérées comme composantes des variables géométriques généralisées dans les douze degrés de liberté de translation, de rotation et de déformation. Ayant déterminé les variables cinématiques et dynamiques dans chaque degré de liberté nous trouvons finalement ce que nous cherchions, la densité du travail virtuel en fonction de ces variables:

$$\delta \mathcal{E}e = F \cdot \tau + M \cdot \omega + P \cdot s .$$

Nous pouvons encore donner au principe de d'Alembert une autre forme, qui n'est pas limitée aux déplacements virtuels rigides, mais permet d'étudier les variations des travaux virtuels par unité de masse correspondant à tous les déplacements virtuels admis pour  $d\nu$ , c'est-à-dire tous les déplacements linéaires virtuels.

Nous ne donnerons ici cette forme que pour le cas spécial dans lequel le volume ne varie pas. Dans ce cas les variations virtuelles des travaux par unité de masse peuvent être rempla-

cées par celles prises par unité de volume qui seront désignées par  $\delta \mathcal{G}ei$ ,  $\delta \mathcal{G}e$  et  $\delta \mathcal{G}i$  (sans astérisque).

Remarquons que dans ce cas

$$\delta \mathcal{G}i - (\delta \mathcal{G}i)_r = 0$$

et

$$\delta \mathcal{G}e - (\delta \mathcal{G}e)_r = (\delta \mathcal{G}e)_d ,$$

où  $(\delta \mathcal{G}e)_d$  est la densité du travail virtuel accompli par les forces extérieures le long d'un déplacement particulier qui est une déformation pure. Cela nous permet d'écrire

$$(\delta \mathcal{G}ei)_r = \delta \mathcal{G}e + \delta \mathcal{G}i - (\delta \mathcal{G}e)_d = 0 .$$

Rappelons que

$$\delta \mathcal{G}ei = \delta \mathcal{G}e + \delta \mathcal{G}i$$

où  $\delta \mathcal{G}ei$  est la somme des densités de travaux virtuels accomplis par les forces extérieures et les forces d'inertie, on obtient

$$\delta \mathcal{G}ei = (\delta \mathcal{G}e)_d = P .. s .$$

Cette relation exprime l'équilibre entre la partie des forces extérieures qui agit dans les degrés de liberté associés aux déplacements rigides et les forces d'inertie; elle fournit de plus pour la partie restante des forces extérieures — c'est-à-dire pour la tension — un théorème d'anisotropie virtuelle, qui sera discuté dans le chapitre de la mécanique.

Remarque: *Application de la théorie des groupes avec déplacements linéaires successifs.* — La décomposition que nous avons faite des variables mécaniques est valable pour chaque instant séparément. Elle ne donne aucun renseignement sur la composition des actions successives. Ce problème doit être étudié tout spécialement. Nous n'insisterons ici que sur le fait que les variables mécaniques attachées aux six degrés de liberté des déplacements rigides (translation et rotation) forment un groupe par rapport à une suite d'opérations effectuées sur le même  $d\boldsymbol{v}$ . En effet, si on applique à  $d\boldsymbol{v}$  successivement deux déplacements rigides, ou successivement des densités de force et des moments de rotation, le résultat est toujours un déplacement rigide, une densité résultante de forces ou un moment de rotation résultant. Il n'en est pas de même pour les

variables attachées aux six degrés de liberté de la déformation. En effet le résultat de deux déplacements successifs dont chacun est une déformation pure n'est pas nécessairement une déformation pure mais en général un déplacement linéaire composé d'une rotation et d'une déformation pure. Dans le cas seulement où les déformations pures successives sont parallèles à des directions fixes par rapport au milieu déformable ou, ce qui revient au même, fixes par rapport au système de référence  $\Sigma_m$ , dans ce cas seulement les déformations pures forment un groupe, c'est-à-dire que deux déformations pures successives sont équivalentes à une seule. La théorie exacte de la superposition des déplacements successifs a été donnée dans le chapitre précédent. On peut dire en résumé qu'un élément suffisamment petit d'un corps matériel quelconque cède aux forces extérieures, à chaque instant, selon les six degrés de liberté qui correspondent aux déplacements rigides exactement comme un corps rigide de même masse, c'est-à-dire comme si les autres degrés de liberté n'existaient pas. Et si l'on fait agir sur  $d\varphi$ , à partir d'un état (0) isotrope et non-travaillé, une tension changeant d'intensité mais dans des directions fixes par rapport au milieu déformable,  $d\varphi$  cède (dans le système de référence défini par ces directions) selon les trois degrés de liberté de la déformation comme si les autres degrés n'existaient pas. On obtient un résultat analogue en effectuant des allongements trirectangulaires sans changer l'orientation. Par contre cela n'est plus vrai si la tension ou les allongements successifs changent d'orientation par rapport au milieu.

Dans le développement systématique de la mécanique d'un élément de volume  $d\varphi$  nous notons donc les éléments suivants: 1<sup>o</sup> une mécanique rigide pour six degrés de liberté (translation et rotation), 2<sup>o</sup> une mécanique de déformation pure pour les trois degrés de liberté associés, 3<sup>o</sup> la mécanique des déformations quelconques, fondée sur des lois de superposition qui sont données dans le chapitre précédent et qui doit être établie dans les neuf degrés de liberté des déformations et des rotations, 4<sup>o</sup> la mécanique des déplacements linéaires quelconques pour les douze degrés de la liberté de  $d\varphi$ .

## IV. — LA MÉCANIQUE DE L'ÉLÉMENT DE VOLUME.

1. — *Théorie thermodynamique.*

Dans l'évolution des systèmes mécaniques (en particulier des matières colloïdales) peuvent se présenter des phénomènes très divers; par exemple des phénomènes calorifiques réversibles et irréversibles, des changements de structure, des transformations chimiques, des phénomènes électriques, etc. Tout changement d'état est *déterminé ou non du point de vue mécanique* suivant qu'il peut être représenté ou non, indépendamment du temps, comme fonction des variables mécaniques seules. Nous aurons pour objet de rechercher l'expression de lois entre les variables mécaniques et les changements d'état déterminés du point de vue mécanique. Si l'on se plaçait du point de vue plus strict de la mécanique ordinaire, on se bornerait à écrire des lois entre les variables mécaniques elles-mêmes, donc à déterminer une liaison entre les variables dynamiques et l'état cinématique.

Pour la représentation quantitative des lois de la mécanique, une unification des variables est nécessaire. Si l'on choisit celles-ci de telle manière que ces lois s'expriment aussi simplement que possible, on trouve (voir les chapitres précédents) que la densité de force  $F$ , le moment de rotation  $M$  et la tension  $P$ , d'une part, et le vecteur de translation  $\tau$ , le tenseur antisymétrique d'angle de rotation  $W$  et le tenseur symétrique de tension  $S$  ainsi que les vitesses, accélérations, etc., de ces grandeurs sont les variables mécaniques qui conviennent le mieux. Le problème de leur combinaison a été étudié dans le chapitre consacré à la superposition.

Il n'a été mis en jeu jusqu'ici que la mécanique proprement dite, se bornant à l'application du principe de d'Alembert, qui ne fournit aucun renseignement sur la liaison qui existe entre l'état de la tension et l'état de la déformation. Pour combler cette lacune (voir l'introduction), nous proposons de déduire

des deux premiers principes de la thermodynamique une « équation d'état mécanique » qui, jointe au principe de d'Alembert, conduira à une description générale de l'évolution des corps déformables, pour autant qu'ils sont déterminés du point de vue mécanique. Les deux premiers principes de la thermodynamique apparaissent dans leur forme la plus simple, si on les applique à un système à température constante et à masse et énergie fermées. Nous pouvons réaliser un tel système de la manière suivante. Premièrement nous mettons le corps déformable à étudier dans un bain qui, par sa grande capacité de chaleur, maintient la température constante; deuxièmement, nous y adjoignons une masse capable d'effectuer sur le corps n'importe quel travail mécanique et troisièmement nous enfermons le tout entre des parois imperméables à l'énergie et à la matière. C'est à ce système adiabatique et isotherme en même temps — et non pas le corps déformable isolé — que nous appliquerons les principes de la thermodynamique; il en résulte que pour tout élément de masse et en chaque instant la somme de la puissance  $\dot{\mathcal{E}}$  développée par les forces extérieures, de la puissance  $\dot{\mathcal{F}}$  de l'énergie libre et de celle  $\dot{\mathcal{G}}$  de l'énergie liée s'annule, ces puissances étant rapportées à l'unité de masse:

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{F}} + \dot{\mathcal{G}} = 0.$$

Nous dirons que le corps déformable est déterminé ou non au point de vue mécanique suivant que les trois puissances en question s'expriment, indépendamment du temps, en fonction seulement des variables mécaniques ou non. Pour les corps déterminés l'équation ci-dessus établit une nouvelle relation entre les variables dynamiques et cinématiques et donne ainsi une idée générale des propriétés mécaniques des corps en question; les fonctions dans cette équation sont caractéristiques pour le corps déformable et les constantes qui y interviennent déterminent d'une manière quantitative ses propriétés mécaniques; en général on trouve donc pour chaque corps une équation caractéristique différente. C'est pourquoi cette équation sera nommée *équation d'état mécanique* du corps.

Cette équation d'état étant tout à fait générale et par conséquent valable pour tout corps déterminé au point de vue mécanique nous en déduisons les traits généraux de la mécanique des corps déformables. Nous discuterons ces traits généraux dans ce chapitre. (La théorie complète a déjà été publiée dans « Die Mechanik deformierbarer Körper », *Abhdlg. d. Preuss. Akademie d. Wissenschaften*, Jahrgang 1931, Heft No. 2.) Nous ne donnerons ici qu'un bref aperçu.

