Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 16 (1934)

Artikel: Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante : applications astronomique et industrielles

Autor: Rossier, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741455

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SENSIBILITÉ SPECTRALE

DES

RÉCEPTEURS D'ÉNERGIE RAYONNANTE

APPLICATIONS ASTRONOMIQUES ET INDUSTRIELLES

PAR

Paul ROSSIER

RÉSUMÉ.

On peut représenter analytiquement la sensibilité spectrale de la plupart des récepteurs d'énergie rayonnante par une fonction de la forme

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)^a .$$

Les deux constantes λ_s et a représentent la longueur d'onde du maximum de sensibilité et l'acuité de celui-ci.

Il est facile alors de donner l'expression de la magnitude absolue d'une étoile, de faire la théorie de l'index de couleur, de traiter en détail le cas de l'index absolu (relatif à un récepteur bolométrique), d'effectuer divers calculs tels que ceux de la longueur d'onde effective, dans le cas du spectre normal et dans celui du spectre prismatique, du diamètre apparent d'une étoile, de la variation de la réfraction atmosphérique avec la température de l'étoile, d'établir diverses relations liant directement le diamètre apparent, l'index absolu et la longueur d'onde effective, sans intervention de la température.

Les constantes λ_s et a peuvent être déterminées directement au laboratoire. Dans l'état actuel de ces méthodes, il est préfé-

rable, pour les applications à l'astronomie, d'opérer indirectement et de calculer ces constantes à partir de données astronomiques: échelles d'indices de couleur photo-visuels ou absolus, de longueurs d'onde effectives notamment. La théorie ainsi obtenue de l'index de couleur est très bien vérifiée. Les résultats sont aussi homogènes que permet de l'espérer la variété des données. Les échelles d'indices absolus sont aussi très bien représentées et il est possible d'en préciser le sens (calcul de la température de l'étoile d'index minimum, caractère linéaire de l'index absolu aux températures élevées).

Le calcul complet de quatre tables d'indices absolus (deux pour l'index visuel et deux relatives à la plaque photographique) est effectué.

Les mêmes hypothèses permettent d'aborder l'étude de l'application à l'éclairage, de l'incandescence de quelques solides.

I. — Introduction.

1. — D'une façon générale, un récepteur d'énergie rayonnante est sélectif, c'est-à-dire que le résultat d'une mesure effectuée avec cet appareil dépend de la longueur d'onde de l'énergie reçue. Quelques récepteurs font exception; convenablement utilisés, leurs indications sont indépendantes de la longueur d'onde. En physique, on les qualifie souvent de récepteurs intégraux, tandis qu'en astronomie, on utilise volontiers le terme bolométrique.

Ces derniers appareils ont une propriété commune: ils transforment en chaleur l'énergie reçue. La mesure est ainsi ramenée à une opération calorimétrique ou thermométrique. Le pyrhéliomètre de Pouillet, constitué en principe par un calorimètre noirci exposé au rayonnement solaire en est le prototype. Perfectionné à plusieurs reprises dans le courant du siècle dernier, cet appareil joue un rôle important en astrophysique, car il permet la détermination de la température effective du soleil, par l'application directe des lois du rayonnement. Cette température a servi à plusieurs reprises à étalonner des échelles de températures stellaires, obtenues par d'autres méthodes.

On a fait quelques essais d'application du récepteur intégral au domaine de l'astronomie stellaire, en opérant au foyer de grands instruments. La pile thermo-électrique, le radiomètre, le bolomètre, malgré tous les raffinements imaginés, restent des appareils d'usage délicat, trop peu sensibles, puisqu'il ne semble pas qu'on ait pu les appliquer à l'étude d'étoiles plus faibles que la troisième magnitude.

Au contraire, les récepteurs électriques, visuels ou photographiques, ces derniers surtout, permettent d'effectuer, sans grandes difficultés, des mesures sur des étoiles de tout éclat. L'interprétation des résultats est simple, tant qu'il s'agit de comparaisons. Mais quelle est, du point de vue énergétique, la signification exacte de ces mesures, quelle relation existe-t-il entre les résultats qu'elles fournissent et ceux qui seraient obtenus au moyen d'un récepteur intégral ?

Ce problème est de toute importance, puisque les théories modernes de la constitution des étoiles font intervenir la puissance rayonnée, telle qu'elle serait mesurée par un récepteur bolométrique, tandis que la magnitude, visuelle, photographique ou photo-électrique est une fonction de la source étudiée et du récepteur. Nous nous proposons ici d'étudier le rôle de ce récepteur, et de voir comment il est possible de remonter des résultats de l'observation habituelle à ceux que donnerait un récepteur bolométrique.

Il est nécessaire pour cela de connaître les propriétés du récepteur. Nous verrons que la donnée de deux constantes permet généralement de les caractériser suffisamment pour que ce problème puisse être résolu avec une précision peut-être médiocre, mais suffisante pour les applications à l'astrophysique stellaire.

