Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 16 (1934)

Artikel: Sur les intégrales de Fourier et la représentation de certaines fonctions harmoniques multiformes

Autor: Wavre, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741508

il ne diffère de cette valeur que par un facteur au plus égal à deux, à l'exception toutefois de la région centrale ultime et de la couche périphérique extrême de l'étoile.

Mettant ces régions à part, on a pour le corps de l'étoile, à un facteur près au plus égal à deux:

$$\eta_{\mathrm{rad}} = \frac{\mathrm{F} \,.\, r_0 \,.\, \mathrm{T}}{10\, c^2 \,.\, \mathrm{T}_c} \,. \tag{5}$$

Or, nous avons dit ci-avant que, si la matière stellaire est arrangée de telle sorte que $\rho \sim \mathrm{T}^{\frac{15}{4}}$, η_{rad} est constante dans toute l'étoile, d'après (3).

Plaçons-nous dans ces conditions; et considérons alors l'expression (5); on voit que, pour une étoile arrangée comme on vient de le dire, le produit (F.T) serait constant : *le flux serait partout inversément proportionnel à la température absolue.*

Séance du 21 juin 1934.

R. Wavre. — *Sur les intégrales de Fourier et la représentation de certaines fonctions harmoniques multiformes.*

Soit $f(\theta)$ une fonction définie sur le cercle trigonométrique parcouru une infinité de fois. Proposons-nous de *trouver une fonction harmonique dans le domaine* D: $0 < \mathrm{r} < 1$, $-\infty < \theta < +\infty$ *et prenant les valeurs* $\mathrm{f}(\theta)$ *lorsque* $\mathrm{r} \rightarrow 1$. Il s'agit donc de la résolution du problème de Dirichlet sur une surface de Riemann à une infinité de feuillets.

Pour cela envisageons l'intégrale de Fourier, sans nous préoccuper pour le moment des questions de convergence,

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta') \cos \tau\, (\theta' - \theta)\, d\theta' \,,$$

puis remarquons que l'expression suivante est harmon'que dans le domaine D, τ étant un nombre réel positif

$$r^{\tau} \cos \tau\, (\theta - \theta') \,,$$

Formons, en conséquence, l'intégrale suivante

$$f(r,\ \theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta')\, d\theta' \int_{0}^{+\infty} r^{\tau} \cos \tau(\theta' - \theta)\, d\tau \qquad (1)$$

En posant $u = -\mathrm{L}r$, l'intégrale en τ se calcule facilement et donne

$$f(r,\ \theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta') \frac{u}{u^2 + (\theta' - \theta)^2}\, d\theta'\ . \qquad (2)$$

Supposons pour simplifier la fonction $f(\theta')$ continue et telle que, à l'infini,

$$|\, f(\theta')\,| < \mathrm{M}\ |\ \theta'\,|^{1-\varepsilon}$$

M et ε étant deux constantes positives. L'on vérifie que l'intégrale (2) a un sens, qu'elle représente une fonction harmonique dans D qui tend vers $f(\theta)$ lorsque r tend vers l'unité. Elle répond donc à la question. Si $f(\theta)$ avait des discontinuités de première espèce sans point d'accumulation à distance finie, l'on aurait

$$\lim_{r \to 1} f(r,\ \theta) = \frac{1}{2}\left[f(\theta + 0) + f(\theta - 0)\right]\ .$$

Envisageons ensuite le plan des coordonnées cartésiennes u et θ. Le domaine D s'y projette sur le domaine $u > 0$. Une fonction harmonique en r et θ est encore harmonique en u et θ.

S'il y avait deux solutions du problème envisagé et prenant les mêmes valeurs pour $r = 1$, leur différence $\psi(u,\ \theta)$ s'annulerait sur l'axe $u = 0$. La fonction ψ serait prolongeable par le principe de la symétrie de Schwarz en posant

$$\psi(-u,\ \theta) = -\psi(u,\ \theta)$$

alors $\psi(u,\ \theta)$ serait harmonique dans tout le plan. Si cette fonction est bornée dans tout le plan, elle est identiquement nulle. Par conséquent *il ne saurait exister deux solutions du problème envisagé dont la différence fut bornée dans* D.

En introduisant des coefficients de Fourier généralisés:

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta') \cos \tau\theta' \, d\theta' , \qquad B(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta') \sin \tau\theta' \, d\theta'$$

la fonction $f(r, \theta)$ s'écrit, à partir de l'expression (1), de la solution

$$f(r, \theta) = \int_{0}^{+\infty} \left[A(\tau) \cos \tau\theta + B(\tau) \sin \tau\theta\right] r^{\tau} \, d\tau \tag{3}$$

expression qui ressemble à la solution ordinaire du problème de Dirichlet

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n \tag{4}$$

et qui la généralise. L'on peut montrer que (4) n'est qu'un cas particulier de (3) en faisant voir que *l'intégrale* (2) *se réduit à celle de Poisson* si la fonction $f(\theta)$ est périodique et de période 2π. L'on aurait, en effet,

$$f(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(\theta') \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{u}{u^2 + (\theta' - \theta + 2k\pi)^2} \, d\theta' .$$

La série en k se calcule par la théorie des résidus et l'on trouve

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(\theta') \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta' - \theta) + r^2} \, d\theta' .$$

Ultérieurement, nous envisagerons cette question dans le plan complexe, certaines transformations en deviendront plus simples.

Marcel Mottier. — *Sur l'oxydation de l'huile de foie de morue et sur une méthode rapide pour déterminer l'action antioxygène de divers composés.*

L'huile de foie de morue s'altère à la longue sous l'influence de l'oxygène de l'air. Cette altération qui résulte d'une oxy-