On peut, grâce à des considérations tirées de la théorie des groupes, imaginer une classification des corps déformables en familles de corps analogues entre eux. Aux corps d'une même famille correspondent des équations d'état pouvant se déduire l'une de l'autre par un groupe de transformations. L'analogie des corps réunis ainsi dans une même famille consiste en ce qu'il suffit de connaître les résultats expérimentaux relatifs à un seul corps de cette famille pour pouvoir déterminer ceux de tous les autres; les mêmes transformations qui font passer de l'équation d'état du corps choisi à celle des autres corps de la famille transforment les conditions dans lesquelles se trouve le corps examiné ainsi que les résultats de l'examen en ceux qui correspondent aux autres corps. Un exemple relevant l'utilité de cette classification réside dans la *similitude mécanique*. Si on réunit dans une famille tous les corps dont les équations d'état se déduisent de celle d'un corps de référence par les transformations de similitude<sup>1</sup>, on dira que les corps d'une telle famille sont semblables au point de vue mécanique et on peut aisément transformer toutes les expériences faites sur un corps en celles concernant un corps semblable au moyen d'une transformation convenable de similitude. Outre les applications bien connues de Reynold, le groupement des corps déformables en familles

<sup>1</sup> Soient  $l$ ,  $m$ ,  $t$  les unités de longueur, de masse et de temps (par exemple, 1 cm, 1g, 1 sec.) dans un système arbitraire de référence; on en déduit les unités  $l'$ ,  $m'$ ,  $t'$  d'un autre système par les transformations de similitude

$$l' = L \cdot l$$

$$m' = M \cdot m$$

$$t' = T \cdot t$$

où  $L$ ,  $M$ ,  $T$  sont des constantes.

est très avantageux dans le domaine des colloïdes. Une série d'applications faites dans le domaine de la pratique sur diverses solutions de cellulose, pour des températures et des concentrations variant dans des limites très larges, et faites avec différents solvants, montrent que ces solutions sont des corps semblables entre eux au sens précisé plus haut. Quantité d'autres solutions colloïdales de caoutchouc, de gélatine, etc., font partie de la même famille. L'essai de les analyser au moyen de la théorie décrite est très satisfaisant. (Voir divers travaux de K. WEISSENBERG, B. RABINOWITSCH, R. EISENSCHITZ et PHILIPPOFF, *Mitteilungen der dtsch. Materialprüfungsanstalten* IX.21.1929; *Zs. f. phys. Chem.*, A **145**, I, 1929; *Ber. der dtsch. Chem. Ges.*, **64**, 2522, 31 et *Phys. Zs.*, **35**, 883, 1934.)

Si l'on se fonde sur l'équation d'état, la mécanique des corps déformables se présente sous forme d'un cycle, que nous illustrerons ici pour une catégorie spéciale de corps déformables, ceux qui sont *incompressibles* (parce que l'hypothèse de l'incompressibilité est une grande simplification). Dans ce cas l'équation d'état établie pour les puissances rapportées à l'unité de masse est valable aussi pour les mêmes puissances rapportées à l'unité de volume. C'est sous cette forme que nous ferons usage de l'équation d'état dans la suite, car les densités de puissances s'expriment en fonction des variables mécaniques d'une manière plus simple que les puissances spécifiques.

En appliquant le chapitre de d'Alembert, on obtient (voir le chapitre *Dynamique*):

$$\begin{aligned} F &= \rho \cdot \ddot{\tau} = F_x + \operatorname{div} P \\ \rho \cdot \ddot{W} &= M, \end{aligned}$$

où  $\rho$  est la densité et  $\ddot{\tau}$  l'accélération linéaire de l'élément de volume sur lequel s'applique une densité de force résultante  $F$ ,  $\ddot{W}$  son accélération angulaire et  $M$  le moment qui lui imprime une rotation.

Si on multiplie la première équation par  $\frac{1}{2}\tau$ , la deuxième par  $\frac{1}{2}W$  et qu'on fait la somme, on trouve que la puissance de l'énergie cinétique est égale à la puissance des forces extérieures

développée le long de la partie rigide du mouvement. Soustrayant la relation de cet équilibre de l'équation d'état, on obtient pour des corps incompressibles:

$$-P \cdot \dot{S} + \dot{\Phi} + \dot{G} = 0,$$

où le produit scalaire changé de signe de la tension  $P$  et de la vitesse de déformation  $\dot{S}$  est égal à la puissance des forces extérieures le long de la déformation contenue dans le mouvement (cette puissance est la différence entre la puissance totale des forces extérieures  $\dot{\mathcal{T}}$  et la puissance développée le long de la partie rigide du mouvement),  $\dot{\Phi}$  est la puissance du potentiel interne  $\Phi$  du système (cette puissance est la différence entre celle de l'énergie libre  $\dot{\mathcal{F}}$  et celle de l'énergie cinétique); finalement  $\dot{G}$  est la puissance de l'énergie liée du système (toutes ces puissances sont toujours rapportées à l'unité de volume).

Du second principe de la thermodynamique découlent des restrictions sur les fonctions  $\Phi$  et  $\dot{G}$ . En vertu de la réversibilité d'un changement du travail en énergie libre,  $\dot{\Phi}$  doit être la dérivée totale  $\frac{d\Phi}{dt}$  par rapport au temps d'une fonction  $\Phi$  des variables mécaniques seules, car  $d\Phi$  doit être une différentielle totale. Par contre, en vertu de l'irréversibilité du changement du travail en énergie liée, il faut que

$$\dot{G} \geq 0$$

d'où l'on déduit que c'est  $\dot{G}$  et non pas  $G$  qu'on peut donner en fonction des variables mécaniques seules, car  $dG$  n'est jamais une différentielle totale. Pour exprimer cette différence fondamentale entre  $\dot{\Phi}$  et  $\dot{G}$  nous introduisons dans l'équation d'état  $\Phi$  en écrivant  $\frac{d\Phi}{dt}$  au lieu de  $\dot{\Phi}$ , mais nous y laissons  $\dot{G}$  et n'introduisons pas  $G$  en écrivant  $\frac{dG}{dt}$  parce que  $G$  n'est pas une fonction des variables mécaniques seules.

Un corps incompressible déterminé au point de vue mécanique a donc pour équation d'état

$$-P \cdot \dot{S} + \frac{d\Phi}{dt} + \dot{G} = 0$$

où

$$\Phi = \Phi(\mathcal{V}_n)$$

$$\dot{G} = \dot{G}(\mathcal{V}_n),$$

$\mathcal{V}_n$  symbolisent les variables mécaniques (tension  $P$ , déformation  $S$ , ainsi que leur vitesse, leur accélération, etc.  $\dot{P}$ ,  $\dot{S}$ ,  $\ddot{P}$ ,  $\ddot{S}$ , etc. (la température, supposée constante, n'intervient pas dans ces fonctions).

Le traitement explicite de l'équation d'état se fait de la manière suivante: Lorsqu'on résout l'équation par rapport à la tension ou à la déformation, on obtient celles-ci sous forme d'intégrales dans le temps d'une fonction de la déformation, ou de la tension. Cette intégration nécessite l'introduction des états antérieurs du système, afin que l'on puisse estimer les constantes qu'elle introduit. Nous obtenons de la sorte une théorie de « post-action ».

Selon les trois termes dont l'équation d'état est composée nous distinguons trois domaines particuliers pour lesquels un de ces trois termes s'annule. A chaque corps déformable on associe trois corps idéalisés, dont le premier est parfaitement élastique, le deuxième parfaitement visqueux et le troisième a une relaxation parfaite de l'énergie libre. Les équations d'état de ces trois corps s'obtiennent à partir de l'équation d'état du corps déformable en y annulant un des trois termes. On est ainsi ramené à trois équations:

$$1^{\circ} \quad -P \cdot \dot{S} + \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad -P \cdot \dot{S} : \frac{d\Phi}{dt} : \dot{G} = -1 : 1 : 0$$

$$2^{\circ} \quad -P \cdot \dot{S} + \dot{G} = 0 \quad \text{avec} \quad -P \cdot \dot{S} : \frac{d\Phi}{dt} : \dot{G} = -1 : 0 : 1$$

$$3^{\circ} \quad \frac{d\Phi}{dt} + \dot{G} = 0 \quad \text{avec} \quad -P \cdot \dot{S} : \frac{d\Phi}{dt} : \dot{G} = 0 : -1 : 1$$

On en déduit que si on détermine les variables mécaniques de manière que la condition rattachée à 1<sup>o</sup> (resp. 2<sup>o</sup> ou 3<sup>o</sup>) soit remplie, le corps déformable se comporte du point de vue

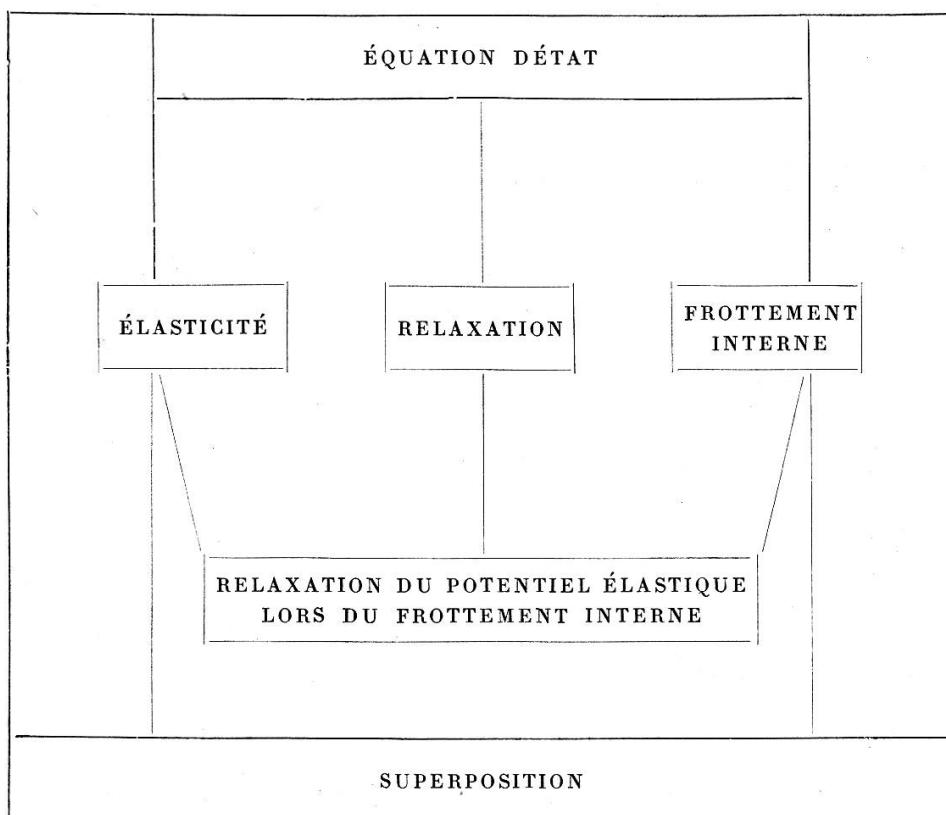
énergétique exactement comme le corps d'élasticité (viscosité, relaxation) parfaite qu'on lui a associé.

