Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 17 (1935)

Artikel: La mécanique des corps déformables
Autor: Weissenberg, K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741552

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA MÉCANIQUE DES CORPS DÉFORMABLES

PAR

K. WEISSENBERG

(University College, Southampton)

(Avec 5 fig.)

I. — Introduction [1].

Si l'on fait agir de l'extérieur des forces mécaniques sur un corps matériel, celui-ci cède d'une manière plus ou moins compliquée. Cette manière de céder peut être décrite par des *variables cinématiques* qui déterminent, par rapport à un système de référence donné, la position dans l'espace de chaque élément matériel du corps, en fonction du temps. Les forces mécaniques extérieures sont représentées par des *variables dynamiques*. La mécanique se propose d'établir les relations qui existent entre ces variables cinématiques et dynamiques; les

[1] Conférences faites à l'Université de Genève en avril et mai 1934. Les théories décrites dans ces lignes ont été également le sujet d'exposés faits au « Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie », Berlin-Dahlem (Haber-Kolloquium), en janvier 1933.

Je tiens à remercier tout spécialement M. le professeur R. Wavre qui m'a invité à prendre part aux « Conférences internationales des Sciences mathématiques » à Genève, où j'ai eu le plaisir de pouvoir discuter des questions ici traitées, je remercie en particulier MM. les professeurs K. H. Meyer et J. Weigle pour leur contribution à la discussion.

La rédaction française de ces conférences a été facilitée grâce à l'aide de M. A. Mercier, de l'Institut de Physique de l'Université de Genève, à qui j'adresse ici mes remerciements.

constantes qui apparaissent dans ces relations déterminent d'une manière quantitative les propriétés mécaniques du corps, on peut les interpréter comme représentant la résistance de la matière envers les actions dynamiques.

Lorsqu'on se place d'un point de vue empirique, on cherche à déterminer, par l'étude de la réaction d'un corps donné envers divers efforts, comment, dans le cas particulier du corps en question, les variables cinématiques et les variables dynamiques sont reliées entre elles. Mais ces résultats ne sont valables que pour le cas spécialement étudié. On pourrait alors procéder à une comparaison, une analyse des résultats obtenus pour divers corps, afin de déterminer les relations les plus générales possibles qui décrivent d'une manière satisfaisante le comportement de tous ces corps. Cette étude est très difficile, car pour les corps réels en général, les causes extérieures ont une répercussion sur le milieu même, en mettant en jeu les forces intérieures qui maintiennent les particules matérielles constituantes du milieu, avec toutes les complications de la structure que ces particules définissent par leur arrangement, et de leurs mouvements chaotiques dûs à l'énergie interne du corps, ainsi que du changement de cette structure et de ce mouvement chaotique. C'est pourquoi, dans l'évolution des systèmes mécaniques (en particulier des matières colloïdales), peuvent se présenter des phénomènes très divers: des phénomènes calorifiques réversibles ou irréversibles, des changements de structure, des transformations chimiques, des phénomènes électriques, etc. A cause de ces difficultés, nous choisirons un autre chemin dans notre étude. Nous fondant sur les lois les plus générales, nous développerons une étude systématique des phénomènes en question, en introduisant une série de corps idéalisés que nous définirons; dès lors les lois que suivent ces corps sont parfaitement déterminées. Pour faire œuvre utile, il s'agit de s'approcher de plus en plus des corps réels. C'est là un procédé d'approximations commode, parce que pour chaque approximation nouvelle il n'y a pas lieu de discuter la validité des considérations développées: on recherche comment se comporte un corps défini d'une certaine manière. Si l'expérience a révélé que tel corps réel se comporte conformément aux définitions données pour un certain type de

corps imaginé, on en déduira que, dans les limites expérimentales, ce corps réel est assimilable à un corps du type imaginé.

Notre point de vue sera d'admettre que les hypothèses générales de la physique macrocospique, qui sont vérifiées pour tous les corps réels (comme le principe de d'Alembert, la conservation de la masse et de l'énergie dans un système fermé, ainsi que les théorèmes fondamentaux de la thermodynamique) sont valables aussi pour tous les corps idéalisés que nous introduirons. Nous verrons jusqu'à quel point on peut assimiler les corps réels à des milieux tels que ceux qui sont définis lorsqu'on fait ces hypothèses générales, et de plus, nous rechercherons où il faut introduire des hypothèses supplémentaires et lesquelles, pour mieux décrire les corps réels.

Les hypothèses fondamentales qui sont à la base de la mécanique sont les lois d'inertie de Newton et l'hypothèse de Boltzmann de la symétrie de la tension. L'hypothèse de Boltzmann exige que les forces intérieures (actions entre les points matériels d'un corps) soient des forces centrales obéissant à la loi de l'égalité entre l'action et la réaction, c'est-à-dire qu'elles soient centro-symétriques et que par conséquent dans un élément suffisamment petit de volume le champ des forces internes puisse être représenté par une grandeur tensorielle symétrique du deuxième ordre. De ceci on déduit que les forces internes effectuent un travail nul le long de tout déplacement rigide et n'entrent par conséquent en ligne de compte que pour les déplacements qui entraînent la déformation du milieu.

Ces hypothèses se résument au moyen du principe de d'Alembert, selon lequel la somme des vecteurs des forces extérieures et des vecteurs des forces d'inertie est nulle en chaque instant et pour chaque partie d'un corps matériel quelconque. Il est commode de résumer plutôt en un principe de travail virtuel [1] les hypothèses qui viennent d'être rappelées, principe que l'on traduira mathématiquement en écrivant qu'à chaque instant et pour chaque point matériel du corps la somme des travaux virtuels effectués par les forces extérieures et les

[1] Le principe du travail virtuel a été établi par Bernoulli pour le cas particulier d'un équilibre des forces.

forces d'inertie le long de tout déplacement virtuel rigide δ_r est nul:

$$(\delta \mathcal{T}_{ei})_r = (\delta \mathcal{T}_e)_r + (\delta \mathcal{T}_j)_r = 0 ,$$

où $\delta \mathcal{T}_e$ et $\delta \mathcal{T}_j$ sont les travaux virtuels des forces extérieures et d'inertie, et $\delta \mathcal{T}_{ei}$ la somme de ces deux sortes de travail, l'indice r indiquant que la variation a lieu le long d'un déplacement virtuel *rigide*. Cette forme du principe de d'Alembert est équivalente à 6 équations indépendantes selon les 6 degrés de liberté du déplacement rigide virtuel δ_r car on peut décomposer tout déplacement rigide δ_r en 3 composantes d'un déplacement linéaire et trois composantes indépendantes d'une rotation.

En écrivant ce principe, on peut faire une première approximation, en idéalisant le corps comme un *corps rigide invariable* défini de telle manière que sa mécanique soit complètement déterminée par l'énoncé ci-dessus, ce corps est donc défini comme suit: il ne cède aux actions qui lui sont imprimées que par des déplacements rigides; il a 6 degrés de liberté (3 de translation et 3 de rotation) et les distances entre ses éléments constituants restent invariables.

Nous ne voulons pas insister sur la mécanique du corps rigide, car elle est bien connue; bornons-nous à deux remarques: 1° La mécanique du corps rigide ne met en jeu que l'inertie de ce corps. 2° La décomposition d'un déplacement rigide en trois translations et trois rotations se fait de manière qu'on puisse considérer les trois premières comme si les dernières n'existaient pas et *vice versa*, et que trois translations (trois rotations) sont équivalentes à une seule. C'est-à-dire que les six degrés de liberté peuvent être considérés indépendamment les uns des autres.

Voici comment on passe de la première approximation (corps rigide) à une approximation plus proche de la réalité (changement des distances entre les molécules à l'intérieur du corps réel, en vertu de l'énergie interne qu'il possède, — les molécules étant assimilées à des points matériels). La cinématique d'un corps rigide est caractérisée par six degrés de liberté de déplacements rigides; sa dynamique en a autant et sa

mécanique est complètement déterminée par le principe de d'Alembert. Pour introduire dans la cinématique, dans la dynamique et dans la mécanique une nouvelle approximation, on adjoint d'abord dans la cinématique les degrés de liberté permettant de modifier les distances qui séparent les points matériels les uns des autres. Ces degrés de liberté caractérisent la possibilité de *déformations* et les corps auxquels on les attribue sont dits *corps déformables*. Le corps déformable le plus simple que l'on puisse imaginer est un continuum homogène déformable, tel que pour un élément dv de volume pris dans ce corps tout déplacement linéaire soit permis; pour une partie finie du milieu, par conséquent, tous les déplacements analytiques sont permis. C'est dans ce sens restreint que nous considérerons dorénavant le corps déformable. Les déplacements rigides (de translation et de rotation) étant linéaires sont compris dans cette possibilité, de sorte que le corps rigide peut être considéré comme un cas spécial du corps déformable.

La définition des corps déformables limite leur manière de réagir vis-à-vis des actions extérieures aux déplacements linéaires de tout élément de volume dv. On en déduit que dv a 12 degrés de liberté, 6 correspondant aux déplacements rigides et 6 aux déformations.

La dynamique de tout corps réel — donc aussi des corps idéalisés, rigides ou déformables — est fondée sur le principe de d'Alembert qui réunit les énoncés de Newton et de Boltzmann; si on suppose que les actions dynamiques sont données arbitrairement, on peut les décomposer en deux parties, l'une aura un effet sur un des degrés de liberté au moins,[1] soit une action à laquelle dv est autorisé à céder d'une manière ou d'une autre, — l'autre n'aura aucun effet cinématique sur le corps, le dv ne cédant pas aux actions qu'elle englobe. Nous nous intéresserons seulement à la première partie puisque l'autre est sans effet sur

[1] Cette première partie comprend les forces pour lesquelles un travail effectué le long du chemin selon lequel dv se déplace virtuellement n'est pas nul.

[2] Pour les corps rigides, la tension peut être négligée complètement dans les actions dynamiques car elle n'effectue aucun travail le long des déplacements rigides que le dv est autorisé à subir.

le corps déformable [2]. On démontre que la dynamique de la première partie, qui seule nous intéresse, se traduit par des expressions linéaires en ce qui concerne l'élément de volume.

Nous admettons donc dans la dynamique des corps déformables autant de degrés de liberté que dans la cinématique, ce qui entraîne l'introduction de « *la tension* », grandeur dynamique qui agit seulement dans les degrés de liberté nouvellement introduits, mais ne produit aucune action dans les degrés de liberté associés aux déplacements rigides.

L'étude d'un corps homogène et déformable pris dans son ensemble se réduit en principe à celle d'un de ses éléments dv (de volume), en vertu même de l'homogénéité postulée, car tous les éléments dv sont équivalents; et l'on connaîtra le comportement du corps par simple intégration sur le volume entier, ou sur toute portion de dimensions finies dont on s'occupe. Pour cette raison, ne considérant dorénavant que des corps homogènes, nous nous bornerons à l'étude de ce que nous appellerons la cinématique, la dynamique et la mécanique de dv et le problème qui se pose sera donc la recherche des relations entre la cinématique et la dynamique, toutes deux étant supposées linéaires.

Pour définir des corps déformables dont la mécanique soit complètement déterminée, le principe de d'Alembert ne suffit pas (car il ne détermine la mécanique que dans les degrés de liberté associés aux déplacements rigides) et il faut recourir aux lois générales de la conservation de l'énergie et de la masse dans un système fermé ainsi qu'aux principes fondamentaux de la thermodynamique. Cela nous conduit à une équation valable pour tout élément infinitésimal de masse dm; elle exprime que la puissance mécanique (développée par les forces extérieures) ajoutée aux variations dans le temps des énergies libre et liée du système fermé [1] donne une somme nulle, chaque puissance étant rapportée à l'unité de masse.

Si on admet que ces trois densités de puissances sont des fonctions des variables mécaniques seulement (variables

[1] Le système fermé est composé du corps déformable, d'un bain à température constante entourant le corps et d'un « réservoir » de travail mécanique.

cinématiques et dynamiques) l'équation en question est une relation entre ces variables et détermine de cette manière la mécanique du corps. Dans ces conditions on appellera cette équation *l'équation d'état* et le corps lui-même, un *corps déformable déterminé du point de vue mécanique.* Pour procéder d'une manière systématique on envisagera d'abord des fonctions simples, puis des fonctions de plus en plus compliquées, de manière à obtenir toute une série de corps idéalisés qui se rapprochent de plus en plus de la réalité.

Nous avons ainsi précisé le sens de ce que nous appelons une deuxième approximation dans la cinématique, dans la dynamique et dans la mécanique; nous l'étudierons avec plus de détail dans la suite.

Le problème qui se rapporte à 12 dimensions est extrêmement compliqué; aussi faut-il trouver d'abord la forme la plus simple possible et la plus intuitive des variables cinématiques et dynamiques ainsi que celle des rélations qui les lient. On y parvient par deux étapes. La première est d'ordre purement mathématique: On se fonde sur le calcul tensoriel et le développe dans une forme invariante afin de pouvoir se débarrasser des indices de covariance et de contravariance nécessairement rattachés aux systèmes de coordonnées; cela est nécessaire, car toute relation entre deux tenseurs qui s'exprime à l'aide d'une fonction analytique générale ne peut être donnée pour les composantes que par un développement en série convergente de puissances, dont la forme n'est pas close. Par contre si on passe des composantes à des grandeurs invariantes (valeurs propres et directions d'axes principaux des tenseurs) ces relations s'expriment d'une manière simple et close. Nous avons réuni dans un appendice des formules et des développements purement mathématiques, qui sont nécessaires pour suivre la théorie que nous exposons, en particulier les démonstrations relatives à l'invariance des tenseurs. Nous avons fait usage autant que possible de l'invariance en question, en particulier dans les chapitres de la cinématique et de la dynamique. Le calcul tensoriel laisse encore un choix arbitraire assez grand dans les variables cinématiques et dynamiques; c'est pourquoi nous déterminerons dans une deuxième étape ces variables de

telle manière que les relations générales qui les lient — soit le principe du travail virtuel et celui de d'Alembert — s'expriment sous une forme aussi simple que possible; les variables dynamiques seront définies directement par le principe de d'Alembert et elles s'exprimeront par des densités vectorielles et des densités tensorielles antisymétriques et symétriques (densité de forces, de moment de rotation, de tension); les variables cinématiques associées seront déterminées par le principe du travail virtuel; elles s'exprimeront par un *vecteur de translation*, un *tenseur antisymétrique d'angle de rotation* et un *tenseur symétrique de déformation*. Les définitions de tous ces tenseurs s'expriment à l'aide des formules invariantes de l'appendice dans une forme exacte, close et valable aussi bien pour les déformations infinitésimales, que pour les déformations finies. Ayant déterminé les variables mécaniques, nous pourrons procéder au développement de la cinématique et de la dynamique. Le problème le plus intéressant qui se pose ici est celui de la superposition des déplacements successifs, et des actions dynamiques successives, où chaque déplacement est décomposé en translation, en rotation et en déformation et toute action dynamique d'une manière analogue.

Ce problème a été étudié surtout dans les travaux classiques de *E. et F. Cosserat*, *Léon Brillouin*, *E. Hencky* et nous suiverons la méthode employée par ces auteurs. Nous faisons d'abord une distinction entre l'état non travaillé [1] pris comme état (0) de référence et les états travaillés atteints grâce à une action cinématique ou dynamique exercée sur l'état (0). Pour la cinématique nous donnons alors les formules explicites qui permettent de calculer le déplacement résultant de deux déplacements successifs, tout déplacement étant décomposé en translation, rotation et déformation; puis nous donnons une systématique des mouvements linéaires, qui nous conduit à l'étude de certaines classes de mouvement privilégiées. Outre les mouvements rigides et les déformations pures, il apparaît un type de mouvement à déformation constante,

[1] C'est-à-dire un état de repos dans lequel aucune action dynamique n'a lieu.

classe qui n'a pas encore été étudiée jusqu'à présent et qui présente des phénomènes paradoxaux, et finalement la classe des mouvements laminaires. Ces mouvements privilégiés nous serviront dans l'étude qui fait suite, celle de la dynamique et de la mécanique de l'état non travaillé et des états travaillés.

Pour plus de simplicité nous ferons dans le traitement de la mécanique trois hypothèses: premièrement le corps déformable est *isotrope* dans l'état non-travaillé, deuxièmement il est *incompressible* (ces hypothèses facilitent beaucoup les calculs, et les résultats obtenus peuvent être facilement généralisés pour le cas des corps anisotropes et compressibles), et troisièmement la température est maintenue constante.

Nous ajoutons encore quelques remarques générales éclairant les deux hypothèses introduites et les simplifications qu'elles comportent.

En combinant le principe de d'Alembert et l'équation d'état, on obtient une première simplification; on en ajoute une deuxième en faisant l'hypothèse que le milieu est isotrope dans l'état non-travaillé, car cette hypothèse implique que toute relation linéaire entre deux tenseurs symétriques d'ordre 2 (par exemple entre la tension et la déformation ou la vitesse de déformation) se décompose (voir l'appendice) en deux relations indépendantes, dont l'une représente une dilatation isotrope de volume et l'autre crée des déformations à volume constant. En admettant que cette indépendance, valable pour des relations linéaires, soit valable encore dans le cas général, on peut étudier séparément le mécanisme de la dilatation isotrope, qui est connu et ne sera pas traité dans ce travail, et celui des 11 autres degrés de libertés. Si on admet, comme troisième simplification, que la dilatation est nulle, c'est-à-dire que le milieu déformable est incompressible, la forme générale de l'équation d'état est la suivante:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} + \frac{dG}{dt} = 0 \ ,$$

où A, Φ et G sont des densités (volumiques) d'énergie: A la densité du travail (réel) accompli par la tension, Φ et G celles

de l'énergie libre et de l'énergie liée de dv. Les densités de puissance qui apparaissent dans cette équation sont fonctions des variables mécaniques, cette équation est donc très générale.