II. — Récepteurs d'énergie rayonnante.

2. — *Etalonnage et sensibilité.*

Dans un spectre, découpons, au moyen d'un diaphragme approprié, un domaine de largeur $\Delta\lambda$, contenant la longueur d'onde λ. Au moyen d'un récepteur intégral, mesurons la

puissance ΔL rayonnée dans ce domaine. La densité de puissance rayonnée, pour la longueur d'onde λ, est la limite du quotient $\frac{\Delta L}{\Delta \lambda}$, lorsque $\Delta\lambda$ décroît. Elle dépend de la longueur d'onde λ. Nous la notons $\frac{dL}{d\lambda} = E(\lambda)$. L'unité C.G.S. de $E(\lambda)$ est erg sec^{-1} cm^{-1} = cm gr sec^{-3}.

Remplaçons le récepteur intégral par un récepteur sélectif et répétons l'opération précédente. Ce nouvel appareil comporte un organe de mesure, qui, sous l'influence du rayonnement incident, subit une certaine déviation (nous verrons à préciser le sens de cette expression). Soit $\Delta\alpha$ la déviation due au rayonnement de longueur d'onde λ, dans le domaine de largeur $\Delta\lambda$. La limite du quotient $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\lambda}$, lorsque $\Delta\lambda$ décroît suffisamment, mesure la densité de puissance apparente $E'(\lambda)$, pour le récepteur considéré et pour la longueur d'onde λ.

Si l'on a pris les précautions qui font de l'ensemble un véritable appareil de mesure, il existe une relation entre $E'(\lambda)$ et $E(\lambda)$, pour une valeur donnée de λ. Autrement dit, l'appareil est gradué en unités de puissance, à condition que celle-ci soit sous forme rayonnante de longueur d'onde λ, et à cette condition seulement. Nous dirons que l'appareil est étalonné pour la longueur d'onde λ, dite longueur d'onde d'étalonnage.

Supposons un récepteur étalonné pour une longueur d'onde λ_0 et utilisons-le à mesurer une densité de puissance rayonnante pour une longueur d'onde λ quelconque, mais invariable. Soit $E(\lambda)$ la puissance vraie reçue et $E'(\lambda_0)$ la puissance apparente indiquée relative à la longueur d'onde λ_0.

Le rapport $\sigma(\lambda) = \frac{E'(\lambda_0)}{E(\lambda)}$ est appelé sensibilité du récepteur pour la longueur d'onde λ, relativement à la longueur d'onde d'étalonnage λ_0. Pour que cette expression ait un sens, il faut que $\sigma(\lambda)$ ne dépende que de λ et pas de $E(\lambda)$, autrement dit que la puissance apparente lue soit proportionnelle à la puissance vraie reçue, quoique celle-ci ne se présente pas sous la longueur d'onde λ_0. Cela n'est généralement pas le cas, au moins pour de fortes variations de E; on dit alors que le récepteur présente le phénomène de Purkinje généralisé. Cependant, à condition de limiter convenablement le domaine de variation

de E, donc de faire l'étalonnage dans des conditions suffisamment voisines de celles d'emploi pratique, la sensibilité $\sigma(\lambda)$ est suffisamment bien définie pour les applications photométriques que nous avons en vue.

Examinons maintenant comment varie la sensibilité avec la longueur d'onde. Pour un récepteur bolométrique, on a évidemment $\sigma(\lambda) \equiv 1$.

En général, $\sigma(\lambda)$ présente un ou plusieurs maxima. On choisit souvent comme longueur d'onde d'étalonnage λ_0 celle qui correspond au plus élevé d'entre eux. Dans ce cas, la sensibilité est exprimée par des nombres compris entre 0 et 1. Sauf indication contraire, c'est ce que nous ferons dans la suite.

L'étalonnage peut aussi être réalisé pour un domaine étendu de longueurs d'onde, à condition que la composition spectrale de celui-ci soit constante. Cela ne change rien à l'essentiel de ce qui précède, mais il faut préciser la composition spectrale de l'énergie rayonnée par la source qui a servi à l'étalonnage.

Il est encore nécessaire d'expliciter une hypothèse essentielle. Faisons tomber sur un récepteur deux ou plusieurs rayonnements de longueurs d'onde différentes. Nous supposerons que les puissances apparentes correspondantes s'additionnent, même lorsque leur nombre est infini (hypothèse de l'additivité).

Cette hypothèse, exacte pour un récepteur intégral, n'est généralement pas conforme à la réalité. Par exemple, une plaque photographique exposée en plusieurs fois est moins noircie que dans le cas d'une pose équivalente unique. Nous supposerons cependant l'exactitude de l'hypothèse de l'additivité, car son application à l'astrophysique s'est montrée féconde; mais il ne peut en être fait usage que si certaines précautions sont prises.

3. — *Cas particulier de l'œil.*

On sait toutes les difficultés que présente la photométrie hétérochrome: l'œil est incapable d'apprécier l'égalité de brillance de deux plages de colorations différentes. La difficulté peut être levée par la méthode du papillotage: les deux sources sont examinées successivement; un mécanisme approprié les

substitue l'une à l'autre à une fréquence de l'ordre de 15 à la seconde. L'une des plages est de teinte fixe, généralement blanche. L'expérience montre que pour chaque couleur et pour une intensité d'éclairement donnée de la deuxième plage, la sensation oculaire semble continue. On pose par définition qu'à cette disparition du papillotage, correspond l'égalité des sensations. On a ainsi la possibilité de tracer une courbe de sensibilité de l'œil. Celle-ci varie d'un observateur à l'autre; elle dépend de l'état d'entraînement ou de fatigue de l'œil de l'opérateur ou de son état général.