La première équation donne ainsi la théorie d'élasticité du corps déformable, et la condition accessoire détermine des variables mécaniques et par conséquent un état cinématique et dynamique dans lequel le corps déformable montre une élasticité parfaite. La deuxième et la troisième équations donnent de même la théorie du frottement interne et de la relaxation ainsi que les conditions dans lesquelles le corps déformable montre une viscosité ou une relaxation parfaite.

Ces trois lois, obtenues pour des domaines particuliers, ne sont toutefois pas indépendantes. Voici en quoi: elles sont, comme l'équation d'état elle-même, des équations différentielles par rapport au temps et aux variables de tension et de déformation. Les constantes qu'elles contiennent sont les constantes des matériaux.

Nous appellerons les constantes intervenant dans  $\Phi$  et  $G$  coefficients d'élasticité et de viscosité. Or, les trois lois dont il est question ne contiennent que deux ( $\Phi$  et  $G$ ) et non pas trois fonctions indépendantes; on doit donc pouvoir calculer, à partir des constantes de deux de ces lois les valeurs des constantes de la troisième. Ce calcul constitue la théorie de la relaxation du potentiel élastique au cours du frottement interne. La décomposition ainsi effectuée de l'équation d'état, suivie de la détermination des constantes, revient en quelque sorte à une analyse du corps déformable étudié en trois corps idéaux, corps de relaxation, corps élastique et corps visqueux, dont deux seulement sont définis d'une manière indépendante. Si on y ajoute une synthèse, qu'on réalise par la superposition des trois cas particuliers obtenus, on ferme le cycle de nos théories. Dans cette théorie de superposition on mélange pour ainsi dire les trois corps imaginés provisoirement pour reformer le corps primitif. En général on peut donner une analogie de ce cycle dans la théorie de l'électricité en faisant correspondre la tension  $P$  à la tension électrique et la vitesse de déformation à l'intensité du courant électrique. Un élément de volume  $d\nu$  du milieu déformable correspond alors à un schéma de réductance comprenant des capacités et des résistances

ohmiques<sup>1</sup> qui correspondent aux résistance d'élasticité et de frottement interne de  $d\varphi$ . L'énergie potentielle  $\Phi$  correspond alors à l'énergie du champ électrique contenu dans les capacités et la puissance  $\dot{G}$  à la puissance développée par la tension électrique dans les résistances ohmiques. On réalise aisément avec un tel schéma l'analyse des trois cas particuliers qui correspondent aux cas d'élasticité, de viscosité et de relaxation parfaite; le schéma des résistances et capacités est une sorte d'illustration de la théorie de la superposition. La méthode de calcul que nous avons ainsi exposée se résume au moyen du schéma suivant:



Diverses applications de cette théorie ont été faites dans le domaine des solutions colloïdales (voir par exemple Philippoff, *Phys. Zs.*, 35, 883, 1934).

<sup>1</sup> L'inductance correspondrait à la résistance d'inertie. Comme nous avons séparé de l'équation d'état générale le principe de d'Alembert qui traite les phénomènes d'inertie, ceux-ci n'apparaissent plus ici; c'est pourquoi dans ce schéma, l'inductance n'intervient pas.

Le calcul complet est plus ou moins compliqué suivant la forme qu'on attribue aux fonctions  $\Phi$  et  $G$ . Il y a deux classes de corps déformables pour lesquelles le cycle s'interprète d'une manière simple et intuitive.

Ce sont les corps P et les corps S pour lesquels  $\Phi$  et  $G$  sont respectivement des fonctions des variables dynamiques ( $P$ ,  $\dot{P}$ ,  $\ddot{P}$  ...) ou des variables cinématiques ( $S$ ,  $\dot{S}$ ,  $\ddot{S}$  ...) seulement. L'élément de volume  $d\omega$  d'un corps P (ou d'un corps S) est représenté par un schéma dans lequel la capacitance est en parallèle (ou en série) avec la résistance ohmique, et la loi du schéma en parallèle (en série) est parfaitement analogue à la loi de superposition valable pour les corps P (corps S). Pour les corps déformables des autres catégories, le schéma est plus compliqué.

Nous avons montré que l'équation d'état seule permet d'achever le développement systématique de la mécanique des corps déformables. Il est commode d'abord d'étudier les différents phénomènes (d'inertie, d'élasticité, de viscosité, de relaxation, etc.) dans des conditions simples afin de déterminer l'équation d'état d'un corps envisagé et d'en déduire les constantes des matériaux puis de rechercher comment se comporte dans des conditions générales et compliquées le corps dont l'équation d'état et les propriétés mécaniques sont connues. C'est en principe ce chemin que nous suivrons. Il nous faut tout d'abord relever une difficulté que l'on rencontre en procédant ainsi. Voici en quoi elle consiste: Le principe de d'Alembert est équivalent à six équations scalaires, l'équation d'état à une seule, puisqu'elle est elle-même une équation scalaire; nous avons donc sept équations pour les 11 degrés de liberté du cas général<sup>1</sup>.

Il est donc nécessaire d'introduire des hypothèses nouvelles qui permettent de substituer à la place de l'équation d'état scalaire une équation tensorielle reliant les tenseurs qui représentent les variables cinématiques à ceux de nature dynamique.

<sup>1</sup> A cause de l'incompressibilité postulée l'élément de volume dispose d'un degré de liberté de moins que dans le cas des déplacements linéaires quelconques, donc  $12 - 1 = 11$  degrés de liberté.

L'hypothèse nécessaire pour le début du chemin que nous nous proposons de suivre est aisée à faire. Nous avons vu dans les chapitres précédents, qu'il est utile de séparer les déplacements élémentaires en déplacements rigides (de translation et rotation) d'une part et déformations pures isotropes de volume et anisotropes à volume constant d'autre part. Nous étudierons tout d'abord le corps déformable à l'état (0) non travaillé et sujet aux déplacements élémentaires en nous plaçant dans les conditions les plus simples. La mécanique des mouvements rigides est complètement déterminée par le principe de d'Alembert et ne sera pas discutée ici; les déformations isotropes de volume n'existent pas pour les corps incompressibles de sorte qu'il ne nous faut considérer que les déformations pures anisotropes à volume constant. Pour plus de simplicité nous nous bornerons ici à la discussion des corps déformables qui dans l'état (0) sont isotropes. Dans ce cas particulier les directions des axes principaux de tous les tenseurs dynamiques et cinématiques sont parallèles à des directions fixées dans le milieu pendant tout le mouvement et on peut admettre que l'équation d'état est valable séparément pour chacune de ces directions. Cette hypothèse permet de passer de l'équation d'état scalaire à l'équation tensorielle cherchée. Nous insistons sur le fait que cette hypothèse n'est valide que pour les déformations pures de corps incompressibles et isotropes à l'état (0). Mais dans ce cas alors elle donne très probablement une bonne approximation, car si on admet qu'il existe une relation linéaire entre les tenseurs dynamiques et les tenseurs cinématiques, on peut la justifier pleinement (voir l'appendice).

Ayant trouvé ainsi l'équation d'état sous une forme satisfaisante on procède à l'examen du corps déformable d'après le cycle indiqué dans la discussion générale. Les calculs explicites sont très simples pour ce cas particulier, car les hypothèses que nous avons faites entraînent que dans un système mobile  $\Sigma_m$  de référence, qui suit la partie rigide du mouvement à partir de l'état (0) non travaillé:

a) Les dérivés  $\frac{dS}{dt}, \frac{d^2S}{dt^2}, \dots, \frac{d^nS}{dt^n}$  du tenseur  $S$  par rapport au temps, sont identiques aux tenseurs  $\dot{S}, \ddot{S}, \dots, \dot{\dot{S}}$  donnant la vitesse,

l'accélération... de la déformation  $S$ ; de même les dérivés  $\frac{dP}{dt}$ ,  $\frac{d^2P}{dt^2}$  ...  $\frac{d^n P}{dt^n}$  par rapport au temps de la tension  $P$  sont identiques aux tenseurs donnant la vitesse, l'accélération...  $\dot{P}$ ,  $\ddot{P}$  ...  $\ddot{\dot{P}}$  de la tension  $P$ ;

- b) Tous les tenseurs mentionnés sous a) sont des déviateurs et sont parallèles entre eux;
- c) La superposition de deux déformations successives conformes aux hypothèses de ce cas particulier s'exprime par une loi additive

$$\bar{S} = S + s .$$

Nous avons étudié tout spécialement les corps  $P$  et  $S$  dans les dites conditions. Ces deux catégories de corps déformables montrent dans leurs propriétés mécaniques deux extrêmes; les détails qui s'y rapportent ayant été publiés dans le travail cité ci-dessus, nous nous contentons de dire que l'image d'un schéma en parallèle ou en série d'une capacité et d'une résistance ohmique donne une illustration parfaite de toutes leurs propriétés mécaniques.

Passons à la seconde partie du chemin que nous avons à suivre. La question qui se pose ici est la suivante: Admettant que l'équation d'état d'un certain corps soit connue sous une forme satisfaisante, comment se comporte ce corps dans des conditions générales et compliquées ? En particulier, comment se comporte le corps s'il est dans un état travaillé (1) obtenu à partir de l'état (0) par des déformations ou des tensions quelconques ? Pour plus de simplicité nous admettrons ici aussi que le corps est incompressible et isotrope dans l'état non travaillé (0). Le passage de l'équation d'état scalaire à une équation tensorielle ne peut pas se faire dans le cas général à l'aide de l'hypothèse supplémentaire introduite dans le cas spécial des déformations pures. Nous admettrons éventuellement dans le chapitre suivant une relation tensorielle entre les tenseurs dynamiques et les tenseurs cinématiques au lieu d'une hypothèse nouvelle (comme, par exemple, une généralisation de la loi d'élasticité de Hooke ou du frotte-

ment interne de Newton); cette relation remplacera l'équation d'état. (Si on veut appliquer la théorie cyclique donnée plus haut on repasse d'abord de cette forme tensorielle à la forme scalaire de l'équation d'état en ramenant tous les termes à trois:  $P .. S$ ,  $\frac{d\Phi}{dt}$  et  $\dot{G}$ , et l'on procède alors comme il a été indiqué <sup>1</sup>).

## 2. — *La mécanique de l'élément de volume dans l'état travaillé.*

La mécanique des corps dans un état (1) travaillé se fonde sur les lois de superposition d'un effort accessoire à un effort primaire ayant fait passer d'un état initial non-travaillé à l'état travaillé. Pour plus de simplicité nous supposerons avoir affaire à des milieux déformables incompressibles qui, dans l'état non-travaillé, sont isotropes.