La simplification obtenue par l'hypothèse de l'isotropie dans l'état non-travaillé (état que nous noterons (0)) ressort de la remarque suivante. Si on applique à l'état (0) une action dynamique quelconque, toutes les grandeurs tensorielles, dynamiques (tension, pression, etc.) et cinématiques (déformation, vitesse, accélération, etc.) sont parallèles, de sorte que l'on peut réduire tous les tenseurs à la forme diagonale et identifier selon les trois termes qui subsistent (valeurs propres).

La simplification obtenue par l'hypothèse de l'incompressibilité consiste en ce que les trois équations que l'on obtient à la suite de cette identification sont identiques et que les dérivées par rapport au temps des densités massiques et volumiques sont identiques aussi.

Pour le cas général d'un état travaillé ou d'une déformation quelconque, les tenseurs ont des orientations quelconques, ces simplifications n'apparaissent naturellement pas, et l'on doit superposer la connaissance des expressions qui relient les valeurs absolues des tenseurs à celle des relations entre les orientations de ceux-ci.

Nous avons divisé ce travail en quatre chapitres et un appendice. A la suite de la présente introduction vient un deuxième chapitre qui donne le traitement rigoureux de la cinématique linéaire de dv, fondé sur les résultats contenus dans l'appendice; le sens physique de ce traitement apparaît dans le troisième chapitre qui s'occupe de la dynamique linéaire et des relations générales entre les variables cinématiques et dynamiques. Dans le quatrième chapitre nous exposerons la mécanique de l'élément de volume, en résumant dans une première partie la théorie thermodynamique à partir de l'équation d'état déjà citée, et en relevant dans une seconde partie les traits les plus marquants de la mécanique des corps déformables dans un état travaillé, qui se résument dans un théorème d'anisotropie.

II. — La cinématique de l'élément de volume.

A. *Notions fondamentales.*

Pour caractériser la cinématique de l'élément de volume, introduisons un système Σ de coordonnées trirectangulaires X_k et considérons la transformation[1] qui fait passer les coordonnées des points matériels d'un continuum envisagé d'une position arbitraire (1) occupée au moment $t = t_1$ en une autre $(\bar{1})$ occupée au moment $t = t_{\bar{1}}$

$$\bar{X}_k = \tau_k + X_i \psi_{ik} \, .$$

Ce déplacement a douze degrés de liberté selon les trois grandeurs τ_k et les neuf grandeurs ψ_{ik} indépendantes l'une de l'autre. Cette transformation est invariante si les τ_k sont les trois composantes d'un vecteur τ et les neuf ψ_{ik} les neuf composantes d'un tenseur ψ d'ordre 2. Chaque déplacement $(1\bar{1})$ s'écrit alors[2]

$$\bar{R} = \tau + R \cdot \psi$$

où $\bar{R}$ et R sont des rayons vecteurs issus du centre C du système de coordonnées et marquent la position des points du continuum par rapport à ce système. Nous prendrons τ et ψ en fonction du temps comme variables cinématiques, et nous les décomposerons en des opérateurs de translation, rotation et déformation correspondant au déplacement $(1\bar{1})$, afin de trouver le plus simplement possible les expressions qui relient ces variables cinématiques aux variables dynamiques.

Pour cette décomposition, il faut tout d'abord voir comment un déplacement linéaire affecte les distances et les directions entre les points matériels du corps.

[1] Nous convenons que dans toutes les formules il y a sommation sur tout indice redoublé.

[2] Pour l'explication des symboles et des calculs de ce chapitre, voir l'appendice.

Envisageons deux points matériels arbitraires P_N et P_M. Le vecteur $P_N P_M$ qui détermine leur distance sera désigné par r avant et par $\bar{r}$ après le déplacement.

En substituant pour $\overline{R}_M$ et $\overline{R}_N$ les valeurs indiquées par la transformation on obtient

$$\bar{r} = r \cdot \psi$$

r et $\bar{r}$ peuvent être considérés comme des rayons vecteurs issus du point matériel P_N du milieu.

Nous pouvons aussi considérer τ et ψ comme des opérateurs agissant sur les rayons vecteurs r; τ effectue une translation et ψ une représentation affine. Pour déterminer le changement de distance résultant d'un déplacement linéaire nous envisageons le rapport des valeurs absolues de $\bar{r}$ et r:

$$\frac{|\bar{r}|}{|r|} = \frac{\sqrt{\bar{r} \cdot \bar{r}}}{\sqrt{r \cdot r}} = \frac{\sqrt{(r \cdot \psi) \cdot (r \cdot \psi)}}{\sqrt{r \cdot r}} = \frac{\sqrt{r \cdot (\psi \cdot \tilde{\psi}) \cdot r}}{\sqrt{r \cdot r}}$$

$$= \frac{\sqrt{r \cdot \left(\sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}} \cdot \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}\right) \cdot r}}{\sqrt{r \cdot r}} .$$

Puisque $(\psi \cdot \tilde{\psi})$ est toujours un tenseur symétrique[1], $\sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}$ est également symétrique, et on peut intervertir l'ordre des termes sous la racine, ce qui nous donne

$$\frac{|\bar{r}|}{|r|} = \frac{\sqrt{\left(r \cdot \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}\right) \cdot \left(r \cdot \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}\right)}}{\sqrt{r \cdot r}} = \frac{\left|r \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}\right|}{|r|}$$

Si l'on pose, pour abréger

$$r' = r \cdot \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}} = r \cdot \vartheta$$

il vient

$$\frac{|\bar{r}|}{|r|} = \frac{|r'|}{|r|}$$

[1] On a en effet

$$\widetilde{(\psi \cdot \tilde{\psi})} = \tilde{\tilde{\psi}} \cdot \tilde{\psi} = \psi \cdot \tilde{\psi}$$

ce qui met cette symétrie en évidence.

et

$$\bar{r} = r \cdot \psi = r' \cdot \left((\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi\right) = r' \cdot \varphi$$

avec

$$\frac{|\bar{r}|}{|r'|} = 1$$

On peut interpréter ces résultats d'une manière intuitive; cela nous permettra de montrer le rôle des tenseurs ϑ et φ dans la cinématique des corps déformables et de les définir comme tenseur d'allongement trirectangulaire et tenseur de rotation (sans ou avec inversion) associé au déplacement $(1\bar{1})$.

Pour cette interprétation il faut considérer les r' comme des rayons vecteurs issus, dans la position (1), du même point matériel P_N que les r; les r' déterminent alors une certaine position (1′) du continuum et nous imaginons que le déplacement total $(1\bar{1})$ soit effectué en deux étapes dont la première fasse passer de (1) en (1′) et la deuxième de (1′) en $(\bar{1})$.

Ce premier déplacement (11′) caractérisé par $r' = r \cdot \vartheta$ entraîne un changement des distances de $|r|$ en $|r'|$ qui est identique à celui du déplacement total $(1\bar{1})$ parce que la relation entre $|r|$ et $|r'|$ est la même que celle entre $|r|$ et $|\bar{r}|$.

Le deuxième déplacement $(1'\bar{1})$ caractérisé par $\bar{r} = r' \cdot \varphi$ est rigide et ne produit aucun changement des distances parce que la relation entre $|r'|$ et $|\bar{r}|$ est qu'ils sont identiques.

Si enfin on réalise les déplacements (11′) et $(1'\bar{1})$ l'un après l'autre on retrouve le déplacement total

$$r' = r \cdot (\psi \cdot \tilde{\psi})^{1/2}$$

$$\bar{r} = r' \left((\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi\right)$$

donc

$$\bar{r} = r \cdot \psi$$

Nous fondant sur ces considérations nous introduirons les définitions fondamentales concernant la mécanique des corps déformables. Nous considérons: *a*) les grandeurs associées au déplacement $(1\bar{1})$, qui caractérisent le changement de distances; *b*) celles qui caractérisent la partie rigide de ce déplacement; et

finalement *c*) ce qui découle de ces considérations, c'est-à-dire la décomposition du déplacement général $(1\bar{1})$ en translation, rotation et déformation.

a) *Les grandeurs caractérisant le changement de distances dans le déplacement* $(1\bar{1})$.

I. Le tenseur symétrique avec trois valeurs propres [1] réelles et positives:

$$\vartheta = \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}$$

sera nommé *tenseur d'allongement* associé au déplacement général $(1\bar{1})$, car il caractérise le changement des longueurs des distances entre les points matériels.

Le théorème de Cayley-Hamilton permet de déterminer les valeurs propres et les directions des axes principaux de ϑ. Les valeurs propres sont toutes réelles et positives; elles valent

$$\vartheta_k = + \sqrt{(\psi \cdot \tilde{\psi})_k}$$

où $(\psi \,.\, \tilde{\psi})_k$ sont les trois valeurs propres du tenseur $\psi \,.\, \tilde{\psi}$. Les directions d'axes principaux de ϑ sont normales entre elles, car ϑ est symétrique, et elles coïncident avec celles du tenseur $\psi \,.\, \tilde{\psi}$. Soient alors trois vecteurs unités e_k le long des trois axes principaux de ϑ:

$$r = r_k e_k$$

$$r' = r'_k e_k$$

$$\vartheta = \vartheta_k e_k e_k$$

d'où l'on tire

$$r' = r \cdot \vartheta = r'_k e_k = \vartheta_k r_k e_k \,,$$

[1] On prouve que l'équation de Cayley-Hamilton pour le tenseur $\psi \cdot \tilde{\psi}$ a toujours trois racines réelles et positives $(\psi \cdot \tilde{\psi})_k$; les ϑ_k étant définis comme leur racine carrée sont par conséquent réelles et puisque pour toutes les racines il faut prendre le signe $+$, ces racines représentent les valeurs absolues des vecteurs, ils sont positifs également.

relation qui décompose l'allongement subi par r en trois allongements perpendiculaires dans les directions des e_k; les grandeurs de ces allongements sont mesurées par le rapport des longueurs après et avant l'allongement, ces rapports étant identiques aux valeurs propres ϑ_k de ϑ. Les formules qui donnent explicitement les valeurs propres de ϑ et les vecteurs unités e_k sont les suivantes:

$$\vartheta = \vartheta_k e_k e_k$$

avec

$$\vartheta_k = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{I}}^2 - 3\mathcal{J}_{\mathrm{II}}}\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{-2\mathcal{J}_{\mathrm{I}}^3 + 9\mathcal{J}_{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathrm{II}} - 27\mathcal{J}_{\mathrm{III}}}{2\sqrt{(\mathcal{J}_{\mathrm{I}}^2 - 3\mathcal{J}_{\mathrm{II}})^3}}\right)}$$

où $\mathcal{J}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{J}_{\mathrm{II}}$ et $\mathcal{J}_{\mathrm{III}}$ sont les trois invariants fondamentaux du tenseur $(\psi \cdot \tilde{\psi})$,

$$e_k = \frac{\overset{(k)}{\mathrm{A}}_{ij}\,\varepsilon_j}{\sum_j \overset{(k)}{\mathrm{A}}{}_{ij}^2}$$

où ε_j sont trois vecteurs unités orthogonaux pris comme bases d'un système de référence, et A_{ij} le mineur relatif à l'élément ij dans la matrice

$$\left|(\psi \cdot \tilde{\psi})_{uv} - \vartheta_k^2 \cdot \mathrm{I}_{uv}\right| .$$

Si deux des valeurs ϑ_k ou toutes les trois coïncident ($\vartheta_1 = \vartheta_2$ ou $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$), le tenseur ϑ est dit deux ou trois fois dégénéré, sa symétrie (symbolisée par V_h) étant alors cylindrique $\mathrm{D}_{\infty h}$ ou sphérique K_h. Dans les cas dégénérés, l'orientation des axes principaux n'est pas complètement déterminée; dans le cas deux fois dégénéré l'axe 3 coïncide avec l'axe du cylindre, l'axe 1 peut être choisi arbitrairement dans le plan perpendiculaire à l'axe 3 et l'axe 2 perpendiculaire à l'axe 1 et à l'axe 3; dans le cas trois fois dégénéré l'orientation des axes est complètement arbitraire.

En général le volume change par suite d'une déformation; soient v et $\bar{v}$ le volume avant et après la déformation; on trouve

$$\bar{v} = v(\vartheta)_{\mathrm{III}} .$$

Le volume reste donc constant si $(\vartheta)_{III} = 1$. Dans ce cas

$$\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 = 1 \ .$$

Chaque déformation peut être décomposée en une dilatation isotrope et sphérique ne modifiant que le volume et une déformation anisotrope à volume constant:

$$\vartheta = \vartheta_0 \, . \, \vartheta'$$

où

$$\vartheta_0 = \sqrt[3]{(\vartheta)_{III}} \, . \, I$$

et

$$\vartheta' = \frac{1}{\sqrt[3]{(\vartheta)_{III}}} \vartheta \ .$$

En général les surfaces changent aussi. Mais il existe une déformation particulière pour laquelle les aires sont conservées, et qui est caractérisée par les relations

$$(\vartheta)_{III} = 1$$

ou

$$\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 = \vartheta_3 = 1 \ .$$

C'est une déformation, dans le plan des axes principaux e_1, e_2, les rayons vecteurs parallèles à l'axe principal e_3 restant inchangés.

II. Pour simplifier, dans la suite, les calculs (voir la dynamique), on introduit le *tenseur de déformation* s défini comme suit:

Le tenseur symétrique

$$s = \ln \vartheta = \tfrac{1}{2} \ln (\psi \cdot \tilde{\psi})$$

qui a des valeurs propres réelles $s_k = \ln \vartheta_k$ et des directions d'axes principaux parallèles à celles de ϑ sera appelé tenseur de déformation, et les valeurs propres s_k peuvent être considérées comme des mesures de la déformation dans ces directions. La déformation peut être définie en général comme le logarithme

de l'allongement, c'est-à-dire le logarithme du rapport des longueurs après et avant l'allongement. Si, par exemple, l'allongement est égal à 1, la déformation est égale à ln 1, soit à zéro.

La décomposition d'une déformation en une dilatation sphérique et une déformation à volume constant, qui pour les tenseurs ϑ se fait d'une manière multiplicative, se fait pour les tenseurs logarithmiques de la manière additive suivante:

On a d'abord

$$\ln \bar{v} = \ln v + \ln (\vartheta_{\mathrm{III}}) \ .$$

Or (voir l'appendice)

$$\ln (\vartheta_{\mathrm{III}}) = s_{\mathrm{I}}$$

où $s = \ln \vartheta$. Donc: le volume reste constant si $s_{\mathrm{I}} = 0$; dans ce cas

$$s_{\mathrm{I}} = s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

et s est par conséquent un déviateur.

Chaque tenseur de déformation s s'écrit alors

$$s = s_0 + s'$$

où

$$s_0 = \ln \vartheta_0 = \tfrac{1}{3} \ln (\vartheta_{\mathrm{III}}) \cdot \mathrm{I} = \frac{1}{3} s_{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{I}$$

et

$$s' = \ln \vartheta' = s - \frac{1}{3} s_{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{I} \ .$$

Le tenseur s_0 est associé à la déformation sphérique du volume, le tenseur s' à la déformation à volume constant; le tenseur s' est un dérivateur, car $s'_{\mathrm{I}} = 0$.

Les considérations concernant le changement des surfaces sont analogues. On a en particulier pour les déformations à aire constante

$$s_{\mathrm{I}} = 0$$

et

$$s_1 + s_2 = s_3 = 0 \ .$$

Le tenseur s est dans ce cas un déviateur plan, car une de ses valeurs propres est nulle et la somme de deux autres donne zéro.

Le tenseur d'allongement $\mathfrak{S}$ ainsi que le tenseur de déformation déterminent donc, en vertu des définitions ci-dessus, le changement des distances entre les points matériels lors d'un déplacement linéaire général $(1\bar{1})$ et par conséquent « la déformation » du milieu pendant le passage de la position (1) à la position $(\bar{1})$.

Nous avons jusqu'ici discuté le cas général dans lequel il fallait préciser l'allongement et la déformation correspondant à un déplacement linéaire général $(1\bar{1})$. Il faut encore envisager deux cas particuliers, nommés *déformation pure* et *déplacement rigide*, pour lesquels nous donnerons les définitions suivantes:

III. Un déplacement qui consiste en trois allongements trirectangulaires sera nommé « *déformation pure* »; il est caractérisé par $\psi = \mathfrak{S} = \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}$. La déformation pure est donc représentée par

$$\bar{r} = r \cdot \mathfrak{S}$$

ou

$$\bar{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cdot \mathfrak{S}$$

où $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}$ est un tenseur symétrique avec les valeurs propres $\mathfrak{S}_k$ réelles et positives. La symétrie de $\mathfrak{S}$ impose à ses composantes trois conditions, de sorte que 6 seulement des 9 composantes sont indépendantes. D'où, 6 degrés de liberté pour ces déplacements.