L'œil présente en outre le phénomène de Purkinje et cela sous la forme suivante: pour des éclairements suffisants, la courbe de sensibilité possède un maximum assez stable dans le jaune. Mais si l'intensité diminue, ce maximum se déplace vers les courtes longueurs d'onde. Il semble aussi que l'acuité de ce maximum diminue avec l'éclairement. Tout cela explique les difficultés rencontrées dans la comparaison des échelles astro photométriques, comparaison qui ne peut avoir un sens précis que si les courbes de sensibilité de l'œil des divers observateurs sont connues.

Cette étude de la sensibilité spectrale de l'œil devrait être effectuée dans des conditions se rapprochant autant que possible de celles de l'observation astronomique et avoir lieu à l'époque des observations. A en juger par l'équation personnelle des observateurs de position, il y a tout lieu de supposer variable et capricieuse « l'équation personnelle photométrique ».

En tout état de cause, l'expérience montre que la courbe moyenne de sensibilité spectrale de l'œil est suffisamment déterminée dès qu'on opère sur quelques dizaines de sujets. Les valeurs numériques obtenues par les psycho-physiciens sont peut-être peu adaptées à l'observation astronomique. Elles n'en fournissent pas moins un cadre, qui convenablement élargi, permet d'aborder l'étude du problème photométrique qui nous occupe ici.

4. — *Cas particulier de la plaque photographique.*

C'est le noircissement de la plaque qui définit ici ce que nous avons appelé la « déviation » α. Rappelons quelques définitions.

Faisons traverser la plaque par un faisceau lumineux constant. Soient I_0 et I les intensités du faisceau transmis par une région non impressionnée et la région étudiée. On appelle opacité le rapport $\frac{I_0}{I}$, quantité qui varie de 1 à l'infini. On préfère en général opérer sur le logarithme de l'opacité, quantité qu'on appelle la densité.

On appelle parfois noircissement le rapport $\frac{I_0 - I}{I_0}$, qui, lui, varie de 0 à 1.

Tout cela suppose une plaque convenablement exposée et développée. Une forte surexposition peut entraîner la solarisation du cliché: le noircissement ou l'opacité d'une part, l'intensité de la source d'autre part, varient en sens inverses. Cela montre que les lois photographiques que nous allons rappeler ne constituent qu'une approximation, valable dans un domaine limité de l'intensité lumineuse.

La photométrie photographique est basée sur la loi suivante: traçons la courbe représentant la densité en fonction du logarithme du temps de pose. Cette courbe a l'allure d'un signe $\int$. Elle quitte tangentiellement l'axe des abscisses en un point à distance finie, présente un point d'inflexion puis un maximum. La région voisine du point d'inflexion, où la courbe est pratiquement rectiligne est assez longue. Elle constitue la zone de pose correcte. La pente de cette droite est appelée le gamma (γ) de la plaque considérée. Dans la région de pose correcte, on a donc

$$\log o = \gamma (\log t - \log t_0) \qquad \text{ou} \qquad o = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma},$$

où o est l'opacité, t la durée de pose. La constante $\log t_0$ est ce que l'on a appelé l'inertie de la plaque.

Le gamma d'une plaque croît avec la durée du développement et tend vers une valeur limite pour un développement prolongé (sans exagération, qui entraînerait le voile chimique ou noircissement d'ensemble de la plaque). L'influence d'une anomalie acceptable de la composition ou de la température du révélateur est assez faible, pourvu que la durée du développement soit convenablement choisie.

Au lieu d'opérer à flux lumineux constant et à durée d'exposition variable on peut choisir ce flux comme variable indépendante. En première approximation, on peut admettre qu'à énergie reçue constante, énergie mesurée par le produit du flux lumineux Φ par la durée de pose t, la densité est constante (loi de réciprocité). Pour plus de précision, on admet que le noircissement est déterminé par le produit Φt^p, où p est de l'ordre de 0,8 à 0,9 (loi de Schwartzschild).

Ce qui précède montre les difficultés que présente toute photométrie photographique absolue. Cette méthode constitue par contre un excellent procédé d'interpolation.

La sensibilité chromatique de la plaque est définie par l'inverse de l'énergie de longueur d'onde donnée nécessaire pour obtenir un noircissement donné, ou par le noircissement ou l'opacité obtenus à énergie constante.

Pour des plaques ordinaires, cette sensibilité varie comme suit: elle est pratiquement nulle pour les grandes longueurs d'onde, jusque dans le jaune-vert. Là commence une augmentation relativement rapide de la sensibilité, qui présente un maximum dans le bleu et diminue dans le violet et l'ultraviolet. Les rayons X constituent un nouveau domaine de sensibilité sans intérêt pour l'astronome. Certaines plaques ordinaires peuvent parfois posséder un léger maximum de sensibilité dans la région du vert.