La théorie des superpositions des déplacements linéaires (y compris les déformations) a été donnée plus haut d'une manière générale. Nous prendrons pour état (0) l'état isotrope non-travaillé. Si nous connaissons l'équation d'état d'un certain corps sous une autre forme qui donne la relation entre les grandeurs dynamiques  $P, P, \dots P$  et les grandeurs  $S, S, \dots S$ , où la déformation  $S$  est comptée à partir de l'état (0) non-travaillé, nous pourrions déduire à l'aide des lois de superposition la relation entre les grandeurs dynamiques et cinématiques où la déformation est comptée à partir de l'état (1) prédéformé arbitraire. Nous donnerons un bref aperçu de cette théorie.

Dans la première partie de ce travail, nous avons supposé que tous les tenseurs dynamiques et cinématiques sont parallèles, c'est-à-dire, ont mêmes directions d'axes principaux. Pour les corps prédeformés les tenseurs dynamiques et cinématiques ne sont pas parallèles, et l'angle entre ces tenseurs joue un

<sup>1</sup> On passe de l'équation tensorielle à la forme scalaire de l'équation d'état en la multipliant par le tenseur  $P$  de tension ou celui de vitesse de déformation  $\dot{S}$  avec une double contraction et en tenant compte des propriétés des fonctions  $\frac{d\Phi}{dt}$  et  $\dot{G}$  que nous avons notées dans la première partie de ce chapitre.

rôle fondamental dans les expressions mathématiques des lois. En admettant que les milieux sont isotropes à l'état (0) (non travaillé) on démontre qu'en général la résistance mécanique dans l'état (1) travaillé varie essentiellement avec la direction dans laquelle agit l'effort accessoire. C'est donc une anisotropie « accessoire » de la résistance mécanique, à l'état (1) travaillé, l'état (0) non travaillé étant isotrope; cette anisotropie accessoire a en général une symétrie rhombique. (Dans des cas particuliers elle peut être plus élevée.) On a souvent comparé cette anisotropie accessoire à celle d'un cristal anisotrope dans l'état (0) ayant une symétrie rhombique. Mais l'anisotropie accessoire de la résistance mécanique dans l'état (1) du milieu diffère complètement de celle d'un cristal rhombique dans l'état (0) si l'état (1) est caractérisé par une tension anisotrope<sup>1</sup>.

On peut cependant comparer cette anisotropie accessoire résultant d'une tension anisotrope dans l'état (1) à celle d'un champ de forces. Si on effectue un déplacement dans un champ de forces on observe une résistance dépendant du cosinus de l'angle  $\gamma$  entre le vecteur force et le vecteur déplacement. On effectuera un travail positif, nul ou négatif, suivant que  $\gamma$  est compris entre  $0^\circ$  et  $\pm 90^\circ$ , égal à  $\pm 90^\circ$  ou compris entre  $180^\circ$  et  $\pm 90^\circ$ . Nous allons montrer que l'anisotropie accessoire d'un milieu parfaitement élastique est tout à fait analogue pourvu qu'on remplace l'angle entre le vecteur force et le vecteur déplacement par l'angle absolu entre le tenseur de tension dans l'état (1) et le tenseur de la déformation accessoire. (Il faut néanmoins effectuer du travail positif dans toutes les directions si l'on veut déformer un cristal anisotrope à partir de son état (0).) En général l'anisotropie d'un état (1) travaillé peut être décomposée en anisotropie provenant d'une tension anisotrope et une anisotropie d'un type analogue à celle d'un

<sup>1</sup> En effet un corps isotrope à l'état (0) montre dans l'état (1) travaillé, à part une anisotropie accessoire mécanique, en général aussi une anisotropie accessoire optique, magnétique, électrique, etc.; chacune de celles-ci est tout à fait analogue à l'anisotropie correspondante d'un cristal rhombique dans l'état (0) non travaillé; c'est seulement l'anisotropie accessoire de propriétés mécaniques qui peut en différer essentiellement.

cristal anisotrope dans l'état (0); cette seconde partie peut être produite par une déformation anisotrope.

Dans la suite nous nous bornerons à l'étude des corps incompressibles et isotropes dans l'état (0) non travaillé.

Cela entraîne les simplifications suivantes:

1<sup>o</sup> Toutes les constantes dans l'équation d'état sont des scalaires;

2<sup>o</sup> Toutes les variables cinématiques sont des déviateurs;

3<sup>o</sup> Toutes les variables dynamiques peuvent être décomposées en somme d'un tenseur isotrope et d'un déviateur; comme la partie isotrope de la tension effectue un travail nul le long de tout déplacement à volume constant nous admettrons dans ce qui suit que les variables dynamiques sont aussi des déviateurs.

*Le théorème de l'anisotropie du travail virtuel.*

Dans le chapitre de la dynamique nous avons donné au principe de d'Alembert la forme suivante:

$$(\delta \mathcal{V}_{ei}^*)_r = 0 ,$$

où  $\delta \mathcal{V}_{ei}^*$  est la somme des travaux  $\delta \mathcal{V}_e^*$  et  $\delta \mathcal{V}_i^*$  effectués par les forces extérieures et les forces d'inertie le long d'un déplacement virtuel  $\delta$ , tout travail étant rapporté à l'unité de masse; l'indice  $r$  indique que le déplacement virtuel  $\delta$  est rigide, qu'il est donc donné par une transformation

$$\bar{R} = \tau + R \cdot \omega \quad \text{avec} \quad \omega \cdot \dot{\omega} = I .$$

Pour les corps rigides cette forme du principe nous donne tout les renseignements nécessaires. Pour les corps incompressibles mais déformables pour lesquels tous les déplacements à volume constant (rigide ou non rigide) sont permis, nous préférons une autre forme qui nous renseigne sur les travaux virtuels accomplis au cours de tout déplacement à volume constant; il est aussi préférable, comme dans le chapitre précédent, de rapporter tout travail à l'unité de volume au lieu

de l'unité de masse. En désignant par  $\delta \mathcal{V}_{ei}$ ,  $\delta \mathcal{V}_e$  et  $\delta \mathcal{V}_i$  (sans astérisque) les densités des travaux et par  $\delta_d$  une variation virtuelle à volume constant on obtient

$$(\delta \mathcal{V}_{ei})_d = P \cdot s ,$$

où  $\delta_d$  est représenté par la transformation linéaire à volume constant

$$\bar{R} = \tau + R \cdot \psi$$

avec  $\psi_{III} = 1$ , et

$$s = \frac{1}{2} \ln (\psi \cdot \tilde{\psi}) ,$$

avec  $s_1 = 0$ ; ou encore

$$(\delta \mathcal{V}_{ei})_d = P \cdot s = |P| |s| \cos (Ps) ,$$

où  $\cos (Ps)$  est le cosinus de l'angle absolu entre les tenseurs  $P$  et  $s$ ,  $s$  étant un déviateur.

Cette nouvelle forme du principe de d'Alembert est valable pour tous les milieux, quelles que soient leurs propriétés mécaniques et leur état cinématique et dynamique. Si on considère le milieu déformable à un instant  $t = t_1$  donné, il se trouve dans un certain état (1) et la tension a une valeur définie  $P$ ; la formule ci-dessus exprime que la densité du travail virtuel accompli par la somme des forces extérieures  $fe$  et des forces d'inertie  $fi$  le long d'un déplacement linéaire virtuel  $\delta_d$  (rigide ou non) est identique à celle du travail effectué par la tension  $P$  des  $fe$  selon la déformation antérotationnelle  $s$  contenue dans  $\delta_d$  et ne dépend ni du placement (01) ni de l'état cinématique dans lequel l'élément de volume se trouve, mais seulement de son état dynamique (qui définit  $P$ ) et de  $\delta_d$ . Si on prend pour  $\delta_d$  un déplacement rigide  $\delta_d$ ,  $s = 0$  et par conséquent  $(\delta \mathcal{V}_{ei})_r = 0$ , quelle que soit l'orientation dans laquelle il est effectué, selon l'expression habituelle du principe. Mais si on prend pour  $\delta_d$  un déplacement linéaire non rigide on obtient un théorème général sur l'anisotropie virtuelle de  $\delta \mathcal{V}_{ei}$ , que nous allons discuter, car l'anisotropie réelle de l'élément de volume est en relation intime avec cette anisotropie virtuelle.

Si on applique ce principe à l'état (0) où  $P = 0$  ou à un état ( $\bar{0}$ ) pour lequel  $P$  est isotrope:  $P = \frac{1}{3}P_i \cdot I$ , on a que  $(\delta \mathcal{G}ei)_d = 0$  quelle que soit l'orientation dans laquelle  $\delta_d$  est effectué, car le produit scalaire d'un tenseur isotrope par un déviateur est nul; dans ce cas  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  ne dépend pas de l'orientation de  $\delta_d$  et nous dirons que  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  est isotrope. Par contre, si on applique ce principe à un état (1) quelconque pour lequel  $P$  est anisotrope on trouve que  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  varie avec l'orientation de  $\delta_d$ ; nous dirons alors qu'il est anisotrope. Cette anisotropie s'exprime d'une manière intuitive dans l'espace à 9 dimensions.