IV. Un déplacement qui laisse inchangé les distances sera dit rigide.

b) *Partie rigide d'un déplacement général* $(1\bar{1})$.

La partie rigide du déplacement $(1\bar{1})$ consiste en le déplacement $(1'\bar{1})$ qui se présentait sous la forme

$$\bar{r} = r' \cdot \varphi$$

avec

$$\varphi = ((\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi) \ .$$

Le tenseur φ est un tenseur orthogonal car

$$\varphi \cdot \tilde{\varphi} = (\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot (\psi \cdot \tilde{\psi}) \cdot (\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} = \mathrm{I}$$

(la symétrie des tenseurs $(\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2}$ et $(\psi \cdot \tilde{\psi})$ permet de changer l'ordre des termes).

Nous avons donc $\varphi = \omega$ ou $\varphi = j \cdot \omega$ suivant que le déterminant φ_{III} de φ vaut $+1$ ou -1. Le signe de ce déterminant est toujours identique à celui du déterminant ψ_{III} de ψ; donc si on suppose que ψ ne contient pas d'inversion son déterminant est positif et $\varphi = \omega$ représente une rotation. Cette supposition sera faite dans la suite de ce travail. Cela étant nous pouvons introduire les définitions suivantes:

V. Le tenseur orthogonal

$$\omega = \left((\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi\right)$$

avec un déterminant positif sera appelé tenseur de rotation associé au déplacement général $(1\bar{1})$.

En parfaite analogie avec le tenseur d'allongement nous introduisons également ici le logarithme de ce tenseur:

VI. Le tenseur antisymétrique

$$w = \ln \omega = \ln \left((\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi\right)$$

sera nommé *tenseur d'angle de rotation* associé au déplacement général $(1\bar{1})$.

Les déplacements rigides sont définis par la condition

$$|\bar{r}| = |r| ,$$

ce qui implique que

$$\bar{r} = r \cdot \varphi$$

avec

$$\varphi \cdot \tilde{\varphi} = \mathrm{I} .$$

Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un déplacement linéaire soit rigide, est que le tenseur φ soit

orthogonal. Il faut distinguer deux sortes de tenseurs orthogonaux, selon que leur déterminant vaut $+1$ ou -1. Les tenseurs orthogonaux auxquels correspond le déterminant $+1$ représentent une rotation et seront désignés par ω; les tenseurs avec déterminant -1 représentent une rotation à laquelle se superpose une inversion [1], ils seront désignés par $j \cdot \omega$ (où j désigne le tenseur d'inversion $j = -e_k e_k$). Les déplacements rigides seront donc représentés par

$$\bar{r} = r \cdot \omega \qquad \text{ou} \qquad \bar{r} = r \cdot j \cdot \omega$$

soit

$$\bar{\mathrm{R}} = \tau + \mathrm{R} \cdot \omega \qquad \text{ou} \qquad \bar{\mathrm{R}} = \tau + \mathrm{R} \cdot j \cdot \omega$$

avec la condition d'orthogonalité

$$\omega \cdot \tilde{\omega} = \mathrm{I} \, .$$

Cette condition est équivalente à 6 équations entre les 9 composantes de ω, de sorte qu'il n'y a que 3 composantes de ω qui soient indépendantes; les déplacements rigides n'ont par conséquent que 6 degrés de liberté, 3 associés à τ et trois aux composantes indépendantes de ω.

Les formules ci-dessus montrent que chaque déplacement rigide peut être considéré comme composé d'une translation et d'une rotation, éventuellement d'une translation et d'une rotation avec inversion. Dans le mouvement continu d'un milieu homogène, il ne peut y avoir d'inversion. C'est pourquoi nous admettrons que tout déplacement rigide est représenté par τ et ω et non par τ et $j \, . \, \omega$.

Pour un calcul explicite, nous devons définir l'axe et l'angle q de la rotation. Ils peuvent être déterminés au moyen de l'équation de Cayley-Hamilton. Un tenseur orthogonal ω a un axe principal réel qui coïncide avec l'axe de la rotation et deux axes

[1] Par une transformation φ où l'on choisit pour r successivement les e_k, on trouve $\bar{r}_k = \bar{e}_k$, ce qui représente un système trirectangulaire; selon que e_k et $\bar{e}_k$ représentent tous deux des systèmes droits (ou gauches) ou que l'un représente un système droit et l'autre un système gauche, le tenseur effectue une rotation ou une rotation combinée avec une inversion.

imaginaires dans le plan perpendiculaire au premier. Les valeurs propres du tenseur sont e^{iq}, e^{-iq}, et 1 où q représente l'angle de la rotation; les logarithmes de ces valeurs propres sont donc iq, $-iq$ et 0. Nous avons introduit le *tenseur d'angle de rotation* ϖ par la relation

$$\varpi = \ln \omega \ ,$$

ϖ est un tenseur antisymétrique:

$$\varpi = -\overset{\leftrightarrow}{\varpi} \ ,$$

ses valeurs propres sont $i(q + 2n\pi)$, $-i(q + 2n\pi)$ et $0 + 2n\pi i$, et ses axes principaux coïncident avec ceux de ω. Dans un système trirectangulaire de coordonnées dont l'axe 3 coïncide avec l'axe de rotation, on trouve [1]

$$\varpi = q(e_1 e_2 - e_2 e_1) = \begin{vmatrix} 0 & q & 0 \\ -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ce qui justifie le nom de tenseur d'angle de rotation donné à ϖ. Dans un système trirectangulaire orienté d'une manière quelconque on trouve

$$\varpi = \varpi_{ik} e_i e_k$$

avec $\varpi_{ii} = 0$ et $\varpi_{ik} = -\varpi_{ki}$. On peut aussi trouver l'angle et l'axe de la rotation en introduisant le pseudo-vecteur (vecteur axial)

$$\mathfrak{w} = \frac{\omega_\times}{1 + \omega_I} \ ;$$

l'axe de rotation est alors parallèle à $\mathfrak{w}$ et l'angle q est donné par la relation

$$q = 2 \operatorname{arctg} |\mathfrak{w}| \ .$$

Ajoutons encore une remarque:

Nous avons considéré plus haut le déplacement linéaire général $(1\bar{1})$ comme étant composé de deux déplacements successifs $(11')$ et $(1\bar{1})$; d'après les définitions ci-dessus ces deux

[1] On peut négliger les multiples de 2π dans cette représentation.

composantes sont une déformation pure et un déplacement rigide.

c) *La translation, la rotation et la déformation associées au déplacement général* ($1\bar{1}$).

La décomposition d'un déplacement quelconque se fera de la manière suivante: Nous admettrons d'abord que le déplacement linéaire ne contient pas d'inversion et que par conséquent le déterminant ψ_{III} de ψ est positif. Dans ce cas on peut décomposer ψ en une rotation et une déformation pure. Selon qu'on effectue la déformation avant ou après la rotation (ce que nous indiquerons par un a ou un p ajouté au symbole tensoriel) on a

$$r' = r \cdot \vartheta a \,, \qquad r^* = r \cdot \omega a \,,$$

$$r'' = r' \cdot \omega p \,, \qquad r^{**} = r \cdot \vartheta p \,,$$

$$\bar{r} = r'' = r \cdot \vartheta a \cdot \omega p = r \cdot \psi \,, \qquad \bar{r} = r^{**} = r \cdot \omega a \cdot \vartheta p = r \cdot \psi \,.$$

On en tire (voir le détail à l'appendice) la valeur des tenseurs:

$$\vartheta a = \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}} \,,$$

$$\vartheta p = \sqrt{\tilde{\psi} \cdot \psi} \,,$$

$$\omega = \omega a = \omega p = (\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi = \psi \cdot (\tilde{\psi} \cdot \psi)^{-1/2} \,,$$

d'où les tenseurs logarithmiques

$$sa = \frac{1}{2} \ln (\psi \cdot \tilde{\psi}) \,,$$

$$sp = \frac{1}{2} \ln (\tilde{\psi} \cdot \psi) \,,$$

$$w = wa = wp = \ln \left\{ (\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi \right\} = \ln \left\{ \psi \cdot (\tilde{\psi} \cdot \psi)^{-1/2} \right\} .$$

Si on compare ces formules avec celles du paragraphe précédent on voit apparaître ce fait que seul ϑa est identique à ϑ et non ϑp. Nous appellerons donc ϑa le tenseur d'allongement, sa le tenseur de déformation, tandis que ϑp et sp seront les tenseurs post-rotationnels d'allongement et de déformation. Le tenseur

ωa étant identique à ωp et $w a$ à $w p$ on notera simplement ω et w, qui seront appelés tenseur de rotation et tenseur d'angle de rotation. Selon l'ordre de la superposition de la translation, de la rotation et de la déformation pure on obtient deux différents tenseurs d'allongement ϑa et ϑp. Pour la translation et la rotation on obtient toujours les mêmes valeurs τ et ω, quel que soit l'ordre. Remarquons qu'en principe on pourrait se contenter d'introduire seulement les tenseurs ϑa et sa en exprimant ϑp et sp à partir de ϑa et sa, ω et w, mais comme dans les calculs explicites les grandeurs ϑp et sp interviennent souvent, il est préférable de les introduire lorsqu'on se rapporte à un système de référence Σ fixé dans l'espace [1].

Les directions d'axes principaux de ϑa coïncident avec celles de sa d'une part, celles de ϑp avec celles de sp d'autre part; elles sont trirectangulaires et dirigées dans les directions des trois allongements (avant ou après la rotation). En introduisant des vecteurs unités ea_k et ep_k dans ces directions on trouve les formes dyadiques suivantes pour les tenseurs:

$$\omega = ea_k ep_k \qquad w = q(e_1 e_2 - e_2 e_1)$$

$$\vartheta a = \vartheta_k ea_k ea_k \qquad sa = s_k ea_k ea_k$$

$$\vartheta p = \vartheta_k ep_k ep_k \qquad sp = s_k ep_k ep_k \,.$$

Nous nommerons τ le *vecteur-opérateur de translation*, ω le *tenseur-opérateur de rotation* et ϑ le *tenseur d'allongement pur*, ces tenseurs étant associés au déplacement $(1\bar{1})$.

Nous prendrons comme variables cinématiques, fonctions du temps, le vecteur de translation τ, le tenseur d'angle de rotation $w = \ln \omega$ et le tenseur de déformation $s = \ln \vartheta$.

L'ordre dans lequel on effectue la superposition des opérations translation, rotation et allongement a une grande importance quant au déplacement résultant. Le déplacement $(1\bar{1})$ est équivalent à trois déplacements successifs représentés par les

[1] La loi d'élasticité, par exemple, s'exprime alors beaucoup plus simplement en fonction de sp qu'en fonction de sa, car dans le cas linéaire la tension est simplement proportionnelle à sp et non pas à sa.

trois opérations linéaires τ, ω, et ϑ à condition de respecter l'ordre suivant:

$$R' = R \cdot \vartheta a$$

$$R'' = R' \cdot \omega$$

$$R''' = R'' + \tau = \overline{R} = \tau + R \cdot \psi \cdot$$

La succession des opérations est donc 1° l'allongement, 2° la rotation et 3° la translation; si on compose les mêmes opérations dans un autre ordre on n'obtient en général pas le déplacement $(1\bar{1})$.

Pour diverses applications il est utile de discuter brièvement une autre méthode équivalente à celle exposée ci-dessus pour la décomposition d'un déplacement linéaire général en une déformation pure et un déplacement rigide; cette méthode emploie un système mobile de référence.

Au lieu du système de référence Σ, qui était fixe dans l'espace, on introduit un système mobile Σ_m qui se déplace et tourne, tout en restant rigide, de manière que le déplacement $(1\bar{1})$ soit dans Σ_m une déformation pure. La composante rigide du déplacement $(1\bar{1})$ est alors donnée par le déplacement de Σ_m par rapport à Σ, la composante de déformation par le déplacement du milieu par rapport à Σ_m.

Pour plus de simplicité nous supposerons dans le calcul explicite que l'origine de Σ soit le point matériel P_N et qu'au temps $t = t_1$ le système Σ_m coïncide avec Σ.

Les rayons vecteurs de Σ_m, qui seront désignés par ρ, suivent le déplacement rigide du système mobile. Au temps $t = t_1$ nous avons en vertu de notre supposition

$$\rho = r = R$$

tandis qu'au temps $t = t_{\bar{1}}$

$$\bar{\rho} = \rho \cdot \vartheta^*$$

$$\bar{r} = r \cdot \psi$$

$$\overline{R} = \tau + R \cdot \psi$$

Les relations qui relient Σ_m à Σ sont

$$\bar{R} = \tau^* + \bar{\rho} \cdot \omega^*$$

et

$$\bar{r} = \bar{\rho} \cdot \omega^*$$

En éliminant les rayons vecteurs dans ces équations on obtient

$$\tau^* = \tau \; ; \quad \vartheta^* = \vartheta a = \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}} \quad \text{et} \quad \omega^* = \omega = ((\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi)$$

Les formules ci-dessus montrent comment les tenseurs introduits dans le système Σ opèrent dans le système mobile Σ_m sur les rayons vecteurs ρ.

Représentation géométrique. — Nous terminerons ces considérations générales par une représentation géométrique. Un déplacement linéaire $(1\bar{1})$ transforme une sphère de rayon unité en un ellipsoïde. Le vecteur de translation τ est le vecteur $\overrightarrow{C\bar{C}}$ qui joint les centres de la sphère et de l'ellipsoïde; les demi-grands axes de l'ellipsoïde sont les ϑ_k, leurs directions sont parallèles à ep_k; d'autre part le trièdre trirectangulaire défini par trois vecteurs unités issus du centre de la sphère, qui par suite du déplacement $(1\bar{1})$ est transformé en les trois axes de l'ellipsoïde, est identique au trièdre ea_k; les directions de ea_k et ep_k sont donc différentes dans l'espace mais identiques dans le milieu déformé, c'est-à-dire que ce sont les mêmes points matériels qui se trouvent au moment $t = t_1$ sur les ea_k et au moment $t = t_{\bar{1}}$ sur les axes ϑ_k ep_k de l'ellipsoïde. Enfin la rotation ω est identique à la rotation qui transforme le triède ea_k en un trièdre ep_k.

Mathématiquement cela s'écrit de la manière suivante: Le déplacement $\bar{r} = r \cdot \psi$ transforme la sphère $r \cdot r = 1$ de rayon 1 en une surface

$$\bar{r} \cdot \psi^{-1} \cdot \bar{r} \cdot \psi^{-1} = 1 \; ,$$

soit

$$\bar{r} \cdot \psi^{-1} \cdot \tilde{\psi}^{-1} \cdot \bar{r} = 1 \; ,$$

ou encore

$$\bar{r} \cdot (\tilde{\psi} \cdot \psi)^{-1} \cdot \bar{r} = \bar{r} \cdot \vartheta p^{-2} \cdot \bar{r} = 1 \; ,$$

ce qui est un ellipsoïde puisque $\mathfrak{S}$ est symétrique. Explicitement l'équation de cet ellipsoïde est la suivante:

$$\frac{\bar{r}_1^2}{\mathfrak{S}_1^2} + \frac{\bar{r}_2^2}{\mathfrak{S}_2^2} + \frac{\bar{r}_3^2}{\mathfrak{S}_3^2} = 1 \ .$$

Les directions d'axes de cet ellipsoïde sont donc bien parallèles aux axes principaux de $\mathfrak{S}p$ et les longueurs des axes égales à $\mathfrak{S}_k ep_k$.

Si on remplace ψ par sa valeur $\mathfrak{S}a \cdot \omega$ et r par un des vecteurs unités ea_k,

$$\mathfrak{S}_k ep_k = ea_k \cdot \psi$$

et

$$\omega = ea_k ep_k \ ,$$

ce qui montre que le trièdre ea_k se transforme par suite du déplacement en un trièdre parallèle aux axes de l'ellipsoïde et que c'est la rotation ω qui fait passer du trièdre ea_k au trièdre ep_k.

On peut se demander d'autre part quel est l'ellipsoïde dans la position (1) qui a donné dans la position ($\bar{1}$) une sphère dont l'équation est

$$\bar{r} \cdot \bar{r} = 1 \ .$$

Cet ellipsoïde a pour équation

$$r \cdot \psi \cdot \tilde{\psi} \cdot r = r \cdot \mathfrak{S}a^2 \cdot r = 1 \ ,$$

ce qu'on vérifie en effectuant sur lui la transformation ($1\bar{1}$) qui donne bien l'équation de la sphère $\bar{r} \cdot \bar{r} = 1$.

B. *Le problème de la superposition de déplacements successifs.*

Etat non-travaillé et état travaillé. — Dans tout ce qui précède nous n'avons étudié qu'un seul déplacement d'une position (1) à une position ($\bar{1}$) d'un élément de volume dv du milieu déformable. Pour établir la cinématique de l'élément de volume on considère d'abord dv dans un état où il n'existe aucune action, soit un état dans lequel tous les points matériels qui constituent

dv sont en repos par rapport à un système de référence fixe dans l'espace. Cet état sera nommé état non-travaillé et sera désigné par (0). Au cours d'un déplacement l'état (0) passe à d'autres états (a), (b) ... (n), qui seront nommés états travaillés. Suivant qu'on prend l'état non-travaillé (0) ou un état travaillé (1) comme référence, on dira que l'on étudie la mécanique du milieu non-travaillé ou celle du milieu travaillé.