En incorporant à la plaque des colorants appropriés, on l'ortochromatise, c'est-à-dire qu'on augmente sa sensibilité au vert et au jaune, région qui présente alors généralement un second maximum de sensibilité. On obtient parfois plus d'un maximum secondaire de sensibilité, ce qui permet d'atteindre le rouge (plaques panchromatiques) ou même l'infra-rouge. La haute sensibilité au bleu subsiste toujours. On l'atténue au moyen de filtres convenables.

Comme pour l'œil, il serait désirable que la sensibilité des plaques fût étudiée dans les conditions mêmes d'emploi astronomique, c'est-à-dire avec les mêmes systèmes objectifs, car les verres ou miroirs présentent des constitutions diverses, sur des points lumineux d'intensité et de coloration semblables à celles des étoiles. Il faudrait assurer la constance des émulsions,

celle des traitements thermiques et chimiques. Les émulsions photographiques vieillissent, leur sensibilité diminue avec le temps, la couche sensible noircit, même à l'abri de toute lumière. C'est dire toutes les difficultés inhérentes aux mesures photométriques ou spectrophotométriques par voie photographique. Le fait est que dans les conditions du travail astronomique, la plaque photographique rend les plus grands services et qu'elle supplante de plus en plus l'œil humain. Les résultats qu'elle fournit montrent une homogénéité souvent suffisante, à condition de prendre quelques précautions.

5. — *Cellules photo-électriques.*

En astrophotométrie, leur emploi tend à se répandre, malgré les difficultés que présente la mesure des courants très faibles qu'elles engendrent sous l'influence du rayonnement stellaire. Elles présentent l'avantage d'une bonne précision, à condition d'opérer avec des cellules suffisamment stables.

La courbe de sensibilité des cellules présente un maximum assez accusé dans l'ultra-violet. En accord avec la théorie des quanta, la sensibilité est nulle pour les longueurs d'onde supérieures à une certaine limite.

Il est actuellement difficile de construire des séries de cellules homogènes. La longueur d'onde du maximum de sensibilité, l'acuité de celui-ci varient d'un appareil à l'autre, même à constitution apparemment identique. A une augmentation du poids atomique du métal actif, correspond une diminution de l'acuité du maximum de sensibilité et un déplacement vers les grandes longueurs d'onde.

6. — *Expression analytique de la sensibilité.*

Les lois de la psycho-physiologie en ce qui concerne l'œil, de la photo-chimie pour la plaque et celles de la photo-électricité sont trop complexes et trop mal connues pour qu'on puisse actuellement espérer trouver par voie théorique une expression analytique de la sensibilité $\sigma(\lambda)$. On en est donc réduit à opérer par voie empirique: nous allons faire une hypothèse sur cette

fonction puis l'appliquer à divers problèmes. La confrontation avec l'expérience reste la pierre de touche d'une semblable méthode.

La fonction $\sigma(\lambda)$ doit, dans les cas simples (unique maximum de sensibilité), satisfaire aux conditions suivantes, imposées par l'expérience. $\sigma(\lambda)$, nulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, n'a de valeur sensible que pour un domaine limité de variation de λ. Elle est toujours positive et présente un maximum unique.

Une condition essentielle pour rendre possibles les applications est la suivante: la forme choisie pour la fonction $\sigma(\lambda)$ doit être suffisamment simple pour permettre une interprétation facile des constantes qui y figurent. Elle doit, en outre, sans complications inextricables, permettre les diverses opérations analytiques fondamentales (dérivation, intégration, calcul numérique).

La forme en cloche de la courbe de sensibilité fait immédiatement songer aux courbes de répartition qui interviennent dans le calcul des probabilités, donc à des fonctions de la forme

$$e^{-a(\lambda-\lambda_s)^2} .$$

Cette fonction présente deux inconvénients: elle ne tend pas vers 0 avec λ; son application conduit à des intégrations qui font sortir du domaine des fonctions élémentaires, ce qui entraîne de très longs calculs pour les applications numériques.

Pour l'œil, on a proposé l'expression suivante

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda}\, e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)^a ,$$

où λ_s et a sont deux constantes positives. La forme de la fonction se rapproche suffisamment de celle de l'équation spectrale de Planck pour rendre faciles les diverses intégrations qui nous seront nécessaires. Nous ferons l'hypothèse de la validité de cette fonction $\sigma(\lambda)$, non seulement pour l'œil, mais pour tous les récepteurs d'énergie rayonnante à maximum unique de sensibilité. Nous verrons qu'en posant $a = 0$, on obtient même le cas des récepteurs bolométriques.

7. — *Discussion de la fonction* $\sigma(\lambda)$.

Dans l'expression

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)^a ,$$

faisons $\lambda = \infty$. Le premier facteur est nul, le second est fini. On a donc

$$\sigma(\infty) = 0 .$$

Si $\lambda = 0$, $\sigma(\lambda)$ se présente sous la forme indéterminée $\infty \times 0$; mais le degré d'infinité de la fonction exponentielle, qui est nulle, dépasse celui de toute fonction rationnelle; on a donc

$$\sigma(0) = 0 .$$

La fonction ne possède pas d'autre zéro.

Faisons $\lambda = \lambda_s$. Il vient

$$\sigma(\lambda_s) = 1 .$$

Cette valeur représente le maximum de $\sigma(\lambda)$. En effet, la fonction satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda} - 1\right)\sigma .$$

Cette dérivée ne s'annule que si $\sigma = 0$, donc pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ et pour $\lambda = \lambda_s$.