Dans l'espace à 9 dimensions (voir l'appendice) nous pouvons considérer  $P$  et  $s$  comme des vecteurs  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{s}$ ; les grandeurs de ces vecteurs sont identiques aux valeurs absolues de  $P$  et de  $s$  et leur produit scalaire au produit doublement scalaire de  $P$  et  $s$ . Donc

$$(\delta \mathcal{G}ei)_d = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s} = |\mathfrak{P}| |\mathfrak{s}| \cos(\mathfrak{P} \mathfrak{s}).$$

L'anisotropie virtuelle, due à la présence du cosinus, et qui est en rapport avec l'espace à 9 dimensions, est formellement identique à ce qui apparaît au sein d'un champ de force tri-dimensionnel, où la densité du travail virtuel s'exprime par

$$\delta \mathcal{G} = |F| |\delta s| \cos(F \delta s).$$

Lorsqu'on se déplace dans un tel champ en suivant la direction de la force ou sa projection sur un axe avec lequel elle forme un angle aigu, le travail effectué est positif. Si la trajectoire est perpendiculaire au champ, il n'y a pas de travail. Dans les autres directions il est négatif. Il en est de même dans l'espace à 9 dimensions. Cependant si l'on cherche à expliquer cette anisotropie virtuelle 9-dimensionnelle au moyen des trois seules dimensions de l'espace ordinaire, il ne faut pas perdre de vue que l'angle absolu entre les deux vecteurs  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{s}$  n'a pas toujours une représentation simple dans l'espace ordinaire, car il dépend non seulement de l'orientation relative des deux trièdres d'axes principaux des tenseurs, mais aussi de leur forme

respective<sup>1</sup>. Pour déterminer l'orientation de  $s$  par rapport à  $P$  nous désignons les angles formés par les axes principaux de  $P$  et de  $s$  par  $\alpha_{jk}$ ; la variation de  $(\delta \mathcal{V}ei)_d$  avec l'orientation de  $s$ , c'est-à-dire l'anisotropie en question, s'exprime alors par

$$(\delta \mathcal{V}ei)_d = P_k s_j \cos^2 \alpha_{jk} .$$

Il y a un cas très spécial dans lequel l'interprétation est très simple; c'est le cas des déviateurs symétriques plans (l'angle absolu entre deux déviateurs symétriques dans le même plan se trouve être juste égal au double de l'angle formé par les axes principaux de même indice des tenseurs). Dans ce cas on a

$$(\delta \mathcal{V}ei)_d = P_k s_k \cos 2\alpha = |P| |s| \cos 2\alpha ,$$

où  $\alpha$  est l'angle formé par les axes principaux de même indice de  $P$  et  $s$ . L'anisotropie virtuelle s'exprime alors dans l'espace ordinaire de la manière suivante: Supposons qu'une membrane plane soit le siège d'un champ déviateur homogène de tension et que les directions d'axes principaux de  $P$  et de  $s$  dans cette membrane soient marquées par deux paires de vecteurs unités orthogonaux  $ep_1 \perp ep_2$  et  $ea_1 \perp ea_2$ . L'angle  $\alpha$  est alors égal à  $\angle(ep, ea) = \angle(ea_2, ep_2)$ . Les valeurs propres  $s_k$  de  $s$  et  $P_k$  de  $P$  sont de même grandeur absolue mais de signe inverse ( $P_1 = -P_2; s_1 = -s_2$ ). La densité du travail virtuel effectué est proportionnel à  $\cos 2\alpha$ ; elle est donc positive, nulle ou négative suivant que l'angle absolu  $2\alpha$  est compris entre  $0^\circ$  et  $\pm 90^\circ$ , égal à  $\pm 90^\circ$  ou compris entre  $180^\circ$  et  $\pm 90^\circ$ . La courbe à quatre feuilles  $\rho = \cos 2\alpha$  donne une image de l'anisotropie du travail ( $\rho$  signifiant un rayon vecteur dans le plan) (voir fig. 4). Pour expliquer la relation entre l'anisotropie virtuelle de  $(\delta \mathcal{V}ei)_d$  et celle de  $P$  nous choisissons pour  $s$  une valeur absolue constante en posant  $|s| = 1$ . Si on change alors l'orientation de la déformation  $s$  par rapport aux directions

<sup>1</sup> Un tenseur sphérique est par exemple toujours orthogonal, dans l'espace à 9 dimensions, à un tenseur déviateur (leur produit scalaire étant nul) quelle que soit l'orientation des axes principaux de ces tenseurs dans l'espace à trois dimensions.

d'axes principaux du tenseur  $P$  tout en laissant la grandeur de la déformation constante, on trouve

$$(\delta \mathcal{G}ei)_d = P_N \sqrt{2} ,$$

où  $P_N$  est la pression normale, dans la direction de  $s$ . L'anisotropie virtuelle de  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  est donc dans ce cas particulier la même que l'anisotropie réelle de la pression normale; on obtient en effet la même courbe à quatre feuilles pour la représentation de la pression normale d'un tenseur déviateur de tension

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{2}} |P| \cos 2\alpha .$$

Dans l'espace les relations sont plus compliquées; l'anisotropie de  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  est encore déterminée par celle de la tension  $P$ ; ces deux anisotropies sont du même genre mais la surface qui représente l'anisotropie de  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  ne coïncide en général pas avec celle de  $P_N$ . Lorsqu'on détermine l'équation, on obtient une surface compliquée mais d'un type analogue à la courbe plane, elle est composée de plusieurs feuilles à signe inverse séparées par des directions dans lesquelles  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  est nul.

Pour le cas trivial d'une tension isotrope la pression normale est la même dans toutes les directions et l'anisotropie disparaît.

En résumé, l'anisotropie virtuelle peut être considérée comme résultant de l'anisotropie de la tension; elle est identique pour tous les milieux qui sont sièges du même champ de tension, quelles que soient leurs propriétés mécaniques et quel que soit l'état de déformation ou de mouvement dans lequel on les examine; c'est donc une propriété générale des corps qui sont le siège d'un champ de tension.

#### *L'anisotropie réelle dans un état (1) travaillé.*

Tandis que l'anisotropie du travail virtuel  $(\delta \mathcal{G}ei)_d$  dans un état (1) travaillé ne dépend que de la tension, l'anisotropie accessoire des propriétés mécaniques réelles est plus compliquée et dépend en général de toutes les variables mécaniques.

On peut premièrement étudier:

*L'anisotropie de la puissance réelle.*

La densité de la puissance réelle est donnée pour chaque élément de volume  $d\sigma$  et à chaque instant par la relation

$$-\frac{dA}{dt} = -\dot{A} = +P \cdot \dot{S}.$$

On en déduit comme on l'a fait pour le travail virtuel

$$-\dot{A} = \mathfrak{P} \cdot \dot{S} = |\mathfrak{P}| \cdot |\dot{S}| \cos(\mathfrak{P} \cdot \dot{S}),$$

où  $\cos(\mathfrak{P} \cdot \dot{S})$  est le cosinus de l'angle absolu entre les vecteurs  $\mathfrak{P}$  et  $\dot{S}$  dans l'espace à 9 dimensions; l'anisotropie de  $\dot{A}$  dans l'espace à 9 dimensions est formellement analogue à celle de  $\delta \mathcal{E}i$ ; la discussion de l'anisotropie dans l'espace à 9 et à 3 dimensions se fait donc d'une manière analogue en remplaçant  $s$  et  $\dot{s}$  (virtuel) par  $\dot{S}$  et  $\dot{S}$  (réel); mais il y a une différence essentielle entre ces deux cas. Elle consiste en ce que les variables  $P$  et  $s$  (virtuelles) dans l'expression de  $\delta \mathcal{E}i$  peuvent être choisies arbitrairement et indépendamment l'une de l'autre, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour  $P$  et  $\dot{S}$  (réels) dans  $\dot{A}$ . En effet, on ne peut avoir dans un milieu donné que des  $P$  et des  $\dot{S}$  qui soient compatibles avec l'équation d'état du milieu. L'équation  $\dot{A} = -P \cdot \dot{S}$  ne dit rien sur la possibilité d'une variation de  $\dot{S}$  correspondant à un  $P$  donné dans un milieu défini; elle donne l'anisotropie de  $\dot{A}$  d'une manière générale, mais dans un sens potentiel. La forme explicite de cette anisotropie s'obtient en combinant l'équation ci-dessus donnant  $\dot{A}$  avec l'équation d'état du milieu de manière que  $\dot{A}$  soit exprimé en fonction des variables indépendantes l'une de l'autre.

Si l'équation d'état n'établit pas de relation entre  $P$  et  $\dot{S}$  ces grandeurs sont les variables indépendantes cherchées, mais si par contre  $P$  et  $\dot{S}$  dépendent l'une de l'autre, il est difficile de trouver une expression de  $\dot{A}$  au moyen de variables indépendantes et de l'interpréter d'une manière intuitive à l'aide d'une anisotropie de  $\dot{A}$  dans l'espace à 3 dimensions.

On peut de plus introduire dans l'équation d'état de nouvelles variables mécaniques telles que la tension et la déformation ne soient plus comptées à partir de l'état (0) mais à partir de l'état (1) en question. Les constantes dans cette équation transformée ne seront plus des grandeurs scalaires et isotropes, mais des grandeurs tensorielles et anisotropes, qui définissent l'anisotropie réelle de l'état (1).

Enfin, on peut évaluer les angles entre les axes principaux des tenseurs dynamiques et cinématiques, et en particulier l'angle absolu entre  $P$  et  $S$  dont l'importance est fondamentale dans l'expression de la puissance du travail réel.

On démontre que pour les corps  $P$  (ou les corps  $S$ ) cette anisotropie s'exprime en fonction des variables dynamiques seules (ou cinématiques seules); pour les corps présentant une élasticité ou une viscosité parfaite, qui peuvent être considérés arbitrairement comme des corps  $P$  ou  $S$ , la dite fonction s'exprime arbitrairement à partir des variables dynamiques ou cinématiques et finalement pour les corps  $PS$  cette fonction contient les deux sortes de variables mécaniques.

Nous donnerons dans ce qui suit quelques exemples illustrant les différentes méthodes, mais nous nous bornerons à la discussion des cas pour lesquels l'anisotropie réelle s'exprime en fonction de la tension seule.

### *Elasticité parfaite.*

Soit  $\Phi$  la densité du potentiel élastique; on a

$$-dA = d\Phi = P \cdot s = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s} = |P| |s| \cos (Ps)$$

Pour un corps parfaitement élastique on pose comme équation d'état une relation entre la tension et la déformation; la vitesse de déformation n'y entre pas et par conséquent  $P$  et  $S$  ainsi que  $P$  et  $s$  sont indépendants l'un de l'autre. La formule ci dessus exprime donc d'une manière tout à fait générale l'anisotropie réelle du potentiel élastique d'un milieu siège d'une tension  $P$ ; elle montre que cette anisotropie est la même pour tous les corps parfaitement élastiques. Comme elle est identique à celle donnée pour  $(\delta \mathfrak{E}i)_d$  (mis à part le fait

qu'on a ici un travail réel) nous pouvons dire: L'anisotropie réelle de la densité du potentiel est identique à l'anisotropie du travail virtuel, par unité de volume, effectué par les forces extérieures et les forces d'inertie.

Dans le cas d'une tension caractérisée par un déviateur plan l'anisotropie du potentiel  $\Phi$  est de nouveau représentée par la courbe à quatre feuilles et dans le cas d'un déviateur dans l'espace par une surface de même genre comprenant des feuillets positifs et négatifs séparés par des directions pour lesquelles  $d\Phi = 0$ .