Le problème qui se pose est de déterminer comment on passe d'un état (0) à un état (k) au moyen des intermédiaires (a), (b) ... (l); c'est-à-dire qu'il faut trouver la superposition des déplacements ($0a$), (ab) ... (lk) qui fournit le déplacement global ($0k$), les déplacements élémentaires (ab)... étant eux-mêmes décomposés en translation, rotation et déformation pure.

Au cours d'un mouvement quelconque, les points matériels contenus dans un élément de volume changeront leur position d'une manière linéaire par rapport à un système de référence donné. Soit (0) une position arbitraire prise comme base, (1) et ($\bar{1}$) deux autres positions; le problème qui se pose est de calculer les variables caractérisant le déplacement résultant ($0\bar{1}$) en fonction des variables caractérisant les déplacements successifs (01) et ($1\bar{1}$). Ce problème est connu sous le nom de problème de la superposition; il sert de base pour établir la cinématique des corps prédéformés, c'est-à-dire des corps qui, par rapport à un certain état (0) étaient soumis à un déplacement linéaire (en particulier à une déformation) (01), et auxquels on fait subir dans cet état un déplacement linéaire (une déformation) accessoire ($1\bar{1}$).

Nous nous intéresserons dans ce travail à la superposition des rotations et des déformations seulement, en faisant la supposition que pendant tout le mouvement le point P_N reste inchangé. Dans ce cas tous les R possibles sont identiques aux r correspondants et τ est nul; les déplacements (01), ($1\bar{1}$) et ($0\bar{1}$) seront représentés par les équations

$$r = \overset{\circ}{r} \cdot \Psi \qquad \text{(déplacement (01))}$$

$$\bar{r} = r \cdot \psi \qquad \text{(déplacement ($1\bar{1}$))}$$

$$\bar{r} = \overset{\circ}{r} \cdot \overline{\Psi} \qquad \text{(déplacement résultant ($0\bar{1}$))}$$

où $\overset{\circ}{r}$, r et $\bar{r}$ sont les rayons vecteurs dans les positions (0), (1) et ($\bar{1}$), Ψ, ψ et $\overline{\Psi}$ les tenseurs opérateurs qui caractérisent les déplacements (01), (1$\bar{1}$) et (0$\bar{1}$). On en déduit que

$$\overline{\Psi} = \Psi \cdot \psi \, .$$

S'il suffisait de caractériser les déplacements par les tenseurs opérateurs, le problème serait résolu par cette équation, mais pour déterminer les relations entre les déplacements et les grandeurs dynamiques (forces, moments de rotation, tension) cela ne suffit pas. Il faut connaître pour chaque déplacement la translation, la rotation et la déformation qui le composent.

En associant Θa, Θp et Ω ainsi que leurs logarithmes $\mathrm{S}a$, $\mathrm{S}p$ et W au tenseur Ψ, de même en associant ϑa, ϑp et ω ainsi que leurs logarithmes sa, sp et w au tenseur ψ et enfin $\overline{\Theta a}$, $\overline{\Theta p}$, $\overline{\Omega}$ et leurs logarithmes $\overline{\mathrm{S}a}$, $\overline{\mathrm{S}p}$, $\overline{\mathrm{W}}$ au tenseur $\overline{\Psi}$ on obtient la loi de superposition pour les rotations et les déformations en appliquant la méthode de décomposition établie ci-dessus aux déplacements (01), (1$\bar{1}$) et (0$\bar{1}$). Les lois générales de superposition sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta} a &= \Omega \cdot \overline{\Theta} a^* \cdot \Omega^{-1} \\
\overline{\Theta} p &= \omega^{-1} \cdot \overline{\Theta} p^* \cdot \omega \\
\overline{\Omega} &= \Omega \cdot \overline{\Omega}^* \cdot \omega
\end{aligned}$$

où $\overline{\Theta a}^*$, $\overline{\Theta p}^*$ et $\overline{\Omega}^*$ sont des grandeurs auxiliaires associées à un tenseur $\overline{\Psi}^* = \Theta p \, . \, \vartheta a$ résultant de la superposition des deux allongements purs Θp et ϑa; le calcul explicite donne

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta} a^* &= (\Theta p \cdot \vartheta a^2 \cdot \Theta p)^{1/2} \\
\overline{\Theta} p^* &= (\vartheta a \cdot \Theta p^2 \cdot \vartheta a)^{1/2} \\
\overline{\Omega}^* &= \overline{ea}_k^* \, \overline{ep}_k^*
\end{aligned}$$

($\overline{ea}_k^*$ et $\overline{ep}_*^k$ sont les vecteurs unités dirigés dans les directions d'axes principaux de $\overline{\Theta}_a^*$ et de $\overline{\Theta}_p^*$).

La loi de superposition pour les tenseurs logarithmiques est analogue; on trouve

$$\bar{\mathrm{S}}a = e^{\mathrm{W}}\,\overline{\mathrm{S}a^*}\,e^{-\mathrm{W}}$$

$$\bar{\mathrm{S}}p = e^{-\mathrm{W}}\,\bar{\mathrm{S}}p^*\,e^{\mathrm{W}}$$

$$\overline{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{W}}\,e^{\overline{\mathrm{W}}^*}\,e^{\mathrm{W}}$$

où $\overline{\mathrm{S}a}^*$, $\overline{\mathrm{S}p}^*$ et $\overline{\mathrm{W}}^*$ sont les tenseurs logarithmiques de $\overline{\Theta}a^*$, $\overline{\Theta}p^*$ et $\overline{\Omega}^*$.

Il est commode de formuler ces lois en réduisant les tenseurs à leur forme diagonale, ce qui se fait à l'aide de l'équation de Cayley-Hamilton.

Les dérivées des tenseurs par rapport au temps sont données par la limite des différences entre les tenseurs surlignés et les autres, divisées par dt ($dt \to 0$). Par contre les tenseurs de la vitesse de déformation S et de rotation W sont donnés par

$$\dot{\mathrm{S}} = \lim_{dt=0} \frac{sa}{dt}, \qquad \dot{\mathrm{W}} = \lim_{dt=0} \frac{w}{dt}.$$

Pour le cas particulier de déplacements à aire constante dans un plan, tous les opérateurs logarithmiques sont des déviateurs plans, on a alors $\bar{\mathrm{S}}_k = \mathrm{S}_k + s_k \cos 2\sigma$, où σ signifie l'angle entre deux axes de même indice de sa et de $\mathrm{S}p$. Les figures que nous donnons illustrent ces formules, précisément pour le cas où l'on a affaire à des déviateurs plans, car il s'agit de mouvements qui conservent les aires. Dans les mouvements à aire constante, les tenseurs $\mathrm{S}a$, sa, $\bar{\mathrm{S}}a$, $\mathrm{S}p$, sp, $\bar{\mathrm{S}}p$, W, w et $\overline{\mathrm{W}}$ sont aussi des déviateurs plans, ainsi que $\dot{\mathrm{S}}a$, $\dot{\mathrm{S}}p$ et $\dot{\mathrm{W}}$.

La décomposition de Ψ, ψ et $\overline{\Psi}$ en tenseur d'angle de rotation et de déformation nous donne ce qui suit:

1° Pour les tenseurs de déformation associés à Ψ on trouve les formes dyadiques

$$\mathrm{S}a = \mathrm{S}_k\, \varepsilon a_k\, \varepsilon a_k\,,$$

$$\mathrm{S}p = \mathrm{S}_k\, \varepsilon p_k\, \varepsilon a_k\,,$$

dans lesquelles les valeurs propres S_k s'expriment ainsi:

$$\mathrm{S}_k = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{S}$$

où $\mathfrak{S}$ est la valeur absolue de Sa et Sp:

$$\mathfrak{S} = \sqrt{\mathrm{S}a \,.\,.\, \mathrm{S}a} = \sqrt{\mathrm{S}p \,.\,.\, \mathrm{S}p} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcch} \Psi_{ik} \Psi_{ik} \,,$$

et les vecteurs unités εa_k et εp_k, dirigés selon les directions d'axes principaux de Sa et de Sp, ainsi:

$$\varepsilon a_k = e_j \cos \mathrm{A}_{jk} \,,$$
$$\varepsilon p_k = e_j \cos \mathrm{B}_{jk} \,,$$

où e_j signifie l'un de deux vecteurs unités dirigés dans les directions d'axes de coordonnées d'un système de référence rectangulaire; A_{jk} et B_{jk} sont les angles entre e_j et εa_k d'une part, e_j et εp_k de l'autre. En tenant compte du fait que

$$\mathrm{A}_{11} = \mathrm{A}_{22} = 90^\circ - \mathrm{A}_{12} = \mathrm{A}_{21} - 90^\circ = \mathrm{A} \,,$$
$$\mathrm{B}_{11} = \mathrm{B}_{22} = 90^\circ - \mathrm{B}_{12} = \mathrm{B}_{21} - 90^\circ = \mathrm{B} \,,$$

on peut écrire

$$\operatorname{tg} 2\mathrm{A} = \frac{2\Psi_{1k}\Psi_{2k}}{\Psi_{1k}\Psi_{1k} - \Psi_{2k}\Psi_{2k}} \,, \qquad \operatorname{tg} 2\mathrm{B} = \frac{2\Psi_{k1}\Psi_{k2}}{\Psi_{k1}\Psi_{k1} - \Psi_{k2}\Psi_{k2}} \,.$$

2° Pour le tenseur d'angle de rotation associé à Ψ on trouve

$$\mathrm{W} = \mathrm{Q}\,(e_1 e_2 - e_2 e_1)$$

où Q, l'angle de rotation, vaut

$$2\mathrm{Q} = 2\mathrm{A} - 2\mathrm{B} \,.$$

Les formules se rapportant aux tenseurs surlignés et en caractère miniscule, sont analogues.

Ayant déterminé les valeurs propres et les directions d'axes de tous les tenseurs en question, nous donnerons les lois de superposition pour deux déplacements successifs finis. La relation entre les valeurs propres est la suivante

$$\bar{\mathrm{S}}_k = (-1)^k \frac{1}{2} \operatorname{arcch} (\cosh 2\mathrm{S}_k \cosh 2s_k - \sinh 2\mathrm{S}_k \sinh 2s_k \cos \sigma)$$

où σ signifie le double de l'angle entre les axes principaux de même indice de sa et Sp. Les orientations sont reliées entre elles par les relations

$$\overline{A} = A - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin \sigma \tanh (\sqrt{2}\mathfrak{s})}{\sinh (\sqrt{2}\mathfrak{S}) + \cos \sigma \cosh (\sqrt{2}\mathfrak{S}) \tanh (\sqrt{2}\mathfrak{s})}$$

$$\overline{B} = B + q$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{cotanh} (\mathfrak{S}\sqrt{2}) \sinh (\mathfrak{s}\sqrt{2}) \sin \sigma + \sin \sigma \cos \sigma (\cosh \mathfrak{s}\sqrt{2} - 1)}{\cosh (\mathfrak{s}\sqrt{2}) \cos^2 \sigma + \cos \sigma \operatorname{cotanh} (\mathfrak{S}\sqrt{2}) \sinh (\mathfrak{s}\sqrt{2}) + \sin^2 \sigma}$$

où $\overline{A}$, A et a, $\overline{B}$, B et b signifient les angles entre les axes de même indice du système de référence et des tenseurs $\overline{S}a$, Sa et sa, $\overline{S}p$, Sp et sp, tandis que $\overline{Q}$, Q et q sont les angles de rotation de $\overline{W}$, W et w. $\overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{s}$ sont les grandeurs absolues de $\overline{S}a$ et $\overline{S}p$, Sa et Sp et de sa et sp. Pour l'angle σ on obtient

$$\sigma = 2(B - a) = 2(A + Q - a) = 2(B - b + q) .$$

Pour les rotations on a

$$\overline{W} = W + w + \overline{W}^* ,$$

d'où l'angle de rotation

$$\overline{Q} = Q + q + \overline{Q}^* = \overline{B} - \overline{A} ,$$

où $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont donnés par les formules ci-dessus pour l'orientation suivante des axes de rotation : $\overline{W}_\times \| W_\times \| w_\times \| \overline{W}^*_\times$. Si on passe pour le déplacement $(1\overline{1})$ à la limite infinitésimale, on obtient pour les déformations infiniment petites

$$dS_k = \overline{S} - S_k = s_k \cos \sigma ,$$

$$dA = \overline{A} - A = \frac{\mathfrak{s} \sin \sigma}{\sqrt{2} \sinh (\mathfrak{S}\sqrt{2})} ,$$

$$dB = \overline{B} - B = q + \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{2}} \sin \sigma \operatorname{cotanh} \mathfrak{S}\sqrt{2} ,$$

et pour le tenseur d'angle de rotation infinitésimale

$$dQ = \overline{Q} - Q = q + \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{2}} \sin \sigma \tanh \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{2}} .$$

Il faut remarquer que ces formules, qui donnent des différentielles, ne sont valables que lorsque les grandeurs des tenseurs d'angle de rotation et de déformation associés au déplacement $(1\bar{1})$ sont infiniment petites comparées aux grandeurs analogues associées au premier déplacement (01). Pour le cas dans lequel le premier déplacement (01) est de même ordre de grandeur [1] que le second $(1\bar{1})$, il faut appliquer les formules données plus haut pour le cas général. Le cas général tridimensionnel donne des formules beaucoup plus compliquées, mais du même type; elles seront publiées ailleurs.

Pour obtenir des formules par des différentielles, il faut étudier séparément le cas dans lequel le tenseur de déformation S associé au déplacement (01) est dégénéré, en partant des formules établies pour la superposition des déplacements finis.

Pour le cas spécial où le premier déplacement (01) est fini et n'est pas dégénéré tandis que le déplacement accessoire $(1\bar{1})$ est infiniment petit, on obtient pour la superposition des valeurs propres des tenseurs de déformation

$$\bar{S}_k = s_k + s_j \cos^2 \sigma_{jk} \ .$$

σ_{jk} signifie l'angle entre l'axe j de sa et l'axe k de Sp.

C. *Etude systématique des mouvements.*

Nous discuterons les divers mouvements de déformation, et nous serons par là amenés à considérer plusieurs sortes de mouvements linéaires qui, quoique importants pour la mécanique, n'ont pas encore été envisagés jusqu'à présent, et qui paraissent paradoxaux.

Afin de faciliter cette étude systématique, nous éliminerons la partie rigide du mouvement en introduisant un système de

[1] Ce cas est très important pour les corps « solides » (du point de vue physique), car avec eux on ne peut réaliser que des déformations petites.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHATEL

référence Σ_m tournant avec les rayons vecteurs ρ. Comme nous l'avons vu, chaque déplacement linéaire

$$\bar{r} = r \cdot \psi$$

se réduit alors à la forme

$$\bar{\rho} = \rho \cdot \vartheta a$$

avec $\vartheta a = \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}}$ et $\bar{\rho} = \bar{r} \cdot \omega^{-1}$. On peut prendre pour les r les rayons vecteurs $\overset{\circ}{r}$ donnant la position (0) non déplacée des points du milieu; les ρ sont associés à la même position que les r, mais dans le système Σ_m tournant, aussi écrivons-nous $^\circ$. Il faut cependant remarquer que la position (0) sert de référence seulement pour les positions parcourues par le mouvement et qu'en général elle ne fait pas partie du parcours du système.

Le tenseur ϑa en fonction du temps sera pris comme base de la systématique des mouvements de déformation. Chaque tenseur symétrique est caractérisé complètement et d'une manière invariante par ses directions d'axes et par ses valeurs propres. La classification que nous nous proposons de faire nous oblige donc à distinguer le cas dans lesquels ces directions et ces valeurs propres restent inchangées de ceux où elles ne le restent pas. Pour distinguer les valeurs propres de ϑa de son orientation relative à Σ_m, on exprime ϑa sous la forme (voir appendice)

$$\vartheta a = \overset{*}{\omega}{}^{-1} \cdot \vartheta_{//} \cdot \overset{*}{\omega}$$

où $\overset{*}{\omega}$ est un tenseur orthogonal, qui exprime en fonction du temps la rotation qui fait passer du triède trirectangulaire de description e_k (choisi arbitrairement mais fixe dans le système des ρ) au trièdre ea_k de ϑa; le symbole $\vartheta_{//}$ représente un tenseur avec les mêmes valeurs propres ϑ_k que ϑa mais dirigé dans les directions fixes du trièdre de description Σ_m. Nous trouvons donc pour le mouvement général l'expression

$$\bar{\rho} = \rho \cdot \overset{*}{\omega}{}^{-1} \vartheta_{//} \overset{*}{\omega}$$

avec $\overset{*}{\omega} = \overset{*}{\omega}(t)$ et $\vartheta_{//} = \vartheta_{//}(t)$.

Nous distinguons alors le cas général dans lequel $\overset{*}{\omega}(t)$ et $\vartheta_{//}(t)$ varient avec le temps, et les cas particuliers dans lesquels un des tenseurs reste constant. Le cas particulier $\overset{*}{\omega} = \text{const.}$ et $\vartheta_{//} = \vartheta_{//}(t)$ représentera la classe des déformations pures, tandis que le cas particulier $\overset{*}{\omega} = \overset{*}{\omega}(t)$ et $\vartheta_{//} = \text{const.}$ représentera une classe de mouvements linéaires qui n'a pas encore été étudiée jusqu'à présent et qui apparaît comme paradoxale. Pour éclairer le sens physique de cette classification nous discuterons les différents cas plus explicitement.