λ_s est donc la longueur d'onde du maximum de sensibilité. Celui-ci est égal à 1.

Ce maximum de sensibilité est d'autant plus aigu que la dérivée $\frac{d\sigma}{d\lambda}$ varie plus rapidement dans la région de λ_s, ou que la deuxième dérivée est elle-même plus grande. Calculons cette deuxième dérivée:

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}\left(a\left[\frac{\lambda_s}{\lambda} - 1\right]^2 - 2\frac{\lambda_s}{\lambda} + 1\right).\sigma .$$

Faisons $\lambda = \lambda_s$. Il vient

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda_s^2} = -\frac{a}{\lambda_s^2}$$

L'acuité du maximum croît avec a. Nous nommerons exposant d'acuité cette constante.

Supposons une variation de λ_s, a restant constant; à une diminution de λ_s correspond une augmentation d'acuité du maximum.

Si λ_s diminue en même temps que le maximum s'aplatit, l'exposant d'acuité diminue.

Pour mieux voir le rôle de l'exposant d'acuité a, considérons σ comme fonction de cet exposant et dérivons par rapport à a, après avoir pris les logarithmes:

$$\frac{d\,(\mathrm{Log}\,\sigma)}{da} = \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{da} = \mathrm{Log}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right) = \mathrm{Log}\,\sqrt[a]{\sigma}\ .$$

Donc

$$\frac{d\sigma}{da} = \sigma\,\mathrm{Log}\,\sqrt[a]{\sigma}\ .$$

σ est toujours positif, mais inférieur à 1, sauf au maximum; il en est de même pour la racine. Le logarithme est donc toujours négatif, sauf au maximum où il est nul. Ailleurs qu'au maximum, la dérivée est négative. La sensibilité diminue donc lorsque l'exposant d'acuité augmente.

Comparons encore deux fonctions σ, λ_s étant le même, mais les exposants d'acuité différents. La fonction σ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\frac{\sigma(\lambda\,,\,a_1)}{\sigma(\lambda\,,\,a_2)} = \sigma(\lambda\,,\,[a_1 - a_2])\ .$$

Ce quotient est inférieur à 1, sauf pour $\lambda = \lambda_s$, dès que a_1 est supérieur à a_2, ce qui montre bien la diminution de sensibilité corrélative à une augmentation de l'exposant d'acuité.

Certaines propriétés de la fonction σ sont indépendantes de l'exposant d'acuité. Appelons points correspondants de la

courbe de sensibilité deux points d'ordonnées égales. Soit $\sigma(\lambda_1) = \sigma(\lambda_2)$. En explicitant cette équation, on trouve

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{\lambda_s\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)}.$$

Ce rapport est indépendant de a.

Il en est de même pour le rapport des pentes de la courbe de sensibilité en des points correspondants. Pour le voir, formons

$$\frac{\dfrac{d\sigma}{d\lambda_1}}{\dfrac{d\sigma}{d\lambda_2}} = \frac{\lambda_2^2(\lambda_s - \lambda_1)}{\lambda_1^2(\lambda_s - \lambda_2)}.$$

Le second membre ne contient pas a.

La courbure ne satisfait pas à cette propriété, car la parenthèse de la deuxième dérivée n'est pas une fonction homogène de l'exposant d'acuité.

Considérons deux courbes de sensibilité de même λ_s, mais d'acuités différentes. Soient A et B deux points correspondants de l'une, λ_A et λ_B leurs abscisses. Ces deux valeurs sont les abscisses de deux points correspondants A′ et B′ de l'autre. Les paires de tangentes en A et B d'une part, en A′ et B′ d'autre part se coupent en deux points de même abscisse, tandis que l'ordonnée de l'intersection des tangentes en A et A′ est la même que celle des tangentes en B et B′.

Sans être d'une importance capitale dans la suite, ces propriétés permettent des comparaisons rapides d'une courbe expérimentale à une fonction σ, sans détermination de l'exposant d'acuité, dont le calcul est relativement long. Au contraire, λ_s se déduit immédiatement du tracé de la courbe.

Examinons encore ce que devient la fonction σ pour des valeurs extrêmes de l'exposant d'acuité. Si $a = 0$, on a une sensibilité constamment égale à 1. C'est le cas des récepteurs bolométriques.

Supposons maintenant que a augmente indéfiniment.

On a

$$\operatorname{Log} \sigma = a \operatorname{Log} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}} \right).$$

Le logarithme du second membre est négatif ou nul. Si a est infini, σ est nul, sauf pour $\lambda = \lambda_s$, où $\sigma = 1$.

Il a été fait diverses applications à l'astrophysique de cette hypothèse, peut-être un peu simpliste, de la sensibilité concentrée sur une longueur d'onde unique. La théorie exposée plus bas contient cette théorie simple comme cas particulier. Nous verrons que la théorie générale est beaucoup plus satisfaisante.

En résumé, pour caractériser avec une bonne approximation un récepteur d'énergie rayonnante, il suffit de connaître deux constantes: la longueur d'onde λ_s du maximum de sensibilité et l'exposant d'acuité. Cela ne concerne que les récepteurs à maximum unique de sensibilité.