Ce qu'il y a de plus remarquable est qu'on peut effectuer dans l'état (1) un mouvement de déformation continu sans dépenser aucun travail. C'est le mouvement dirigé en chaque instant dans les directions  $d\Phi = 0$ . Pour le cas plan ce mouvement coïncide avec le mouvement paradoxal dont nous avons noté l'existence en cinématique: Toutes les positions parcourues par ce mouvement ont subi par rapport à l'état (0) (c'est-à-dire par rapport à l'état non travaillé dans lequel le ruban d'acier est circulaire) une déformation de même grandeur et le potentiel  $\Phi$  a la même valeur dans toutes ces positions; le mouvement se fait donc à potentiel constant, ce qui fait que le travail est nul et la différence  $\Delta\Phi$  entre deux positions parcourues arbitraires est nulle aussi. On montre également que dans ce mouvement l'angle absolu entre  $P$  et  $s$  est égal à  $90^\circ$ , c'est pourquoi le produit doublement scalaire de ces tenseurs, donnant la puissance, est nul (voir fig. 1, 2, 3).

#### *La loi d'élasticité.*

Nous avons supposé que le milieu est isotrope dans l'état (0); si par conséquent on considère les déformations à partir de cet état la condition initiale est donnée par  $P = 0$  pour  $S = 0$ ; la loi d'élasticité sera établie en trois étapes: *a*) déformations pures à partir de l'état (0); *b*) généralisation des résultats obtenus pour les déplacements linéaires quelconques effectués à partir de l'état (0); *c*) lois d'élasticité pour un état (1) pré-déformé (ou, ce qui revient au même, pour un corps qui est le siège d'une tension).

a) *Les déformations pures à partir de l'état (0).* — A cause de l'isotropie admise dans l'état (0), la loi générale est la suivante:

$$P = \gamma_1 S + \gamma_3 S^3 + \dots = \mathcal{F}(S) ,$$

où la déformation pure est donnée par

$$r = \dot{r} \cdot \Theta ,$$

avec  $S = \ln \Theta$ .

Cette loi remplace l'équation d'état scalaire par une équation tensorielle;  $P$  est une fonction analytique  $\mathcal{F}$  de  $S$  développable en série convergente de  $S$ . De la condition initiale pour l'état (0) et de l'isotropie supposée pour cet état on déduit premièrement que les termes pairs doivent être nuls, donc  $P$  est une fonction impaire de  $S$ , et deuxièmement que les  $\gamma_n$ , qui sont appelés *modules de rigidité*, sont tous scalaires. Nous remarquons que toute fonction impaire possède un point d'infexion (à courbure nulle) pour  $S = 0$ ; c'est pourquoi la loi linéaire de Hooke-Hencky donne une si bonne approximation pour des  $S$  suffisamment petits.

b) *La loi d'élasticité pour des déplacements linéaires généraux à partir de l'état (0).* — Si l'on repère un déplacement au moyen d'un système de référence lié à la partie rigide du déplacement (c'est-à-dire un système qui se déplace selon le vecteur de translation  $\tau$  et tourne selon le tenseur de rotation  $\Omega$ ) la loi d'élasticité établie en a) reste valable. Si l'on veut exprimer cette loi dans un système de référence fixe dans l'espace il faut effectuer une transformation de coordonnées. Le tenseur  $S$  (qui est identique à  $Sa$ ), lorsqu'on passe au système fixe dans l'espace, se transforme en  $\Omega \cdot S \cdot \Omega^{-1}$ , qui est identique au tenseur  $Sp$ . La loi d'élasticité relative au système fixe a donc, pour un déplacement linéaire quelconque, la forme

$$P = \gamma_1 Sp + \gamma_3 Sp^3 + \dots = \mathcal{F}(Sp) ,$$

avec

$$r = \dot{r} \Psi \quad \text{et} \quad Sp = \frac{1}{2} \ln (\tilde{\Psi} \cdot \Psi) .$$

c) *La loi d'élasticité pour un milieu dans l'état (1) travaillé.* — L'état (1) est atteint à partir de l'état (0) par un déplacement linéaire général

$$r = \overset{\circ}{r} \cdot \Psi .$$

Le tenseur de déformation post-rotationnelle associé à ce tenseur étant  $Sp$ , et la tension dans l'état (1)  $P$  nous avons

$$P = \mathcal{F}(Sp) ,$$

avec  $Sp = \frac{1}{2} \ln (\overset{\circ}{\Psi} \cdot \Psi)$ . Si nous effectuons dans l'état (1) un déplacement accessoire  $(1\bar{1})$

$$\bar{r} = r \cdot \psi$$

nous atteignons l'état  $(\bar{1})$ ; nous désignerons par  $\bar{P}$  et  $\bar{Sp}$  la tension de cet état et le tenseur de déformation post-rotationnelle associé au déplacement  $\bar{r} = \overset{\circ}{r} \cdot \bar{\Psi}$  résultant de  $(0\bar{1})$ . Nous avons alors

$$\bar{P} = \mathcal{F}(\bar{Sp})$$

avec

$$\bar{Sp} = \frac{1}{2} \ln (\overset{\circ}{\Psi} \cdot \bar{\Psi}) .$$

En vertu des lois de superposition que nous avons établies nous pouvons exprimer  $\bar{Sp}$  en fonction des tenseurs associés aux deux déplacements  $(01)$  et  $(1\bar{1})$ , ce qui nous donne l'expression générale

$$\bar{P} - P = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \ln [\overset{\circ}{\Psi} \cdot \overset{\circ}{\Psi} \cdot \Psi \cdot \psi]\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \ln [\overset{\circ}{\Psi} \cdot \Psi]\right)$$

ou plus explicitement

$$\bar{P} - P = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \ln [e^{-W} \cdot e^{sa} \cdot e^{Sp} \cdot e^{sa} \cdot e^W]\right) - \mathcal{F}(Sp) .$$

Ces formules donnent la loi d'élasticité sous une forme invariante et close dans le cas général d'un état (1) travaillé.

Pour un déplacement accessoire  $(1\bar{1})$  infiniment petit on

peut décomposer l'équation tensorielle en une équation entre les valeurs propres et une autre entre les directions d'axes:

$$\bar{P}_k - P_k = \mathcal{T}(S_k + s_j \cos^2 (Sp sa)_{jk}) - \mathcal{T}(S_k)$$

avec

$$s = sa = \frac{1}{2} \ln (\psi \cdot \tilde{\psi}) .$$

Développant  $\bar{P}_k$  en série, nous obtenons

$$dP_k = \bar{P}_k - P_k = \gamma^{(1)} s_j \cos^2 (Sp sa)_{jk} ,$$

où  $\gamma$  représente la constante scalaire d'élasticité dans l'état (1)

(pour une loi linéaire d'élasticité,  $\gamma$  est égal à  $\gamma_1$ ). S'il s'agit de déviateurs plans,

$$\frac{dP_k}{s_k} = \gamma^{(1)} \cdot \cos 2\alpha ,$$

où  $\alpha$  désigne l'angle entre les axes principaux de même indice de  $Sp$  et  $sa$ ; cette relation exprime que le milieu se comporte dans l'état prédéformé (1) comme un corps anisotrope, et la

courbe représentant l'anisotropie de son module de rigidité  $\gamma$  a pour équation  $\rho = \gamma \cos 2\alpha$ . Nous retrouvons donc ici pour

$\gamma$  et  $dP_k$  la même courbe à quatre feuilles que pour  $d\Phi$ , il y a des directions dans lesquelles  $dP_k$  est nul (voir fig. 4).

Dans la figure 4, les valeurs propres  $s_k$  sont désignées par  $\Delta_k$ .

Les formules données ci-dessus constituent un nouveau point de vue pour la discussion du mouvement paradoxal que nous avons mentionné en rapport avec les milieux parfaitement élastiques. Nous avons vu que la densité de la puissance est égale au produit doublement scalaire de la tension  $P$  par la vitesse de la déformation  $\dot{S}$ ; ce produit n'est nul que dans le cas où les deux tenseurs sont perpendiculaires, c'est-à-dire si l'angle absolu qui les sépare vaut  $90^\circ$ . Au cours de la discussion de ce mouvement paradoxal nous avons démontré que l'angle absolu entre  $\dot{S}$  et  $Sp$  est égal à  $90^\circ$ . Puisqu'il y a isotropie dans

l'état (0), le tenseur  $P$  doit être toujours parallèle à  $S_p$  (la loi d'élasticité étant linéaire ou non); donc l'angle absolu entre  $P$  et  $S$  vaut  $90^\circ$  et la densité de la puissance développée est nulle.

L'angle absolu entre les deux déviateurs symétriques plans  $P$  et  $S$  est égal au double de l'angle formé par leurs axes principaux de même indice; nous devons donc constater dans notre modèle que les axes principaux de  $P$  sont à  $45^\circ$  des axes principaux

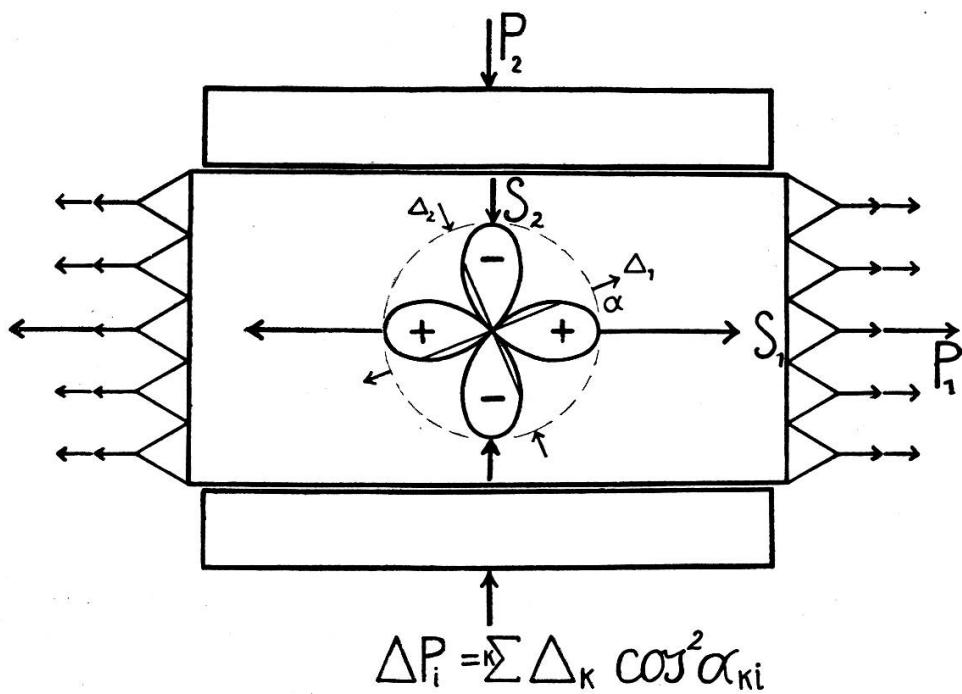


Fig. 4.