Pour plus de simplicité, nous conviendrons que le trièdre e_k de description (fixe dans le système tournant des ρ) est choisi de telle manière que pour un instant arbitraire $t = t_1$, $\vartheta_{//}$ soit parallèle à $\overset{(1)}{\vartheta a}$, $\overset{(1)}{\vartheta a}$ représentant le tenseur ϑa à l'instant $t = t_1$. Dans ce cas le tenseur $\overset{*}{\omega}$ caractérise directement la rotation [1] des axes principaux de ϑa par rapport au système tournant des ρ, donc par rapport au milieu déformable.

Considérons une position arbitraire (k) du milieu et le déplacement $(1k)$. On a

$$\overline{\rho}_1 = \rho \cdot \overset{(1)}{\vartheta a} ,$$

$$\overline{\rho}_k = \rho \cdot \overset{(k)}{\vartheta a} ,$$

donc pour le déplacement $(1k)$

$$\overline{\rho}_k = \overline{\rho}_1 \cdot \overset{(1)}{\vartheta a}^{-1} \cdot \overset{k}{\vartheta a} = \overline{\rho}_1 \cdot \chi$$

où

$$\chi = \overset{(1)}{\vartheta a}^{-1} \cdot \overset{k}{\vartheta a} .$$

Suivant qu'on rapporte chaque position $\rho = \overline{\rho}_k$ à une position (1), $\rho = \overline{\rho}_1$, faisant partie du parcours ou à la position (0), $\rho = \overset{\circ}{\rho}$, qui en général ne fait pas partie du parcours, on trouve

$$\overline{\rho}_k = \overset{\circ}{\rho} \cdot \vartheta a \qquad \text{ou} \qquad \overline{\rho}_k = \overline{\rho}_1 \cdot \chi .$$

[1] Cette rotation $\overset{*}{\omega}$ de ϑa par rapport au milieu (ou plus exactement par rapport au système tournant Σ_m des ρ) ne doit pas être confondue avec la rotation ω du continuum (du système Σ_m) par rapport à un système de référence Σ fixe dans l'espace.

Tout déplacement entre deux positions (1) et (k) parcourues est donc caractérisé par le tenseur χ et non par $\mathfrak{Z}a$.

Le tenseur d'allongement associé au déplacement (1k) est donné par $\sqrt{\chi \cdot \overset{\circ}{\chi}}$.

Pour le premier cas particulier $\overset{*}{\omega} = \text{const.}$ on obtient, en substituant pour χ la valeur donnée ci-dessus:

$$\sqrt{\chi \cdot \overset{\circ}{\chi}} = \chi \; ;$$

donc tout déplacement (1k) contenu dans ce mouvement est une déformation pure. D'autre part on prouve, si l'on admet pour un mouvement que tout déplacement (1k) parcouru entre deux positions arbitraires (1) et (k) est une déformation pure, que $\overset{*}{\omega}$ doit être constant.

Pour la déformation pure on a

$$\chi = \sqrt{\chi \cdot \overset{\circ}{\chi}}$$

ce qui donne

$$\overset{(1)}{\mathfrak{Z}a}{}^{-1} \cdot \overset{(k)}{\mathfrak{Z}a} = \overset{(k)}{\mathfrak{Z}a} \cdot \overset{(1)}{\mathfrak{Z}a}{}^{-1} \; ,$$

Donc: le déplacement (1k) est une déformation pure par rapport au système tournant Σ_m si, dans le produit $\overset{(1)}{\mathfrak{Z}a}{}^{-1} . \overset{(k)}{\mathfrak{Z}a}$, les deux tenseurs commutent. La condition nécessaire et suffisante pour qu'ils commutent (voir l'appendice) consiste en ceci:

$$\chi \,//\, \overset{(1)}{\mathfrak{Z}a} \,//\, \overset{(k)}{\mathfrak{Z}a} \; ,$$

ce qui exprime que la rotation qui fait passer du trièdre d'axes principaux de $\overset{(1)}{\mathfrak{Z}a}$ à celui de $\overset{(k)}{\mathfrak{Z}a}$ est donné par le tenseur d'identité I:

$$\overset{*}{\omega} = \text{const} = \text{I} \; , \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Z}_{//} = \mathfrak{Z}_{//}(t) \; .$$

Le cas de déformation pure correspond donc au cas où l'orientation de $\mathfrak{Z}a$, représentée par $\overset{*}{\omega}$, reste inchangée par rapport à Σ_m, tandis que les valeurs propres représentées par $\mathfrak{Z}_{//}$ varient en fonction du temps.

Autrement dit les trois directions dans lesquelles l'allongement $\overset{(1)}{\vartheta a}$ est effectué restent inchangées dans le système tournant de manière que tout allongement trirectangulaire accessoire χ soit effectué dans les mêmes directions du milieu. Ces directions trirectangulaires restent donc inchangées pendant tout le mouvement et peuvent être considérées comme les directions d'axes principaux de $\overset{(1)}{\vartheta a}$, de χ et de $\overset{(k)}{\vartheta a}$.

Par contre, si $\overset{(1)}{\vartheta a}$ n'est pas parallèle à $\overset{(k)}{\vartheta a}$ le déplacement $(1k)$ caractérisé par χ n'est pas une déformation pure, mais contient une rotation, bien que le mouvement $(1k)$ se rapporte au système tournant Σ_m dans lequel il est décrit au moyen d'un seul tenseur d'allongement trirectangulaire ϑa fonction du temps; l'explication de ceci est que ϑa est défini comme un opérateur agissant sur le système des rayons vecteurs ρ, tandis que χ agit sur le système des $\overline{\rho_1}$.

En résumé, nous distinguons parmi les déformations celles

$$\overline{\rho} = \rho \cdot \vartheta a$$

qui sont des déformations pures des mouvements généraux, selon que le trièdre trirectangulaire de directions parallèles aux axes de ϑa reste inchangé ($\overset{*}{\omega}$ = const. = I) ou change son orientation ($\overset{*}{\omega} = \overset{*}{\omega}(t)$) dans le continuum au cours du mouvement. Dans un mouvement de déformation pure, il y a trois degrés de liberté seulement, selon les trois valeurs propres, variables de ϑa. Nous ajoutons une remarque: Ces mouvements de déformation pure sont très importants pour la mécanique des corps déformables. Cela est clair, si on considère ces mouvements du point de vue différentiel. On déduit des formules de superposition données ci-dessus ce qui suit:

En général les dérivées par rapport au temps des tenseurs S et W ne sont pas identiques aux tenseurs $\dot{S}$ et $\dot{W}$ qui représentent la vitesse de déformation et la vitesse de rotation. Il n'y a qu'une seule classe privilégiée de mouvements — les déformations pures — pour laquelle

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} \, .$$

Pour cette classe il y a des relations analogues entre les dérivées d'ordre 2, et d'ordre supérieur par rapport au temps et l'accellération ordinaire et celles d'ordre supérieur de la déformation.

Dans un tel mouvement, et seulement dans un tel mouvement, tous les tenseurs associés à la cinématique (tenseur de déformation et ses dérivés par rapport au temps) sont parallèles entre eux, et si l'on suppose que le milieu est isotrope, les tenseurs dynamiques associés (tension P et ses dérivées par rapport au temps) sont aussi parallèles. Ce fait implique une grande simplification, car en général un de ces tenseurs n'a pas des axes principaux parallèles à ceux des autres tenseurs.

Nous venons d'envisager les déformations pures. Nous y distinguons les divers mouvements possibles suivant que 0, 1, 2 ou les trois valeurs propres ϑ_k (donc aussi les valeurs propres de $\vartheta_{//}$) restent constantes. Le cas zéro est évidemment le cas général d'une déformation pure dans les trois dimensions de l'espace. Le cas 1 (ϑ_3 = const.) est plan, on a affaire à un mouvement rigide dans la direction de l'axe 3 et à une déformation pure dans le plan perpendiculaire à cet axe. Le cas 2 (ϑ_3 = const., ϑ_2 = const.) est linéaire, on a un mouvement rigide dans le plan contenant les axes 1 et 2, une déformation dans la direction de l'axe 3. Enfin le cas 3 correspond à un mouvement rigide dans les trois dimensions de l'espace.

Envisageons maintenant l'autre cas particulier. Les conditions qu'il pose entraînent que

$$\bar{\rho} = \overset{\circ}{\rho} \cdot \vartheta a$$

avec

$$\vartheta a = \overset{*}{\omega}{}^{-1} \cdot \vartheta_{//} \cdot \overset{*}{\omega}$$

où

$$\vartheta_{//} = \text{const} \qquad \text{et} \qquad \overset{*}{\omega} = \overset{*}{\omega}(t) \neq \text{const.},$$

donc

$$\bar{\rho}_k = \overline{\rho_1} \cdot \chi$$

avec

$$\chi = \vartheta_{//}^{-1} \cdot \overset{*}{\omega}{}^{-1} \cdot \vartheta_{//} \cdot \overset{*}{\omega}\,.$$

Ces formules caractérisent complètement le mouvement en question.

Si on discute ce mouvement du point de vue différentiel on trouve — contrairement au cas des déformations pures — que

$$\frac{dS}{dt} \neq \dot{S} \qquad \text{et} \qquad \frac{dW}{dt} \neq \dot{W} .$$

En ce qui concerne l'orientation des tenseurs la différence entre les deux cas particuliers devient encore plus évidente. Pour les déformations pures nous avons vu que les tenseurs S et $\dot{S}$ sont parallèles; on trouve par contre ici que ces deux tenseurs sont orthogonaux, l'angle absolue γ entre eux valant 90°:

$$\cos\gamma = \frac{S \,.\,.\, \dot{S}}{|S| \cdot |\dot{S}|} = 0 .$$

La discussion du mouvement se fait d'une manière intuitive lorsqu'on se rapporte aux surfaces métriques des tenseurs. Envisageons dans la position (1) du milieu une série d'ellipsoïdes d'axes $\vartheta_k e a_k$:

$$\overline{\rho_1} \cdot \vartheta a^{-2} \cdot \overline{\rho_1} = 1 .$$

La surface de chacun d'eux peut être considérée comme représentant ϑa. Dans la position (1) nous avons par définition $\overset{*}{\omega} = I$ et par conséquent l'équation des ellipsoïdes est

$$\overline{\rho_1} \cdot \vartheta_{//}^{-2} \cdot \overline{\rho_1} = 1 .$$

Par suite du mouvement les $\overline{\rho_1}$ se transforment en $\overline{\rho_k}$ selon la relation donnée plus haut et les ellipsoïdes deviennent

$$\overline{\rho_k} \cdot \chi^{-1} \cdot \vartheta_{//}^{-2} \cdot \overset{*}{\chi}{}^{-1} \cdot \overline{\rho_k} = 1 ,$$

ce qui donne, en substituant pour χ sa valeur

$$\overline{\rho_k} \cdot \overset{*}{\omega}{}^{-1} \cdot \vartheta_{//}^{-2} \cdot \overset{*}{\omega} \cdot \overline{\rho_k} = 1 .$$

Or $\overset{*}{\omega}{}^{-1} . \vartheta_{//}^{-2} . \overset{*}{\omega}$ représente un tenseur ayant les mêmes valeurs propres que $\vartheta_{//}^{-2}$ mais une orientation différente de

sorte que la rotation $\overset{*}{\omega}$ fait passer $\vartheta_{//}^{-2}$ en $\overset{*}{\omega}^{-1} . \vartheta_{//}^{-2} . \overset{*}{\omega}$; donc la relation ci-dessus représente dans la position (k) une série d'ellipsoïdes de forme et de volume identiques à ceux des ellipsoïdes dans la position (1), de sorte que seule l'orientation (par rapport au système Σ_m tournant) varie selon le tenseur de rotation $\overset{*}{\omega}$.

Chaque ellipsoïde dans la position (1) est donc transformé par le mouvement en un ellipsoïde dans la position (k) tel que seule l'orientation par rapport au système tournant des $\bar{\rho}$ ait changé. Par rapport au système non tournant des r il n'y a également qu'un changement d'orientation, mais cette fois égal[1] à $\overset{*}{\omega} . \omega$.

D'autre part, si on envisage dans la position (1) du milieu une série de sphères

$$\bar{\rho}_1 \cdot \bar{\rho}_1 = 1 ,$$

ces sphères deviennent des ellipsoïdes [2]

$$\bar{\rho}_k \chi^{-1} \cdot \tilde{\chi}^{-1} \cdot \bar{\rho}_k = 1 .$$

Il en est de même dans le système non tournant des r.

La transformation des sphères en ellipsoïdes montre que le

[1] Aussi si l'on imagine dans la position (1) du milieu des ellipsoïdes dont les équations sont

$$r_1 \cdot \vartheta^{-2} \cdot r_1 = \text{const} ,$$

tous ces ellipsoïdes restent inchangés en forme et en grandeur au cours du mouvement, et seule leur orientation change selon $\overset{*}{\omega} . \omega$.

[2] Cette relation ne représente une sphère que si

$$\chi^{-1} \cdot \tilde{\chi}^{-1} = \mathrm{I} .$$

En substituant pour χ sa valeur on en tire

$$\overset{*}{\omega} = \mathrm{I} ,$$

ce qui est réalisé seulement dans la position (1), à laquelle ces sphères ont été rapportées; pour toute autre position parcourue par le mouvement ces sphères sont transformées en ellipsoïdes.

mouvement en question contient une déformation car les distances[1] entre les points matériels ont changé.

Le même mouvement — caractérisé par les formules ci-dessus — transforme donc d'une part une série d'ellipsoïdes en d'autres ellipsoïdes de même forme et même volume et, d'autre part, une série de sphères en ellipsoïdes. Cela semble paradoxal, vu qu'il s'agit d'un mouvement linéaire et homogène. Ce paradoxe apparaît encore plus curieux si on considère par rapport au système Σ non tournant des r le cas spécial de ce mouvement qui est caractérisé par $\overset{*}{\omega} . \omega = \mathrm{I}$, c'est-à-dire $\omega = \overset{*}{\omega}^{-1}$. Dans ce système la rotation $\overset{*}{\omega} . \omega$ des axes des ellipsoïdes est égale à I de sorte que non seulement la forme et le volume des ellipsoïdes, mais aussi les orientations de leurs axes restent les mêmes par rapport au système Σ fixe dans l'espace, tandis que les sphères se transforment en ellipsoïdes dont les axes tournent par rapport au même système des r. Ce mouvement particulier est caractérisé par l'équation [1]

$$\bar{r} = r \cdot \omega \cdot \vartheta_{//}$$

[1] Cela ressort du cas général

$$\bar{r} = r \cdot \overset{*}{\omega}^{-1} \cdot \vartheta_{//} \cdot \overset{*}{\omega} \cdot \omega \ ;$$

on a alors

$$\overset{*}{\omega} \cdot \omega = \mathrm{I} \ ,$$

soit

$$\overset{*}{\omega}^{-1} = \omega \ ,$$

et par conséquent

$$\bar{r} = r \cdot \omega \, \vartheta_{//} \ .$$

avec $\omega . \omega (t)$ et $\vartheta_{//} =$ const. Si on compare cette équation avec l'équation générale

$$\bar{r} = r \cdot \omega \, \vartheta p$$

[1] Dans la position (1) tous les points matériels de la surface de la sphère sont équidistants du point matériel situé au centre; par suite du mouvement les points de la surface et le point central de la sphère deviennent les points de la surface et le point central de l'ellipsoïde; ils ne sont plus équidistants.

on constate que le mouvement paradoxal que nous notions correspond au cas $\mathfrak{I}p = \text{const.}$, et $\omega = \omega(t) \neq \text{const.}$

Le paradoxe s'explique d'une manière simple lorsqu'on fait les calculs explicites et qu'on procède à la superposition des déplacements linéaires successifs. On voit alors que les ellipsoïdes subissent dans chaque intervalle de temps exactement le même allongement trirectangulaire que les sphères; chaque sphère change nécessairement sa forme si on effectue un allongement de n'importe quelle grandeur et quelle orientation; tandis qu'un ellipsoïde peut subir des allongements tels que l'ellipsoïde résultant ait exactement la même forme et le même volume que le premier ellipsoïde.