8. — *Cas particulier des récepteurs possédant plus d'un maximum de sensibilité.*

Le seul cas intéressant est celui des plaques photographiques orthochromatiques à deux ou plusieurs maxima de sensibilité. Nous supposerons que la sensibilité est représentée par une somme de fonctions de la même espèce que précédemment et nous poserons

$$\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=k} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_i}{\lambda}} \right)^{a_i}.$$

k est le nombre des maxima de sensibilité.

Cette hypothèse a peut-être un sens physique. En effet, c'est par l'addition de colorants appropriés qu'on orthochromatise les plaques, colorants qui absorbent l'énergie contenue dans certains domaines de longueurs d'onde et déclanchent le phénomène photographique. Les divers termes ajoutés ci-dessus mesurent peut-être l'action propre de ces colorants sur la couche photographique.

Comme précédemment, on trouve que σ n'est nulle que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Les valeurs λ_i ne correspondent pas aux maxima de sensibilité d'ensemble. Pour fixer les idées, raisonnons dans le cas où $k = 2$. Soit $\lambda_1 < \lambda_2$. Pour $\lambda = \lambda_1$, le premier terme est maximum, mais le second croît, tandis que pour $\lambda = \lambda_2$, le second terme est maximum et le premier décroît. Les abscisses des maxima sont donc intérieures à l'intervalle $\lambda_1 \lambda_2$. La complication apportée par l'existence des maxima multiples est notable, car elle rend moins immédiate l'interprétation des formules. La photométrie astrophotographique ne semble pas près d'être en état de discuter dans le détail ces questions. Dans la suite, il nous sera facile, une fois le calcul littéral effectué pour une courbe à maximum unique de généraliser au cas actuel, mais nous renoncerons à pousser la discussion.

III. — Calcul des magnitudes.

9. — *Hypothèses.*

Le calcul que nous allons faire de la magnitude absolue d'une étoile repose sur les hypothèses suivantes:

a) Le rayonnement des étoiles est assimilable à celui du corps noir;

b) Les récepteurs satisfont aux conditions spécifiées précédemment, c'est-à-dire

1. Leur sensibilité est donnée par l'expression

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)^a$$

(ou éventuellement une somme d'expressions analogues);

2. Ils satisfont à l'hypothèse de l'additivité.

Avant d'effectuer le calcul, il y a lieu d'examiner quelque peu l'hypothèse *a*.

La répartition de la puissance rayonnée par un corps noir de température absolue T est donnée par la loi de Planck:

$$E(\lambda) = \frac{c}{\lambda^5 \left(e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1\right)}$$

où $b = 1{,}432$ cm $\times$ degré.

On peut souvent, au dénominateur, négliger l'unité devant l'exponentielle. On obtient ainsi l'équation spectrale de Wien

$$E(\lambda) = c\lambda^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda T}},$$

qui constitue une approximation généralement suffisante pour les applications que nous avons en vue. Nous ferons cependant les calculs dans l'hypothèse de la validité de la loi de Planck et nous donnerons le résultat obtenu au moyen de l'approximation de Wien.

Les équations spectrales de Planck et de Wien obéissent à la loi du déplacement: la longueur d'onde du maximum d'émission est inversement proportionnelle à la température.

$\lambda_m T = \frac{b}{4{,}965}$ pour l'équation de Planck et

$\lambda_m T = \frac{b}{5} = 0{,}2864$ cm $\times$ degré, si l'on admet l'approximation de Wien.

La différence entre ces deux formules n'est que $\frac{0{,}035}{5}$ soit 0,7%. A un certain point de vue, les deux équations spectrales ne diffèrent que de moins de 1%.

Ce 1% correspond généralement à la précision atteinte en photométrie. Exprimons le dans l'échelle des magnitudes. La loi de Pogson peut s'écrire

$$m_0 - m = 2{,}5 \log L' = 1{,}08574 \operatorname{Log} L',$$

d'où, par différentiation,

$$dm = -1{,}08574 \frac{dL'}{L'}.$$

A une erreur relative de 1% sur l'éclat L′ de l'étoile, correspond une erreur de magnitude très voisine de 0,01, qui est la limite de précision de la plupart des opérations photométriques.

Signalons enfin que l'équation spectrale de Wien satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^{-1}\left(\frac{b}{\lambda T} - 5\right)E(\lambda) .$$

10. — *Digression sur une formule de calcul intégral.*

Nous aurons dans la suite à calculer des intégrales de la forme

$$J = \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} \left(e^{\frac{\gamma}{\lambda}} - 1\right)^{-1} d\lambda .$$

Pour cela, on pose

$$\lambda = \frac{1}{\nu} , \qquad \text{d'où} \qquad d\lambda = -\frac{d\nu}{\nu^2} ,$$

ce qui donne

$$J = \int_{\nu=\infty}^{\nu=0} \nu^\alpha e^{-\beta\nu} (e^{\gamma\nu} - 1)^{-1} d\lambda = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \nu^{\alpha-2} e^{-\beta\nu} (e^{\gamma\nu} - 1)^{-1} d\nu .$$