Loi d'élasticité pour un état (1) travaillé.

de  $S$ . En effet les axes de l'ellipse d'acier, qui sont évidemment parallèles aux axes principaux de  $P$ , forment des angles de  $45^\circ$  avec les axes de l'ellipse qui représente  $S$ ; si l'on interprète de nouveau les tenseurs  $P$  et  $S$  comme des vecteurs de l'espace à 9 dimensions le champ de tension  $P$  est représenté par un champ de vecteurs  $\mathfrak{P}$  et le mouvement paradoxal est effectué dans le *plan perpendiculaire* à  $\mathfrak{P}$ ; c'est pourquoi les vecteurs  $\mathfrak{P}$  ne travaillent pas lors de ce mouvement. Ce fait est illustré par les figures 1, 2 et 3.

*Les milieux visqueux.*

Les milieux visqueux sont caractérisés par  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ ; aux diverses fonctions qui donnent le taux de variation de la densité de l'énergie,  $\dot{G}$ , correspondent les différents types de corps visqueux. Nous parlerons en particulier de viscosité parfaite si  $\dot{G}$  s'exprime en fonction de la tension  $P$  ou de la vitesse de déformation  $\dot{S}$  seulement. Nous développons alors la loi de viscosité en trois parties, comme pour la loi d'élasticité:

a) *Loi de viscosité pour des déformations pures.* — Dans ce cas  $P$  s'exprime par une fonction linéaire de  $\dot{S}$  (développable en série convergente)

$$P = f(\dot{S}) = \eta_1 \dot{S} + \eta_3 \dot{S}^3 + \dots ,$$

où les termes pairs s'annulent à cause de l'isotropie. Les  $\eta_n$ , qui seront nommés *coefficients de viscosité*, sont des quantités scalaires, donc  $P$  est parallèle à  $\dot{S}$ . Cette équation tensorielle remplace l'équation d'état scalaire pour le cas étudié;

b) *Loi de viscosité pour des déplacements linéaires quelconques à partir de l'état (0).* — On montre que la loi de viscosité établie en a) reste inchangée pour des déplacements quelconques. On a par exemple la même loi pour un courant résultant d'une déformation pure et un courant laminaire;

c) *Loi de viscosité pour un état (1) travaillé.* — On trouve pour l'état (1) prédéformé exactement la même loi que pour l'état (0). La loi établie en a) est donc valable dans tous les cas et il n'y a pas moyen de changer l'orientation relative de  $P$  et de  $\dot{S}$ ; c'est pourquoi, dans les milieux visqueux,  $\dot{G}$  ne présente aucune anisotropie.

Ajoutons encore deux remarques:

1° La loi linéaire de Newton

$$P = \eta \dot{S}$$

est un cas particulier de la viscosité parfaite. Elle donne

d'ailleurs pour le cas général une bonne approximation, pourvu que  $P$  et  $\dot{S}$  soient suffisamment petits, car la fonction  $f$  est impaire et présente donc un point d'inflexion pour  $P = \dot{S} = 0$ .

2<sup>o</sup> On peut imaginer des milieux non parfaitement visqueux dans le sens précisé ci-dessus, en supposant que dans l'état (0) non travaillé on observe déjà une viscosité anisotrope. Pour un milieu anisotrope pareil, l'angle absolu  $\sigma$  entre  $P$  et  $\dot{S}$  peut varier, mais comme la fonction  $\dot{A} = \dot{G}$  est toujours limitée à des valeurs positives,  $\sigma$  satisfait à la condition  $-90^\circ \leq \sigma < 90^\circ$ .

*Les milieux plasto-élastiques.*

Les milieux plasto-élastiques peuvent être considérés comme une combinaison d'un corps élastique et d'un corps visqueux. En général, ils permettent d'établir une anisotropie de la puissance réelle, qu'on peut calculer d'après la théorie de superposition des corps parfaitement élastiques et des corps parfaitement visqueux. Nous donnerons un exemple en discutant le corps  $P_0$ .

*Le corps  $P_0$ .*

Le corps  $P_0$  est défini en posant que la densité de son potentiel élastique  $\Phi$  est égale à

$$\Phi = \frac{P \cdot \cdot P}{2\gamma} + \Phi_0$$

où  $\Phi_0$  est une constante, et la densité de la puissance due à la variation de l'énergie liée à

$$\dot{G} = \frac{P \cdot \cdot P}{\eta} .$$

Il en résulte pour son équation d'état l'expression

$$-P \cdot \cdot \dot{S} + \frac{d \frac{P \cdot \cdot P}{2\gamma}}{dt} + \frac{P \cdot \cdot P}{\eta} = 0 .$$

Le traitement du corps  $P_0$  selon le cycle des théories établies dans le chapitre de la thermodynamique étant déjà publié ne

sera pas répété ici; nous rappelons seulement qu'il montre une relaxation parfaite si la vitesse  $\dot{P}$  du changement de la tension satisfait la relation  $\dot{P} = \frac{P}{\tau}$  où  $\tau$  (le temps de relaxation) est donné par  $\tau = \frac{\eta}{\gamma}$ ; au point de vue énergétique il s'approche du corps ayant une élasticité ou une viscosité parfaite en raison de la vitesse de variation de la tension, c'est-à-dire selon que  $\dot{P}$  est très grand ou très petit par rapport à  $\frac{P}{\tau}$ .

Pour étudier l'anisotropie accessoire de ce corps dans un état (1) où il est siège d'une tension  $P$  constante on est tenté de changer l'orientation relative de  $P$  et  $\dot{S}$  tout en maintenant constantes leurs valeurs propres. Cependant cela ne peut pas se faire car  $P$  et  $\dot{S}$  ne sont pas indépendants l'un de l'autre mais reliés par l'équation d'état. Il est donc préférable d'étudier l'anisotropie de ce corps pour un état (1) de tension constante en considérant l'angle absolu entre  $P$  et  $\dot{S}$ .

Pour  $P = \text{const.}$  l'équation d'état exprime qu'il n'y a que du frottement interne, tout le travail est transformé en énergie liée; dans ce cas  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$  et par conséquent

$$P \cdot \dot{S} = \frac{P \cdot P}{\eta}$$

avec  $\Phi = \text{const.}$  Bornons-nous ici à discuter le cas plan, dans lequel tous les tenseurs sont des déviateurs symétriques plans. On a alors

$$ps \cos \sigma = \frac{p^2}{\eta}$$

avec  $p = \text{const.}$ , soit

$$\dot{s} = \frac{p}{\eta} \cos \sigma$$

où  $p$  et  $\dot{s}$  sont les grandeurs absolues de  $P$  et de  $\dot{S}$  et  $\sigma$  l'angle absolu entre  $P$  et  $\dot{S}$ . Cette loi de frottement, interprétée dans l'espace à 9 dimensions, est tout à fait analogue au cas correspondant dans l'espace à trois dimensions et montre une anisotropie.

Il y a en particulier deux cas simples à discuter. Dans le premier nous supposons qu'il existe un mouvement de déformation pure, dans le second, un mouvement laminaire.

Lors d'une déformation pure,  $P$  est parallèle à  $S$ , donc  $\sigma = 0$ ; la loi de frottement établie plus haut devient la loi linéaire de Newton

$$\dot{s} = \frac{p}{\eta}.$$

Dans le cas d'un mouvement laminaire, le calcul de  $\sigma$  est plus compliqué, il se fait en deux parties. Nous supposons d'abord que le milieu est déplacé de l'état non travaillé (0) par un déplacement laminaire jusqu'à un état (1) travaillé; ce déplacement est censé effectué assez vite pour que la relaxation puisse être négligée et qu'il suive la loi d'élasticité. La deuxième partie consiste en un courant laminaire stationnaire pendant lequel la tension  $P$  atteinte dans le premier déplacement est maintenue constante. On a un problème de frottement pur dans un état (1) travaillé. A l'aide du premier déplacement nous pouvons calculer l'orientation de  $P$ ; à l'aide du second celle de  $S$  et par la différence de ces orientations l'angle absolu  $\sigma$ , ce qui nous permet d'établir la loi de frottement dans le courant laminaire stationnaire.

#### *Orientation de la tension.*

La tension dans l'état (1) est parallèle et proportionnelle à la déformation postrotationnelle contenue dans le déplacement (01), d'après la loi d'élasticité

$$P = \gamma \cdot Sp = \gamma \cdot \frac{1}{2} \ln (\tilde{\Psi} \cdot \Psi).$$

On en déduit pour l'orientation de  $Sp$  et de  $P$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_k = \frac{1}{\sinh \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \ln (\tilde{\Psi} \cdot \Psi) \right|} = \frac{1}{\sinh \frac{p}{\gamma \sqrt{2}}}.$$

où  $\varphi_k$  est l'angle entre l'axe  $k$  de  $P$  (ou de  $S\rho$ ) et la direction du mouvement laminaire. Cette équation exprime que l'orientation de  $P$  dans l'état (1) dépend de sa grandeur absolue  $p$  divisée par  $\gamma$ .

*Orientation de  $S$ .*

On trouve pour l'orientation de  $S$  dans un courant laminaire, en vertu des formules développées dans le chapitre de la cinématique,

$$\operatorname{tg} 2\gamma_k = \infty, \quad \gamma_k = 90^\circ \pm 45^\circ$$

où  $\gamma_k$  est l'angle entre l'axe  $k$  de  $S$  et la direction du courant laminaire.

Ayant déterminé l'orientation de  $P$  puis celle de  $S$ , nous déterminons l'angle absolu  $\sigma$  entre ces deux tenseurs et en déduisons la loi de frottement:

$$\cos \sigma = \cosh \frac{p}{\gamma \sqrt{2}},$$

d'où

$$\dot{s} = \frac{p}{\eta} \cosh \frac{p}{\gamma \sqrt{2}},$$

ou encore, par un développement en série,

$$\dot{s} = \frac{p}{\eta} \left( 1 + \frac{p^2}{2 \cdot 2^1 \gamma^2} + \frac{p^4}{2^2 \cdot 4^1 \cdot \gamma^4} + \dots \right),$$

ce qui est une loi non linéaire.