Ce mouvement paradoxal a une certaine importance, il peut être réalisé aisément dans un milieu élastique. Nous donnerons un exemple pour le cas plan, pour lequel nous avons fait construire un modèle (reproduit dans les figures 1, 2 et 3 annexées au présent article): Si on applique à une membrane élastique dans l'état (0) non travaillé un allongement birectangulaire on obtient un état (1) déformé; chaque cercle de l'état (0) passera à une ellipse, qui peut être considérée comme la trace de la surface métrique du tenseur $\mathfrak{I}p$ d'allongement. Si nous disposons d'une machine (un opérateur) capable d'effectuer un allongement birectangulaire le long de deux directions fixes dans l'espace, nous pouvons réaliser toute une série d'états (1), (2), ... (k) ... (n) à partir de l'état (0) en appliquant à la membrane d'abord une rotation ω_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ puis toujours à l'aide de la machine le même allongement birectangulaire. La grandeur de l'allongement est la même pour tous ces états (k) $(k = 1, \ldots n)$ mais ce sont chaque fois de nouveaux rayons vecteurs matériels qui sont dans les directions dans lesquelles l'allongement est effectué. Un mouvement continu qui passe successivement de l'état (1) aux états (2), (3), ... (n) est précisément le mouvement cherché, qui correspond à l'équation

$$\bar{r} = r \cdot \omega \cdot \mathfrak{I}p \qquad (\text{avec} \quad \omega = \omega(t) \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}p = \text{const.})$$

qui exige d'effectuer d'abord une rotation puis le même allongement fixe par rapport à l'espace. On réalise aisément ce mouve-

ment avec une membrane de caoutchouc fixée sur un cercle d'acier; on fixe la membrane d'abord dans l'état (0) non déformé; elle suit toutes les déformations que l'on imprime au cercle d'acier; si l'on effectue un allongement birectangulaire sur le cercle, celui-ci est transformé en une ellipse dont on peut

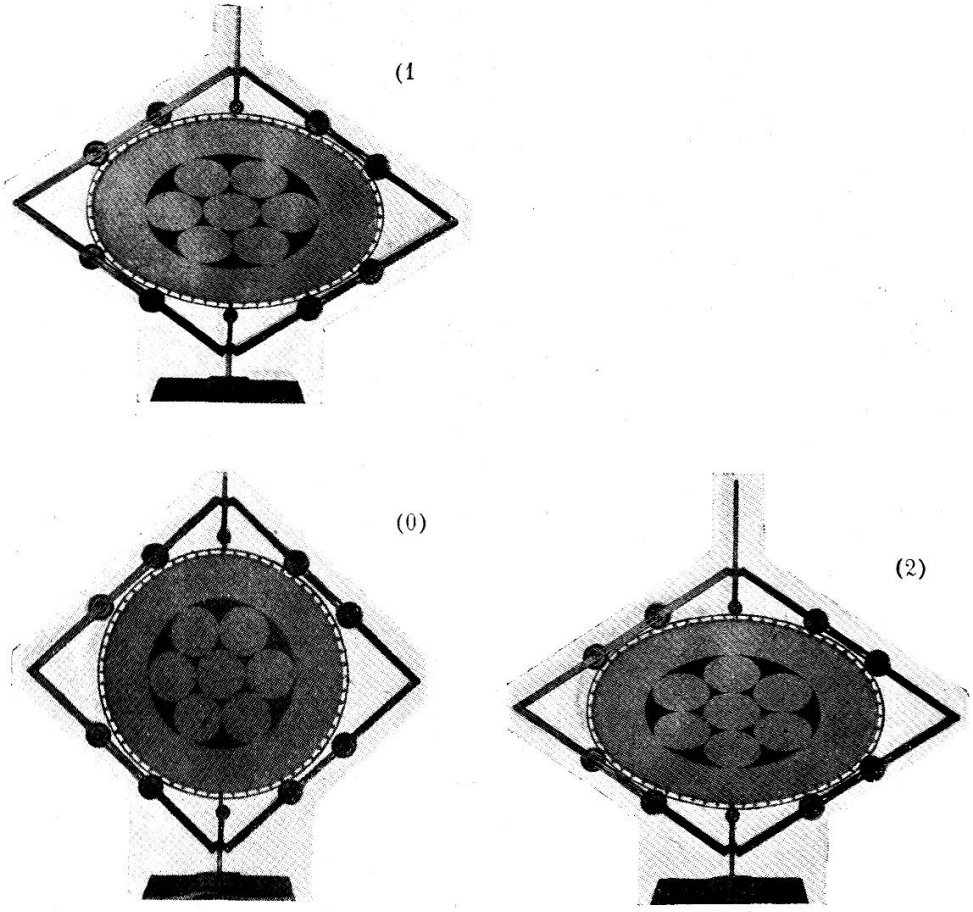

Fig. 1.

Illustration du mouvement à déformation (post-rotationnelle) constante $\mathfrak{I}p$ montrant la série d'ellipses qui représentent $\mathfrak{I}p$ et qui restent inchangées. On a dessiné des cercles sur la membrane de caoutchouc, dans l'état (0) non déformé; par une déformation du cadre on atteint l'état (1) et les cercles peints, ainsi que le cercle d'acier, deviennent des ellipses. On réalise alors le mouvement en question en fixant le cadre dans cette position (1) et en tournant l'ellipse d'acier dans le cadre, ce qui imprime ainsi à tout état (k) parcouru la même déformation $\mathfrak{I}p$ par rapport à l'état (0). On constate alors que les ellipses dans l'état (1) restent des ellipses de directions d'axes principaux et de grandeur constantes. On atteint un état (2) grâce à une rotation de 30°; en continuant le mouvement au delà de 30° on revient à l'état (1).

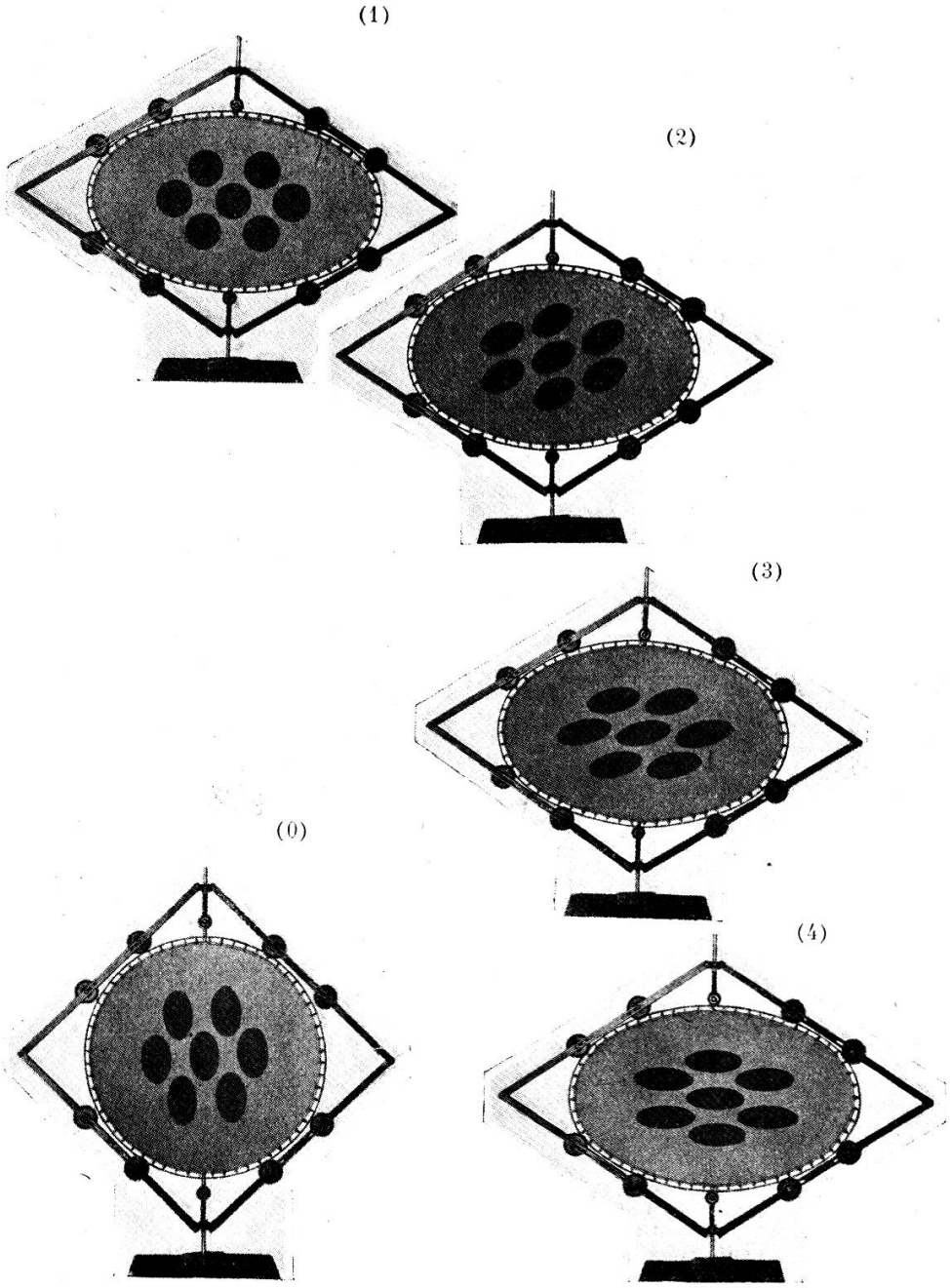

Fig. 2.

Illustration du même mouvement à déformation post-rotationnelle constante qu'à la fig. 1, montrant la série de cercles qui, dans ce mouvement, sont transformés en des ellipses à forme et orientation variables. On a dessiné sur la membrane de caoutchouc, dans l'état (0) non déformé, des ellipses qui, par la déformation (01), sont devenues des cercles dans l'état (1). En effectuant alors le mouvement en question en faisant tourner la lame d'acier dans le cadre fixé dans la position (1), on obtient successivement les états (2), (3) et (4), qui correspondent à des angles de rotation de 30°, 60° et 90°. On constate alors que les cercles dans l'état (1) deviennent des ellipses d'axes variables en grandeur et en direction. Si on continue le mouvement jusqu'à 360° on retrouve l'état (1), et, lors du parcours total au travers des quatre quadrants, les configurations (1), (2), (3) et (4) se répètent d'une manière symétrique et périodique.

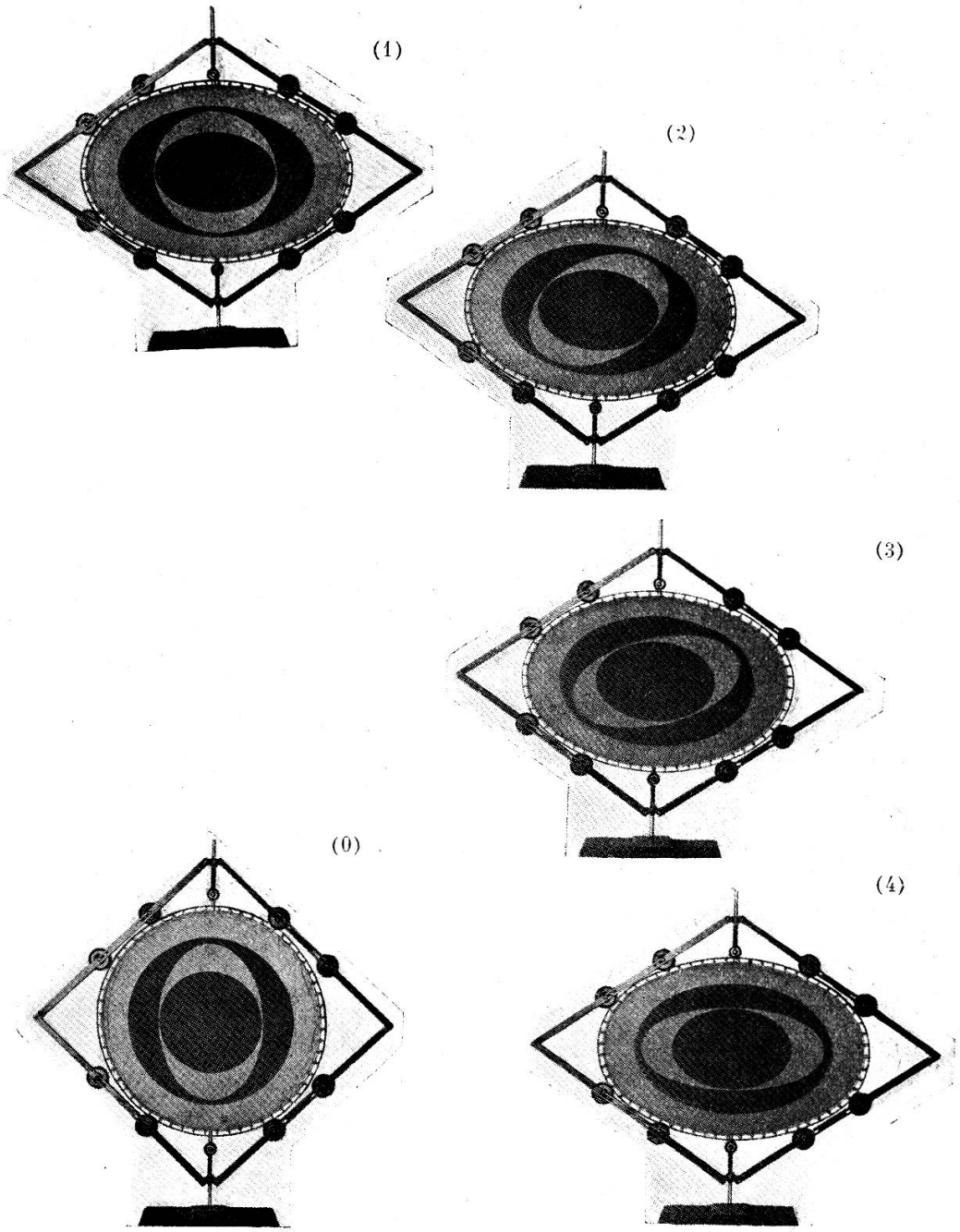

Fig. 3.

Cette figure illustre les deux phénomènes représentés séparément aux figures 1 et 2 sur une seule membrane de caoutchouc : les cercles foncés à l'état (0) non déformé deviennent des ellipses dans l'état (1) déformé, et le restent au cours du mouvement à déformation post-rotationnelle constante, tandis que l'ellipse de l'état (0) non déformé (en couleur claire) qui devient un cercle à l'état (1) déformé se transforme en ellipses d'axes variables en grandeur et en direction dans les états (2), (3) et (4), qui correspondent aux angles de rotation 30°, 60° et 90°.

fixer les axes dans l'espace par un cadre articulé à quatre branches de longueur égale, et qui prend une forme de losange; il maintient la forme elliptique de la monture d'acier et l'oblige à rester de mêmes dimensions (voir les figures 1, 2 et 3). Le cercle en acier est ainsi devenu une ellipse; elle peut tourner dans le cadre rigide, les éléments géométriques de l'ellipse étant constitués à tout instant par des points matériels nouveaux, les allongements restant constants en grandeur, mais pas en grandeur dans la matière même de la membrane. Pour mettre en évidence le paradoxe mentionné, on a dessiné des cercles sur la membrane dans l'état (0), ces cercles deviennent des ellipses par suite de l'allongement birectangulaire (01). Dans l'état déformé (1), on dessine de nouveaux cercles; en effectuant alors le mouvement continu que nous avions imaginé, on voit que toutes les ellipses restent inchangées en forme, orientation et grandeur, mais que, en même temps, les cercles (dessinés dans la position (1)) sont déformés en des ellipses; on voit de plus que tous les cercles d'une part, et toutes les ellipses, d'autre part, sont affectés de la même manière, ce qui met en évidence l'homogénéité du mouvement, et si enfin on dessine sur la membrane des lignes droites, elles restent des lignes droites, ce qui doit être en vertu de la linéarité[1] du mouvement. A l'aide des formules explicites qui permettent de faire la superposition des déplacements successifs à aire constante dans le plan et qui sont résumées dans ce chapitre, on peut analyser tous les détails du mouvement paradoxal qui vient d'être esquissé; en les comparant avec le modèle réel on vérifie que les milieux élastiques se déforment effectivement de cette manière.

L'orthogonalité des tenseurs S et $\dot{S}$, par exemple, qui est caractéristique pour ce mouvement, apparaît dans ces figures de la manière suivante:

Si on considère les cercles placés dans la position (1) on remarque qu'en passant de (1) en une position infiniment

[1] La fixation de la membrane au cercle d'acier telle que nous l'avons réalisée ne correspond pas rigoureusement aux conditions posées par la théorie, c'est pourquoi à proximité de cette fixation la linéarité et l'homogénéité ne sont pas exactement respectées.

voisine $(\bar{1})$ ils se transforment en ellipses dont les axes sont à 45° avec ceux de l'ellipse d'acier; ces ellipses peuvent être considérées comme représentant le tenseur $\mathfrak{I}a$ associé au déplacement $(1\bar{1})$, leurs axes sont donc parallèles aux axes principaux de sa et par conséquent de $\dot{S}$; d'autre part les axes de l'ellipse d'acier sont parallèles à ceux de Θa, donc de S. Pour les déviateurs plans S et $\dot{S}$, l'orthogonalité se traduit (voir l'appendice) dans l'espace ordinaire par le fait que l'angle entre les axes principaux de ces tenseurs vaut 45°.

Ayant discuté les deux cas particuliers comme s'ils étaient des cas extrêmes des déformations générales, revenons au cas général.

Pour le cas général de déformation nous avons

$$\frac{dS}{dt} \neq \dot{S} \qquad \text{et} \qquad \frac{dW}{dt} \neq \dot{W}$$

et l'angle absolu entre les tenseurs S et $\dot{S}$ peut avoir une valeur quelconque.

La classification des déformations générales est très compliquée. En principe il faut distinguer les différents cas pour lesquels 0, 1, 2 ou les trois valeurs propres de $\mathfrak{I}$ restent constantes, les cas où l'orientation de l'axe de la rotation $\overset{*}{\omega}$ reste inchangée et coïncide ou ne coïncide pas avec un axe principal de $\mathfrak{I}$, où il y a telle ou telle relation entre ω et $\overset{*}{\omega}$, etc. Nous ne voulons pas entrer dans les détails, mais il nous faut reternir l'existence d'une classe importante de déformation générale, la classe des mouvements laminaires. Ces mouvements se placent entre les deux cas particuliers considérés plus haut et ne doivent pas être confondus avec eux.