Développons la parenthèse,

$$(e^{\gamma\nu} - 1)^{-1} = e^{-\gamma\nu} + e^{-2\gamma\nu} + \ldots + e^{-i\gamma\nu} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i\gamma\nu} .$$

J devient ainsi une somme d'intégrales;

$$J = \sum_{i=1}^{i=\infty} \int_0^\infty \nu^{\alpha-2} e^{-(\beta+i\gamma)\nu} d\nu .$$

Considérons l'un des termes de cette somme et, pour appliquer l'intégration par parties, posons

$$e^{-(\beta+i\gamma)\nu} d\nu = du , \qquad \nu^{\alpha-2} = v .$$

Il vient

$$u = -\frac{e^{-(\beta+i\gamma)\nu}}{\beta + i\gamma} \quad \text{et} \quad dv = (\alpha - 2)\,\nu^{\alpha-3}\,d\nu$$

et, pour l'une des intégrales

$$\int_0^\infty \nu^{\alpha-2}\,e^{-(\beta+i\gamma)\nu}\,d\nu = \left[-\frac{\nu^{\alpha-2}\,e^{-(\beta+i\gamma)\nu}}{\beta + i\gamma}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(\beta+i\gamma)\nu}}{\beta + i\gamma}(\alpha - 2)\,\nu^{\alpha-3}\,d\nu.$$

L'expression entre crochets s'annule aux limites, tandis que l'intégrale du second membre est de même forme que celle proposée, mais où l'exposant de ν a diminué d'une unité. On a donc

$$\int_0^\infty \nu^{\alpha-2}\,e^{-(\beta+i\gamma)\nu}\,d\nu = \frac{(\alpha - 2)}{\beta + i\gamma}\int_0^\infty \nu^{\alpha-3}\,e^{-(\beta+i\gamma)\nu}\,d\nu\ .$$

Répétant $\alpha - 2$ fois le même procédé, on trouve

$$\int_0^\infty \nu^{\alpha-2}\,e^{-(\beta+i\gamma)\nu}\,d\nu = \frac{(\alpha - 2)\,!}{(\beta + i\gamma)^{\alpha-2}}\int_0^\infty e^{-(\beta+i\gamma)\nu}\,d\nu =$$

$$= \frac{(\alpha - 2)\,!}{(\beta + i\gamma)^{\alpha-2}}\left[-\frac{e^{-(\beta+i\gamma)\nu}}{\beta + i\gamma}\right]_0^\infty = \frac{(\alpha - 2)\,!}{(\beta + i\gamma)^{\alpha-1}}\ .$$

Il vient finalement

$$J = \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\,e^{-\frac{\beta}{\gamma}}\left(e^{\frac{\gamma}{\lambda}} - 1\right)^{-1} d\lambda = (\alpha - 2)\,!\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(\beta + i\gamma)^{\alpha-1}}\ .$$

Pour vérifier la convergence de la sommation, remarquons que

$$\frac{1}{(\beta + i\gamma)^{\alpha-1}} < \frac{1}{(i\gamma)^{-}} = \frac{k}{i^{\alpha-1}}\ .$$

La série est convergente si $\alpha - 1 > 1$ ou $\alpha > 2$, ce qui sera réalisé dans les applications ci-dessous.

En toute rigueur, la formule ci-dessus n'est valable que pour α entier. Ce qui nous importe ici, c'est d'obtenir une forme

suffisante pour diverses fonctions et éventuellement de pouvoir faire des interpolations, même en considérant le coefficient de la somme comme une variable continue.

En passant de l'équation de Planck à l'approximation de Wien, on néglige l'unité devant l'exponentielle, ce qui revient à limiter à son premier terme le développement infini.

11. — *Calcul de la magnitude relative à un récepteur donné.*

Soit $E(\lambda)$ la répartition de l'énergie dans le spectre d'une étoile de température effective T_e et $\sigma(\lambda)$ la sensibilité de récepteur. Nous appellerons magnitude absolue élémentaire l'expression

$$m(\lambda) = 2{,}5[\log \mathcal{E} - 2 \log r_0 - \log E(\lambda)\, \sigma(\lambda)] \ .$$

r_0 est le rayon de l'étoile.

Si dans cette formule on introduit les logarithmes naturels au lieu des logarithmes décimaux, il faut diviser le facteur 2,5 par le module, donc le remplacer par 1,08574.

$m(\lambda)$ serait la magnitude mesurée au moyen d'un photomètre de sensibilité $\sigma(\lambda)$, en interposant sur le trajet des rayons lumineux un filtre transparent pour l'unique longueur d'onde λ.

Si l'on admet la validité de la loi de Wien, cette magnitude absolue élémentaire prend la forme très simple

$$m(\lambda) = 1.08574\left[\operatorname{Log} \mathcal{E}' - 2 \operatorname{Log} r_0 + (a+5) \operatorname{Log} \lambda + \frac{a\lambda_s}{\lambda}\right] + \frac{1.560}{\lambda T_e} ,$$

où λ est mesuré en cm.

Nous appellerons magnitude au maximum de sensibilité la valeur de la magnitude élémentaire pour la longueur d'onde λ_s du maximum de sensibilité du récepteur. On a

$$m(\lambda_s) = S - 5 \log r_0 + \frac{1.560}{\lambda_s} \cdot \frac{1}{T_e} \ .$$

On a parfois assimilé cette grandeur à la magnitude elle-même; l'approximation ainsi faite, qui revient à négliger

l'énergie reçue ailleurs qu'au maximum de sensibilité est souvent insuffisante.