Il existe donc pour un même corps des lois différentes régissant le frottement interne, suivant que le mouvement est un mouvement laminaire ou un mouvement de déformation pure.

Pour des valeurs petites de la tension on retrouve la loi linéaire de Newton, mais pour des tensions plus élevées on trouve une vitesse de déformation qui est plus grande, que celle que fournit la loi linéaire. On a donc l'impression que la viscosité du corps  $P_0$  est plus petite pour des grandes tensions que pour des petites. Cette impression est cependant complètement erronée. La viscosité du corps n'a pas changé. C'est seulement l'orientation relative de la tension et de la vitesse de

déformation qui est différente, dans un mouvement laminaire, pour de petites et de grandes tensions et c'est cette différence de l'angle absolu entre  $P$  et  $\dot{S}$  qui fait croire à un changement de viscosité; par contre, dans les mouvements de déformation pure dans lesquels l'orientation entre  $P$  et  $\dot{S}$  ne change pas on trouve la loi linéaire.

Ces considérations sur le courant laminaire et sur le fait qu'il diffère des déformations pures ont une importance pratique, car de nombreuses solutions colloïdales peuvent être assimilées en première approximation à des corps  $P_0$ , et toutes les expériences faites pour déterminer leur « viscosité » sont basées sur les courants laminaires (voir, par exemple, R. Eisenschitz et B. Rabinowitch, *l. c.*).

Nous ajoutons une remarque: pour  $\gamma = \infty$  on trouve un corps déformable caractérisé par l'équation d'état

$$P \ldots \dot{S} + \frac{P \ldots P}{\eta} = 0.$$

Ce corps est incapable d'accumuler de l'énergie libre par des déformations à volume constant; c'est un milieu parfaitement visqueux et « sans élasticité de forme »; pour un tel corps on déduit des formules données

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_k = \infty \quad \text{donc} \quad \varphi_k = \gamma_k = 90^\circ \pm 45^\circ$$

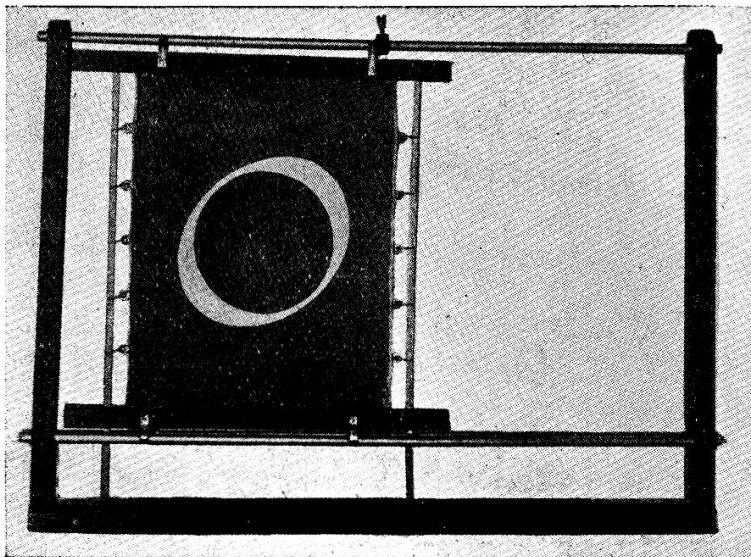
et

$$\sigma = 0$$

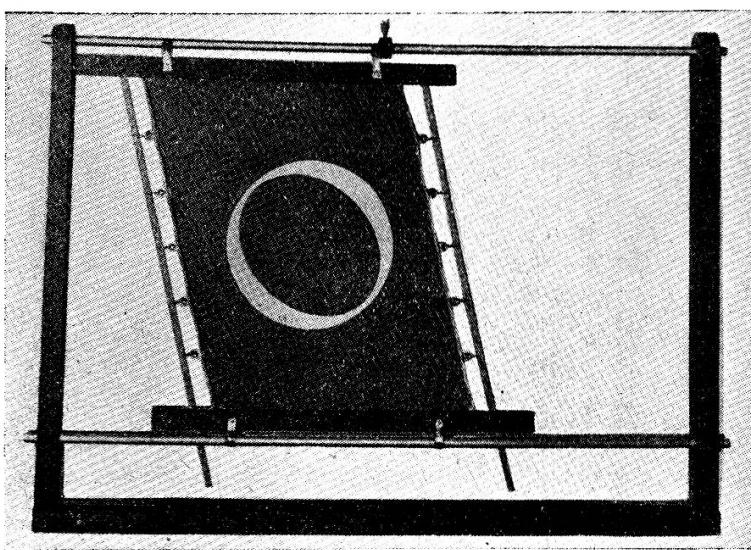
et la loi de frottement interne est la même pour le courant laminaire que pour des déformations pures. Nombre de liquides de faible poids moléculaire peuvent être assimilés en premier approximation à des corps pareils. La différence entre les courants laminaires et les déformations apparaît donc seulement pour des corps capables d'accumuler de l'énergie libre au cours de déformations à volume constant.

*Description du modèle du déplacement laminaire (fig. 5).*

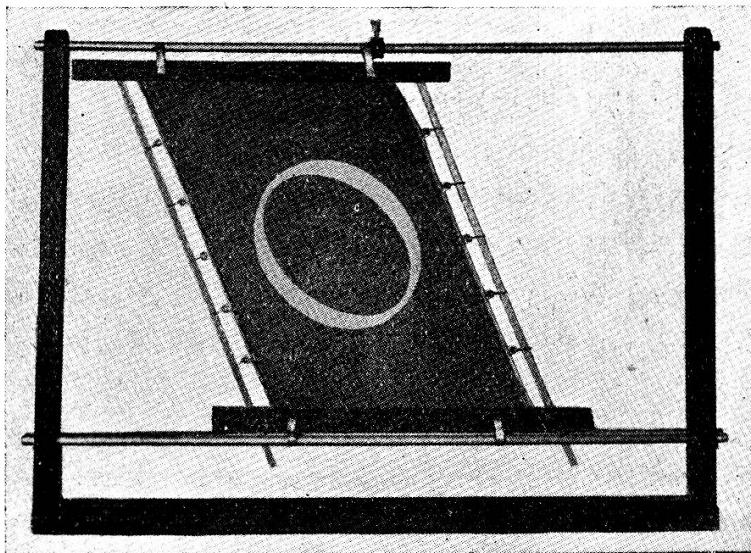
Pour illustrer les déplacements laminaires nous avons construit un modèle (fig. 5) à l'aide duquel on peut effectuer un



Position (0).



Position (1).



Position (1̄).

Fig. 5.

déplacement laminaire dans une lame de caoutchouc. Ce modèle illustre non seulement la déformation d'un milieu élastique, mais aussi les déplacements laminaires dans le corps  $P_0$ , car le déplacement (01) est supposé élastique et la détermination du courant laminaire nécessite seulement de considérer deux positions infiniment voisines (1) et (1̄).

A la figure 5 on voit trois positions successives (0) (1) et (1̄) d'un mouvement laminaire d'un continuum élastique. Pour un tel continuum le tenseur  $P$  est parallèle et proportionnel au tenseur  $S_p$  de déformation postrotationnelle calculé à partir de l'état (0) non travaillé. On peut donc représenter le tenseur de tension  $P$  si on dessine dans la position (0) un cercle de rayon unité et qu'on observe l'ellipse en laquelle se transforme ce cercle pendant le déplacement laminaire et qui coïncide avec la surface métrique de  $\Theta_p$ ; les directions d'axes principaux de  $P$  sont à chaque instant parallèles à celles de l'ellipse et les valeurs propres sont proportionnelles aux logarithmes des grandeurs des axes de l'ellipse. Par un déplacement laminaire infinitésimal à partir de la position (0) le cercle de rayon 1 se transforme en une ellipse dont les axes forment des angles de  $45^\circ$  avec les directions du cadre; si le déplacement laminaire continue, cette ellipse se déforme et tourne de plus en plus, de sorte qu'après un déplacement laminaire infiniment grand les axes de l'ellipse et par conséquent les axes de  $P$  sont parallèles aux axes du cadre.

La représentation du tenseur  $S$  de la vitesse de déformation se fait d'une manière analogue; on dessine dans n'importe quelle position un cercle de rayon un et on observe l'ellipse en laquelle se transforme ce cercle après un déplacement laminaire infinitésimal et qui coïncide avec la surface métrique de  $\mathfrak{I}$ ; les directions d'axes principaux de  $S$  sont parallèles à celles de cette ellipse et les valeurs propres sont proportionnelles aux logarithmes des grandeurs des axes de l'ellipse. En partant de la position (0) on trouve, comme pour le déplacement laminaire ci-dessus, une ellipse dont les axes sont à  $45^\circ$  avec les axes du cadre; au début du mouvement laminaire  $P$  et  $S$  sont donc parallèles et la relation qui les lie est la même que dans une

déformation pure. Si on continue le déplacement laminaire d'abord jusqu'à la position (1) et qu'on trace dans cette position un cercle de rayon  $u_1$ , représentant  $\mathbf{S}$  dans cette position, on constate que ce cercle se transforme par suite d'un déplacement laminaire infinitésimal de nouveau en une ellipse dont les axes sont à  $45^\circ$  avec les axes du cadre, quelle que soit la position (1) choisie. Cela montre que l'orientation de  $\mathbf{S}$  reste fixe dans l'espace (les directions de ses axes forment toujours le même angle de  $45^\circ$  avec le cadre) pendant tout le mouvement laminaire tandis que l'orientation de  $\mathbf{P}$  change de la manière que nous avons indiquée; pour des valeurs grandes de la tension les tenseurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{S}$  ne sont plus parallèles et l'angle entre leurs axes principaux de même indice augmente de 0 à  $45^\circ$ , donc l'angle absolu de 0 à  $90^\circ$ . C'est pourquoi, pour de grandes tensions et dans un mouvement laminaire la relation entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{S}$  diffère essentiellement de celle correspondant à une déformation pure dans laquelle  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{S}$  sont parallèles.

L'anisotropie des propriétés mécaniques des corps  $\mathbf{S}$  dans un état (1) travaillé peut-être étudiée d'une manière analogue; mais le résultat est bien différent de celui donné ci-dessus.

---