(A suivre)

Appendice.

L'algèbre des tenseurs d'ordre 2 sous une forme invariante. — Dans l'espace à trois dimensions, un tenseur d'ordre 2 est une forme bilinéaire[1] de deux triplets de vecteurs $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$:

$$\Psi = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_k\mathfrak{b}_k \,.$$

[1] Dans toutes les formules, il sera convenu d'effectuer une sommation sur tout indice redoublé.

Dans chaque terme la multiplication est indéterminée (ni scalaire ni vectorielle).

Les opérations fondamentales intérieures. — Il y a trois opérations fondamentales intérieures:

a) La transposition, *b*) la contraction, *c*) la pseudo-contraction.

a) Si on change l'ordre de la succession des deux triplets (transposition) on trouve un tenseur $\tilde{\Psi}$ (dit Ψ transposé):

$$\tilde{\Psi} = \mathfrak{b}_k \mathfrak{a}_k \ .$$

b) et *c*). Si on remplace la multiplication indéterminée par la multiplication scalaire (contraction) ou la multiplication vectorielle (pseudo-contraction), on trouve soit une grandeur scalaire $\Psi_{\cdot}$, soit une grandeur vectorielle $\Psi_{\times}$:

$$\Psi_{\cdot} = \mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{b}_k \ ,$$

$$\Psi_{\times} = \mathfrak{a}_k \times \mathfrak{b}_k \ .$$

Les grandeurs $\Psi_{\cdot}$, $\Psi_{\times}$ et $\tilde{\Psi}$ sont en relation avec Ψ d'une manière invariante. La grandeur vectorielle $\Psi_{\times}$ n'est pas un véritable vecteur, c'est-à-dire qu'il ne se transforme pas comme un vecteur, c'est un vecteur axial ou pseudo-vecteur. La théorie complète des pseudo-tenseurs et pseudo-vecteurs a été donnée par Léon Brillouin (*Ann. de Phys.*, III, 251, 1925).

Si nous donnons les composantes $\mathfrak{a}_k$ et $\mathfrak{b}_k$ par rapport à un système de référence trirectangulaire portant des vecteurs unités e_k de même longueur, nous obtenons pour Ψ la forme

$$\Psi = \Psi_{ik} e_i e_k$$

et par conséquent

$$\Psi_{\cdot} = \Psi_{11} + \Psi_{22} + \Psi_{33} \ ,$$

$$\Psi_{\times} = (\Psi_{23} - \Psi_{32}) e_1 + (\Psi_{31} - \Psi_{13}) e_2 + (\Psi_{12} - \Psi_{21}) e_3 \ ,$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi_{ki} e_i e_k \ ,$$

donc

$$\tilde{\Psi}_{ik} = \Psi_{ki} \ ,$$

Les opérations fondamentales extérieures. — *a*) L'addition et la soustraction des tenseurs se définit par l'addition et la soustraction des formes linéaires correspondantes.

b) La multiplication (qui donne des termes zéro, une, deux, ... n fois contractés) de deux tenseurs d'ordre quelconque se définit par la multiplication indéterminée des deux formes qui correspondent aux tenseurs, suivie de zéro, une, deux, ... n contractions de la forme résultante.

La multiplication une fois contractée sera nommée simplement multiplication. Elle sera représentée par un point. La multiplication deux, trois, ... fois contractée par deux, trois, ... points placés entre les tenseurs.

Dans un produit de tenseurs ceux-ci ne commutent pas en général, mais les lois d'association et de distribution sont valables.

Pour la multiplication une fois contractée de Ψ par un vecteur $r = r_k e_k$ et un tenseur d'ordre $\chi = \chi_{kl} e_k e_l$ on obtient les relations

$$r \cdot \Psi = r_k \Psi_{em} (e_k \cdot e_e) e_m = r_k \Psi_{km} e_m$$

$$\chi \cdot \Psi = \chi_{kl} \Psi_{mm} e_k (e_l \cdot e_m) e_n = \chi_{kl} \Psi_{ln} e_k e_n$$

(en général $r \cdot \Psi \neq \Psi \cdot r$ et $\chi \cdot \Psi \neq \Psi \cdot \chi$). De la définition du tenseur transposé il résulte que

$$r \cdot \Psi = \tilde{\Psi} \cdot r$$

et

$$\widetilde{(\chi \cdot \Psi)} = \tilde{\Psi} \cdot \tilde{\chi} \, .$$

Nous fondant sur ces règles de multiplication nous introduisons le tenseur I d'identité en disant qu'il existe un tenseur I et un seul pour lequel l'équation

$$\chi = \mathrm{I} \cdot \chi = \chi \cdot \mathrm{I}$$

est vérifiée pour tout tenseur χ d'ordre quelconque. Ce tenseur I est appelé tenseur d'identité, il est d'ordre deux et s'exprime dans le système trirectangulaire des e_k par

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_{hk} e_h e_k \qquad \left(\text{où} \quad \mathrm{I}_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad h = k \\ 0 & \text{pour} \quad h \neq k \end{cases}\right) .$$

Pour la multiplication deux fois contractée on a

$$\chi \cdot\cdot \Psi = \Psi \cdot\cdot \chi = (\Psi \cdot \chi)\cdot = (\chi \cdot \Psi)\cdot = \chi_{ik} \Psi_{ki} \cdot$$

La multiplication deux fois contractée des tenseurs est analogue à la multiplication scalaire (une fois contractée) des vecteurs; pour tirer profit de cette analogie nous introduirons des notions analogues à celles du calcul vectoriel:

La *valeur absolue* $|\Psi|$ d'un tenseur Ψ est définie par

$$|\Psi| = + \sqrt{\Psi \cdot\cdot \Psi} \cdot$$

L'angle absolu ε *entre deux tenseurs* est défini par

$$\cos \varepsilon = \frac{\Psi \cdot\cdot \chi}{|\Psi| \, |\chi|},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\Psi \cdot\cdot \chi = |\Psi| \, |\chi| \cos \varepsilon ,$$

et l'analogie avec le produit scalaire de deux vecteurs est complète. Deux tenseurs sont *orthogonaux* si $\varepsilon = 90°$, c'est-à-dire si leur produit doublement scalaire est nul. Le tenseur $\frac{\Psi}{|\Psi|}$ sera désigné sous le nom de *tenseur d'orientation* de Ψ.

Les puissances et les racines d'un tenseur. — La puissance Ψ^p (p étant un nombre entier et positif) est définie comme la multiplication, p fois répétée de Ψ, effectuée comme suit:

$$\Psi^p = \underbrace{\Psi \cdot \Psi \cdot \ldots \cdot \Psi}_{p} .$$

Si p est un nombre entier et négatif, les puissances négatives sont déterminées par l'équation

$$\Psi^p \cdot \Psi^{-p} = \mathrm{I} .$$

On en tire

$$(\Psi \cdot \chi)^{-1} = \chi^{-1} \cdot \Psi^{-1} .$$

Si p est une fraction rationnelle m/n les racines et les puissances fractionnelles sont définies par

$$\left(\Psi^{\frac{m}{n}}\right)^n = \Psi^m .$$

On déduit de ces définitions que les différentes puissances d'un même tenseur Ψ commutent dans un produit, soit

$$\Psi^p \cdot \Psi^q = \Psi^q \cdot \Psi^p = \Psi^{p+q} .$$

Pour le cas particulier où $p + q = 0$, on trouve $\Psi^\circ = \mathrm{I}$.

La division. — On effectue une division par un tenseur d'ordre 2 en multipliant par le tenseur réciproque, et en conservant l'ordre d'écriture des tenseurs. Si par exemple

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \chi$$

on a

$$\beta \cdot \gamma = \alpha^{-1} \cdot \chi$$
$$\alpha \cdot \beta = \chi \cdot \gamma^{-1} .$$

Caractère d'invariance d'un tenseur. — Une première caractéristique invariante d'un tenseur est celle qui se rattache à sa symétrie éventuelle. En général il n'y a pas d'autre relation indépendante entre Ψ et $\tilde{\Psi}$ que celle donnée par la définition de $\tilde{\Psi}$; nous dirons dans ce cas que le tenseur Ψ est sans symétrie (asymétrique). Si, par contre, il existe une autre relation indépendante entre Ψ et $\tilde{\Psi}$ nous parlerons d'une certaine symétrie du tenseur. Nous distinguons trois types de symétrie: un tenseur est symétrique (σ), antisymétrique (α), orthosymétrique ou orthogonal (φ) suivant que

$$\sigma = \tilde{\sigma} , \qquad \sigma_{ik} = \sigma_{kl}$$
$$\alpha = -\tilde{\alpha} , \qquad \alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$$

ou

$$\varphi \cdot \tilde{\varphi} = \mathrm{I} , \qquad \varphi_{ki}\varphi_{il} = \begin{cases} 1 \text{ pour } & k = l \\ 0 \text{ pour } & k \neq l \end{cases} .$$

La première équation dans chaque ligne donne la définition sous sa forme invariante, la deuxième l'exprime en composantes relatives au système trirectangulaire des e_k.

On tire de ces formules

$$\alpha \,..\, \sigma = 0 \;;$$

donc α et σ sont orthogonaux.

Un tenseur peut avoir plusieurs sortes de symétrie en même temps. Par exemple le tenseur sphérique $K = ae_k e_k$ est en même temps symétrique et orthogonal.

Les symétries spatiales que peut présenter un tenseur d'ordre 2 sont: C_i (triclinique), C_{2h} (monoclinique), V_h (rhombique), $C_{\infty h}$ (symétrie polarisée de rotation), $D_{\infty h}$ (cylindrique) et K_h (sphérique).

Pour les tenseurs symétriques σ, il y a seulement V_h, $D_{\infty h}$ et K_h. Les tenseurs antisymétriques α ont les symétries $C_{\infty h}$ et K_h, et les tenseurs orthogonaux φ les symétries $C_{\infty h}$, $D_{\infty h}$ et K_h.

Si on introduit un système de référence trirectangulaire portant des vecteurs unités ε_k, la manière de le faire pour obtenir la forme la plus simple des tenseurs consiste à faire coïncider l'axe de la symétrie la plus élevée avec l'axe 3; alors

$$\sigma = \sigma_k \varepsilon_k \varepsilon_k$$

$$\alpha = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_1)$$

$$\pm \varphi = \cos q \, (\varepsilon_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_1) \sin q + \varepsilon_3 \varepsilon_3 \;.$$

Une autre caractéristique, plus importante que les deux premières, est mise en évidence par un théorème de Cailey-Hamilton d'après lequel il existe toujours une relation linéaire et scalaire entre quatre puissances successives d'un tenseur d'ordre 2. Pour plus de simplicité, prenons les quatre premières puissances d'un tenseur Ψ; ce sont Ψ^0, Ψ^1, Ψ^2, Ψ^3. L'équation de Cailey-Hamilton s'écrit comme suit:

$$\Psi^3 - J_{\mathrm{I}} \cdot \Psi^2 + J_{\mathrm{II}} \Psi - J_{\mathrm{III}} \cdot \mathrm{I} = 0$$

où J_{I}, J_{II} et J_{III} sont trois grandeurs scalaires, nommées les trois invariants fondamentaux. I est le tenseur d'identité égal à

Ψ^0. Pour le calcul explicite nous supposerons que Ψ est donné à partir de vecteurs unités e_k ($k = 1, 2, 3$) orthogonaux. Nous avons alors

$$\Psi = \Psi_{ik} e_k e_k$$

et

$J_{\mathrm{I}} = (\Psi)_{\mathrm{I}} = \Psi_{11} + \Psi_{22} + \Psi_{33}$ (somme des termes diagonaux de Ψ).

$J_{\mathrm{II}} = (\Psi)_{\mathrm{II}} = | \ | + | \ | + | \ |$ (somme des mineurs relatifs aux termes diagonaux).

$J_{\mathrm{III}} = (\Psi)_{\mathrm{III}} = | \ |$ (déterminant de Ψ).

Un tenseur pour lequel $(\Psi)_{\mathrm{I}} = 0$ est appelé un tenseur *déviateur*.

A l'aide de l'équation de Cayley-Hamilton on détermine les valeurs propres et les directions d'axes principaux d'un tenseur. Les trois valeurs propres de Ψ sont les trois racines Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 de l'équation scalaire

$$\lambda^3 - J_{\mathrm{I}} \lambda^2 + J_{\mathrm{II}} \lambda - J_{\mathrm{III}} = 0 \ .$$

On trouve pour les valeurs propres

$$\lambda_k = \Psi_k = \frac{J_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{J_{\mathrm{I}}^2 - 3 J_{\mathrm{II}}} \ +$$

$$\cos\left\{ \frac{2\pi(k-1)}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{-2 J_{\mathrm{I}}^3 + 9 J_{\mathrm{I}} J_{\mathrm{II}} - 27 J_{\mathrm{III}}}{2\sqrt{(J_1^2 - 3 J_{\mathrm{II}})^3}} \right\} .$$

En désignant par $\overset{(k)}{A}_{\alpha\beta}$ le mineur de la matrice

$$| \Psi_{uv} - \Psi_k \cdot I_{uv} |$$

relatif au terme $\alpha\beta$ de cette matrice, on trouve, caractérisant la direction principale k associée à la valeur propre Ψ_k, des cosinus directeurs tels que

$$\cos(k\,1) : \cos(k\,2) : \cos(k\,3) = \overset{(k)}{A}_{i1} : \overset{(k)}{A}_{i2} : \overset{(k)}{A}_{i3} \ .$$

et

$$\sum_j \cos^2(kj) = 1 \ ,$$

où (kj), pour $j = 1, 2, 3$, désigne l'angle formé par la direction principale k et l'axe j du système de référence.

Le tenseur est déterminé complètement et d'une manière invariante par ses valeurs propres et ses directions d'axes principaux. Si deux des valeurs propres ou les trois coïncident, le tenseur est dit *dégénéré*, la multiplicité de la dégénérescence étant respectivement 2 ou 3. On parle aussi d'un tenseur dégénéré si les trois directions d'axes principaux du tenseur sont dans le même plan ou si deux ou les trois coïncident.

Les considérations que nous venons de développer nous permettent de donner aux tenseurs des formes privilégiées spécialement adaptées à leurs diverses applications:

a) *Forme normale.* — On peut réunir les valeurs propres et les directions d'axes principaux de Ψ dans une forme normale. En général on écrit

$$\Psi = \Psi_\mu \mathfrak{n}^*_\mu \mathfrak{n}_\mu ,$$

où Ψ_μ sont les valeurs propres de Ψ, et $\mathfrak{n}_\mu$ des vecteurs unités dirigés dans les directions d'axes principaux et $\mathfrak{n}^*_\mu$ les vecteurs réciproques [1] de $\mathfrak{n}_\mu$. Cette représentation peut toujours se faire, à moins que le tenseur soit asymétrique et dégénéré en même temps. Pour les tenseurs symétriques, antisymétriques et orthogonaux on obtient

	J_I	J_{II}	J_{III}
σ	σ_I	σ_{II}	σ_{III}
α	0	q^2	0
φ	$\pm (1 + 2 \cos q)$	$\pm (1 + 2 \cos q)$	± 1

[1] Si on fixe pour les indices une succession λ, μ, ν, on trouve les vecteurs réciproques au moyen de la relation

$$\mathfrak{n}^*_\nu = \frac{\mathfrak{n}_\lambda \times \mathfrak{n}_\mu}{[\mathfrak{n}_\lambda \mathfrak{n}_\mu \mathfrak{n}_\nu]} .$$

Il faut donc distinguer deux sortes de tenseur orthogonal, celle pour laquelle J_I est positif, celle pour laquelle il est négatif. La première représente une rotation, la deuxième la combinaison d'une rotation et d'une inversion. Nous n'envisagerons que la première, qui sera représentée par ω. Nous avons

$$\varphi = \omega \qquad \text{pour} \quad (\varphi)_{III} = (\omega)_{III} = +1$$

et

$$\varphi = j \cdot \omega \qquad \text{pour} \quad (\varphi)_{III} = -(\omega)_{III} = -1 \ ,$$

où $j = -\mathrm{I} = -e_k e_k$ est appelé le tenseur d'inversion.

Les valeurs propres et les orientations d'axes principaux sont données par le tableau suivant:

	Valeurs propres			Orientations d'axes principaux [1]		
	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	$\mathfrak{n}_1$	$\mathfrak{n}_2$	$\mathfrak{n}_3$
σ	σ_1	σ_2	σ_3	0 0 1	0 1 0	0 0 1
α	$i\sqrt{\alpha_{II}}$	$-i\sqrt{\alpha_{II}}$	0	1 i 0	i 1 0	0 0 1
ω	e^{iq}	e^{-iq}	1	1 i 0	i 1 0	0 0 1

où $q = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\omega_\times}{1 + \omega_I}$. On en déduit 1° que les directions d'axes principaux d'un tenseur symétrique sont trirectangulaires, 2° que tout tenseur antisymétrique est un déviateur plan.