Remarquons que la magnitude élémentaire, donc aussi la magnitude au maximum de sensibilité, est au fond l'expression, dans l'échelle des magnitudes, de la densité de puissance apparente. Elle diffère essentiellement de la magnitude, mesure de l'éclat total de l'étoile.

Calculons maintenant la magnitude proprement dite ou magnitude globale. L'éclat total de l'étoile ou la puissance rayonnée apparente L′ est l'intégrale de la densité de puissance apparente.

$$L' = \int_0^\infty E'(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty E(\lambda)\, \sigma(\lambda)\, d\lambda \ .$$

Dans l'échelle des magnitudes, et tenant compte de la surface de l'étoile, nos hypothèses donnent pour la magnitude absolue, relative au récepteur r

$$m_r = 2{,}5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2{,}5 \log \int_0^\infty \lambda^{-5} \left(e^{\frac{b}{\lambda T_e}} - 1\right)^{-1} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)^a d\lambda \ .$$

L'intégrale est de la forme étudiée, avec

$$\alpha = a + 5 \ , \qquad \beta = a\lambda_s \ , \qquad \gamma = \frac{b}{T_e} \ .$$

On a donc

$$m_r = 2{,}5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0$$
$$- 2{,}5 \log e^a \lambda_s^a (a + 3)\,! \sum_{i=1} \frac{1}{\left(a\lambda_s + i\frac{b}{T_e}\right)^{a+4}} \ .$$

a n'étant jamais négatif, la série est toujours convergente.

Si σ présente plusieurs maxima, la sommation est double :

$$m_r = 2{,}5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2{,}5 \log \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{j=k\\ i=\infty}} \frac{C_j e^{a_j} \lambda_j^{a_j} (a_j - 3)\,!}{\left(a_j \lambda_j + i\frac{b}{T_e}\right)^{a_j+4}} \ .$$

k est le nombre des maxima de sensibilité.

Si l'on admet la validité de l'équation de Wien, la sommation en i ne comporte qu'un terme. Dans le cas du maximum unique, on a alors

$$m_r = 2{,}5 \log \mathcal{E}' - 5 \log r_0 + 2{,}5\,(a + 4) \log \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right),$$

formule que nous appellerons formule réduite.

12. — *Discussion de la formule réduite.*

Voyons ce que devient cette formule lorsque a varie. On voit facilement que pour $a = 0$, il vient

$$m_0 = \log \mathcal{E}' - 5 \log r_0 - 10 \log T_e ,$$

expression de la magnitude bolométrique, qui n'est autre que la loi de Stéfan exprimée dans le langage des magnitudes.

Pour examiner ce qui se passe pour a infini, posons

$$m_r = 2{,}5 \log \mathcal{E}' - 5 \log r_0 + 10 \log \left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e} \right)$$
$$+ 1{,}08574 \operatorname{Log} \left(1 + \frac{b}{\lambda_s T_e} \cdot \frac{1}{a} \right)^a + \varphi(a)$$

où $\varphi(a)$ est une quantité indépendante de T_e. a étant constant dans la formule définitive, seuls les termes en T_e nous intéressent. Parmi ceux-ci, remarquons que lorsque a augmente indéfiniment, le terme en logarithme décimal tend vers 0. Celui en logarithme naturel devient

$$1{,}08574 \operatorname{Log} e^{\frac{b}{\lambda_s T_e}} = \frac{1.560}{\lambda_s T_e} \cdot \qquad (\lambda \text{ en cm})$$

On a donc, pour a infini,

$$m_r = C - 5 \log r_0 + \frac{1{,}560}{\lambda_s T_e} ,$$

expression identique à celle de la magnitude au maximum de sensibilité.

Pour voir avec quelle précision la formule relative au cas de l'acuité infinie peut être capable de remplacer la formule générale, formons la différence Δm des deux expressions. Il vient, à une constante près,

$$\Delta m = 1{,}08574\,(a + 4)\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e}\right) - \frac{1{,}08574\,b}{\lambda_s T_e}\,.$$

Développons le logarithme en série.

$$\Delta m = \frac{1{,}08574\,b}{\lambda_s T_e} \cdot \frac{4}{a} + \ldots$$

La différence est du premier ordre. Elle diminue lorsque l'exposant d'acuité a augmente, ce qui est évident *a priori*.

Dérivons encore cette différence par rapport à la température. On a

$$\frac{d(\Delta m)}{dT_e} = \frac{1{,}08574\left(\frac{b}{\lambda_s T_e} - 4\right)}{\lambda_e T_s\left(a + \frac{b}{\lambda_s T_e}\right)} \cdot \frac{b}{T_e}\,.$$

Cette dérivée s'annule pour

$$T_e = \frac{b}{4\lambda_s}\,.$$

Pour cette température, qui jouera un grand rôle dans la suite, à propos de l'index absolu, la magnitude au maximum de sensibilité et la magnitude proprement dite varient identiquement en fonction de la température.

Observatoire de Genève.

(A suivre)