Fonctions analytiques d'un tenseur. — Pour former une fonction analytique $f(\Psi)$ d'un tenseur, nous supposons d'abord que la fonction analytique $y = f(x)$ est celle d'un argument scalaire x, et est représentée par une série convergente des puissances de x:

$$y = f(x) = {}_n\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ .$$

[1] L'orientation de chaque axe principal est donnée par trois grandeurs proportionnelles aux cosinus des angles entre cet axe et les axes d'un système de référence.

On définit alors un tenseur $\chi = f(\Psi)$ fonction du tenseur Ψ par la relation

$$\chi = f(\Psi) = {}_n\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Psi^n .$$

Il faut remarquer que les relations qui peuvent exister pour des fonctions à argument scalaire ne sont pas nécessairement valables pour des fonctions de tenseurs [2].

On déduit de l'équation de Cayley-Hamilton que chaque puissance Ψ^n d'un tenseur Ψ a les mêmes directions d'axes principaux que Ψ, et des valeurs propres qui sont la même puissance des valeurs propres de Ψ. Le tenseur χ défini ci-dessus apparaît donc comme une somme de puissances de Ψ; ses valeurs propres sont par conséquent $\chi_k = f(\Psi_k)$ et ses directions d'axes principaux sont parallèles à celles de Ψ. Dans le cas où Ψ peut être mis sous la forme normale

$$\Psi = \Psi_k \mathfrak{n}_k^* \mathfrak{n}_k$$

(ce qui est toujours possible pour les tenseurs symétriques, orthogonaux et antisymétriques, ainsi que pour les tenseurs asymétriques non dégénérés) on a

$$\chi = f(\Psi) = f(\Psi_k) \mathfrak{n}_k^* \mathfrak{n}_k .$$

La représentation de Ψ sous forme invariante au moyen des valeurs propres et des directions d'axes principaux nous permet donc de calculer les fonctions analytiques tensorielles sans développement en série, elle leur donne une forme à nombre fini de termes.

Envisageons le cas particulier de la fonction *logarithmique*, dont nous faisons usage dans ce travail.

L'équation de Cayley-Hamilton nous dit que

1° Soit $p = ln\Psi$:

$$p_{\mathrm{I}} = ln(\Psi)_{\mathrm{III}} .$$

[2] Soit par exemple $e^{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{B}} . e^{\mathrm{C}}$, une relation entre des exponentielles. Si A, B et C sont des arguments scalaires, $e^{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{B}+\mathrm{C}}$, mais si A, B et C sont des tenseurs il n'en est pas ainsi en général.

Si le déterminant de Ψ est égal à 1, le tenseur p est un déviateur.

2° Soit ϑ un tenseur symétrique dont les trois valeurs propres ϑ_k sont réelles et positives:

$$\vartheta = \vartheta_k e_k e_k \qquad (\text{avec} \quad \vartheta_k > 0) \ .$$

Le tenseur $s = ln\vartheta$ est également symétrique et ses valeurs propres s_k sont réelles aussi mais pas nécessairement toutes positives; nous avons

$$s = ln\vartheta = s_k e_k e_k$$

où $s_k = ln\vartheta_k$.

3° Soit ω un tenseur orthogonal dont le déterminant est positif:

$$\omega . \tilde{\omega} = \mathrm{I} \qquad (\text{avec} \quad (\omega)_{\mathrm{III}} = +1) \ .$$

Le tenseur $w = ln\omega$ est un déviateur antisymétrique plan:

$$\tilde{w} = -w \ , \qquad w_{\mathrm{I}} = w_{\mathrm{III}} = 0 \ .$$

Les valeurs propres de ω étant données par

$$\omega_1 = e^{iq} \ , \qquad \omega_2 = e^{-iq} \ , \qquad \omega_3 = 1 \qquad \left(q = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_\times}{1 + \omega_{\mathrm{I}}}\right)$$

on trouve [1] pour les w_k:

$$w_1 = i(q + 2n\pi) \ , \qquad w_2 = -i(q + 2n\pi) \ , \qquad w_3 = 0 + 2n\pi i \ .$$

Décomposition d'un tenseur. — *a*) Décomposition additive d'un tenseur quelconque Ψ. — Tout tenseur Ψ peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique Ψ_σ et d'un tenseur antisymétrique (qui est en même temps déviateur) Ψ_α:

$$\Psi = \Psi_\sigma + \Psi_\alpha$$

où

$$\Psi_\sigma = \frac{\Psi + \tilde{\Psi}}{2} \ , \qquad \Psi_\alpha = \frac{\Psi - \tilde{\Psi}}{2} \ .$$

[1] On peut écrire cela si l'on considère le logarithme comme une fonction périodique ayant une période imaginaire $2\pi i$.

On décompose quelquefois Ψ_σ en la somme d'un tenseur sphérique Ψ_0 et d'un tenseur symétrique déviateur $\Psi_{\sigma\alpha}$:

$$\Psi_\sigma = \Psi_0 + \Psi_{\sigma\alpha}$$

où

$$\Psi_0 = (\Psi)_{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{I}$$

et

$$\Psi_{\sigma\alpha} = \frac{\Psi + \tilde{\Psi}}{2} - (\Psi)_{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{I} \ .$$

Le tenseur Ψ prend alors la forme

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{\sigma\alpha} + \Psi_\alpha \ .$$

b) Décomposition d'un tenseur quelconque ψ en un produit. — Tout tenseur ψ peut être décomposé en un produit d'un tenseur orthogonal φ et d'un tenseur symétrique ϑ dont les valeurs propres sont toutes réelles et positives. Selon la position des deux tenseurs dans le produit, position qui sera indiquée par un a (antérieure) ou un p (postérieure), on obtient deux décompositions:

$$\psi = \vartheta a \cdot \varphi p$$

ou

$$\psi = \varphi a \cdot \vartheta p \ .$$

Ces tenseurs valent [1]

$$\vartheta a = + \sqrt{(\psi \cdot \tilde{\psi})} \ ,$$

$$\vartheta p = + \sqrt{(\tilde{\psi} \cdot \psi)} \ ,$$

et

$$\varphi a = \varphi p = (\psi \cdot \tilde{\psi})^{-1/2} \cdot \psi \ .$$

[1] En multipliant ψ par $\tilde{\psi}$ en avant ou en arrière on trouve

$$\psi \cdot \tilde{\psi} = \vartheta a \cdot \varphi p \cdot \widetilde{(\vartheta a \cdot \varphi p)} = \vartheta a \cdot \varphi p \cdot \tilde{\varphi} p \cdot \tilde{\vartheta} a = \vartheta a^2$$

$$\tilde{\psi} \cdot \psi = \widetilde{(\varphi a \cdot \vartheta p)}\, \varphi a \cdot \vartheta p = \tilde{\vartheta} p \cdot \tilde{\varphi} a \cdot \varphi a \cdot \vartheta p = \vartheta p^2 \ .$$

Les tenseurs $\psi \cdot \tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi} \cdot \psi$ sont symétriques[1] et on démontre au moyen du théorème de Cayley-Hamilton qu'ils ont les mêmes valeurs propres, toutes trois réelles et positives. En choisissant le signe $+$ devant les racines on constate que les valeurs propres de ϑa et de ϑp sont identiques, et de plus réelles et positives. En désignant par ea_k des vecteurs unités dirigés dans les directions d'axes principaux de ϑa et par ep_k des vecteurs selon les axes principaux de ϑp on trouve

$$\vartheta a = \vartheta_k \, ea_k \, ea_k$$

$$\vartheta p = \vartheta_k \, ep_k \, ep_k \, ,$$

et

$$\varphi = j \cdot \omega \, ,$$

où j est égal à $+1$ ou -1 suivant que le déterminant $(\psi)_{\mathrm{III}}$ de ψ est positif ou négatif. Les valeurs de ϑ_k, ea_k et ep_k sont déterminées à partir de l'équation de Cayley-Hamilton relative aux tenseurs $\psi \cdot \tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi} \cdot \psi$; les ea_k et ep_k sont identiques aux deux triplets de vecteurs unités dirigés dans les directions d'axes principaux de ces tenseurs, tandis que les ϑ_k sont les racines carrées de leurs valeurs propres. On obtient les formules explicites en remplaçant Ψ dans l'equation de Cailey-Hamilton par $\psi \cdot \tilde{\psi}$ et par $\tilde{\psi} \cdot \psi$.

On décompose parfois les tenseurs symétriques en produits d'un tenseur sphérique ϑ_0 et d'un tenseur ϑ' à déterminant 1:

$$\vartheta a = \vartheta a_0 \cdot \vartheta a'$$

et

$$\vartheta p = \vartheta p_0 \cdot \vartheta p'$$

où

$$\vartheta . = \vartheta a_0 = \vartheta p_0 = \psi_{\mathrm{III}} \cdot \mathrm{I} \, ,$$

$$\vartheta a' = \frac{1}{\psi_{\mathrm{III}}} \sqrt{\psi \cdot \tilde{\psi}} \, ,$$

$$\vartheta p' = \frac{1}{\psi_{\mathrm{III}}} \sqrt{\tilde{\psi} \cdot \psi} \, .$$

---

[1] $$\widetilde{\psi \cdot \tilde{\psi}} = \tilde{\tilde{\psi}} \cdot \tilde{\psi} = \psi \cdot \tilde{\psi}$$

et

$$\widetilde{\tilde{\psi} \cdot \psi} = \tilde{\psi} \cdot \tilde{\tilde{\psi}} = \tilde{\psi} \cdot \psi \, .$$

Le tenseur ψ s'écrit dans ce cas

$$\psi = \vartheta_0 \cdot \vartheta a' \cdot \varphi$$

ou

$$\psi = \vartheta_0 \cdot \varphi \cdot \vartheta p \ .$$

Orientation d'un tenseur. — L'orientation d'un tenseur est caractérisée par ses directions d'axes principaux. Deux tenseurs A et B sont dits parallèles (A//B) si leurs directions d'axes coïncident. Pour des tenseurs parallèles, la multiplication est commutative:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} \ ,$$

donc

$$\ln (\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = \ln \mathrm{A} + \ln \mathrm{B} \ .$$

Ces règles ne sont valables que pour des tenseurs parallèles.

Si l'orientation d'un tenseur A change par rapport à un système de référence quelconque, A se transforme en un tenseur A′ de la manière suivante

$$\mathrm{A}' = \Omega^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \Omega$$

où Ω est un tenseur orthogonal qui effectue une rotation faisant passer le trièdre des axes principaux de A à celui des axes principaux de A′.

Déviateurs symétriques plans. — Pour les déviateurs symétriques plans les règles générales se simplifient. Les valeurs propres d'un tel tenseur a sont $a_2 = -a_1$. Sa valeur absolue vaut $|a| = a_1\sqrt{2} = -a_2\sqrt{2}$. L'angle absolu entre deux déviateurs symétriques plans a et b vaut

$$\varepsilon = 2\,(ab)_{kk}$$

où $(ab)_{kk}$ représente l'angle entre les axes principaux de même indice de a et b. Deux tenseurs déviateurs symétriques plans sont donc orthogonaux si $(ab)_{kk} = 45°$. Le produit doublement scalaire de a et b vaut

$$a \,..\, b = |a|\,|b| \cos \varepsilon = |a|\,|b| \cos 2\,(ab)_{kk} \ .$$

La symétrie d'un système matériel. — La symétrie d'une grandeur est définie par son invariance par rapport à un groupe de transformations de coordonnées. Nous dirons en particulier qu'une grandeur est isotrope ou anisotrope suivant qu'elle est invariante ou non relativement au groupe qui contient toutes les rotations. Pour discuter la symétrie des propriétés mécaniques, il faut considérer les propriétés mécaniques d'un corps matériel représentées par les relations entre les variables cinématiques et dynamiques, soit en général entre des grandeurs tensorielles; elles déterminent les propriétés mécaniques du corps d'une manière quantitative et permettent donc de définir la symétrie plus ou moins grande des propriétés mécaniques.

Les propriétés mécaniques qui nous intéressent particulièrement ici sont données par des relations entre des grandeurs tensorielles symétriques [1] d'ordre 2 qui représentent les variables dynamiques et cinématiques. Il suffit de discuter les relations linéaires, les résultats obtenus s'appliquant aussi à des cas plus généraux. Soient α et β deux tenseurs variables d'ordre 2; la relation linéaire la plus générale entre leurs composantes s'exprime par un tenseur constant d'ordre 4:

$$\beta_{ik} = \alpha_{lm} \mu_{ik}^{ml} .$$

En général les 3^4 composantes de μ sont indépendantes et μ est asymétrique (anisotrope); si on suppose que α et β sont des tenseurs symétriques, et que la propriété mécanique représentée par μ est parfaitement isotrope, il n'y a que deux composantes de μ qui soient indépendantes. Si on représente les tenseurs α et β par leurs valeurs propres et leurs directions d'axes, la condition d'isotropie exige premièrement que

$$\alpha // \beta ,$$

[1] Pour l'isotropie et l'anisotropie la différence entre les pseudotenseurs d'ordre deux et les véritables tenseurs peut être négligée, c'est pourquoi nous dirons simplement « tenseurs ».

c'est-à-dire que les directions d'axes principaux de α et β coïncident, et deuxièmement que l'équation générale se décompose en deux relations indépendantes, l'une entre α_I et β_I:

$$\beta_I = \alpha_I \cdot M$$

avec $\alpha_I = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\beta_I = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, l'autre entre les valeurs propres des déviateurs α' et β':

$$\beta'_k = \alpha'_k \cdot M' \ ,$$

où

$$\beta'_k = \beta_k - \frac{1}{3}\beta_I$$

et

$$\alpha'_k = \alpha_k - \frac{1}{3}\alpha_I \ ;$$

M et M′ sont deux grandeurs scalaires calculables à partir des deux composantes indépendantes de μ.

Représentation géométrique.

a. *L'espace à neuf dimensions des variables cinématiques et dynamiques.* — Dans l'étude de la mécanique des corps déformables il est très avantageux d'introduire un espace à 9 dimensions dans lequel tous les tenseurs (d'ordre 2) dynamiques et cinématiques peuvent être représentés par des vecteurs, car il y a une analogie profonde entre la mécanique d'un point matériel dans l'espace ordinaire à trois dimensions et la mécanique de l'élément de volume dans l'espace ordinaire à trois dimensions complété par un espace à 9 dimensions.

Par rapport à notre système trirectangulaire des e_k nous avons pour chaque tenseur 9 composantes. Nous imaginons alors un espace à 9 dimensions avec un système de référence ennéarectangulaire. Nous numérotons chaque axe de ce système au moyen de deux indices i, k (où i et $k = 1, 2, 3$) et nous définissons des vecteurs unités selon chaque axe au moyen du tenseur $e_i e_k$. Chaque tenseur d'ordre 2, $\chi = \chi_{ik} e_i e_k$, apparaît alors dans l'espace à 9 dimensions comme un *vecteur* $\vec{\chi}$ ayant

9 composantes χ_{ik} ennéarectangulaires. En général la valeur absolue $|\chi|$ du tenseur χ n'est pas identique à la valeur absolue (longueur) du vecteur $\vec{\chi}$ définie comme la racine carrée de la somme des carrés de ses neuf composantes. Mais les tenseurs caractérisant la cinématique et la dynamique de dv (tels que P, M, *sa*, *sp*, w, etc.) sont tous symétriques ou antisymétriques et la valeur absolue de tels tenseurs, $|\chi|$, est égale à la valeur absolue $|\vec{\chi}|$ du vecteur correspondant ; selon que l'on considère le cas symétrique ou le cas antisymétrique l'angle absolu ε entre deux tels tenseurs Ψ et χ est égal à l'angle, ou à 180° moins l'angle entre les vecteurs correspondants. L'orientation d'un tel tenseur est donnée par la direction du vecteur correspondant dans l'espace à 9 dimensions. En général il n'y a pas une relation simple entre l'angle absolu ε dans l'espace à 9 dimensions et l'angle α_{kk} dans l'espace ordinaire à trois dimensions compris entre deux axes principaux de même indice des tenseurs, mais pour le cas particulier des déviateurs symétriques dans un plan, on trouve

$$\varepsilon = 2\,\alpha_{kk}\ ,$$

de sorte que deux déviateurs symétriques donnés dans le même plan sont orthogonaux si l'angle entre les axes principaux de même indice est égal à 45°.

Il faut cependant remarquer que le vecteur résultant de deux vecteurs dans cet espace ne représente pas le tenseur résultant des deux déplacements successifs correspondant à ces vecteurs.

b. *L'espace à trois dimensions.* — La représentation géométrique des vecteurs est connue. Pour les tenseurs symétriques σ d'ordre 2, il existe plusieurs représentations géométriques; on utilise l'une ou l'autre suivant ce qu'on se propose de faire. On associe premièrement à σ la surface décrite par l'extrémité du vecteur r dans l'équation

$$r \cdot \sigma \cdot r = 1\ .$$

On associe deuxièmement à σ une surface métrique qui est du deuxième degré; ses axes coïncident avec $\sigma_k e_k$ (où σ_k sont les valeurs propres et e_k sont dirigés dans les directions d'axes principaux de σ); cette surface métrique a pour équation

$$r \cdot \sigma^{-2} \cdot r = 1 \ .$$

Les tenseurs antisymétriques α seront représentés par le pseudovecteur (vecteur axial) $\frac{1}{2}\alpha_\times$, les tenseurs orthosymétriques ω par le vecteur axial $\mathfrak{w} = \frac{\omega_\times}{1 + \omega_{\mathrm{I}}}$.

(A suivre)