

Zeitschrift:	Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber:	Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band:	15 (1933)
Artikel:	Quelques remarques sur la théorie de l'électron magnétique de Dirac
Autor:	Broglie, L. de
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-740597

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1933

Vol. 15. Novembre-Décembre

QUELQUES REMARQUES
SUR
LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON MAGNÉTIQUE DE DIRAC¹
PAR
L. de BROGLIE

Vous savez que la théorie de l'électron magnétique de M. Dirac constitue aujourd'hui la forme la plus élaborée et la plus complète de la Mécanique ondulatoire de l'électron. Je ne prétends pas vous apporter sur cette théorie des résultats vraiment nouveaux; je voudrais seulement vous faire part de quelques remarques qui me sont venues à l'esprit quand je l'ai étudiée moi-même.

* * *

Bien que la plupart d'entre vous connaissent sans doute très bien les principes généraux de la nouvelle Mécanique, je dois cependant vous les rappeler avant de pouvoir aborder avec fruit la théorie de Dirac.

Pour exposer l'idée fondamentale de la nouvelle Mécanique, du moins sous la forme dite « Mécanique ondulatoire », nous pouvons nous exprimer de la façon suivante: Pour décrire le mouvement des corpuscules matériels élémentaires, des élec-

¹ Conférence faite à Genève le 16. XI. 33. lors des Conférences Internationales des Sciences Mathématiques (conférences sur la théorie des quanta). Pour la conférence de M. de Broglie sur « Les idées nouvelles introduites par la mécanique quantique » faite à la même occasion, voir *l'Enseignement mathématique*.



trons en particulier, nous ne devons plus employer comme l'essayait l'ancienne Mécanique des équations différentielles nous permettant de suivre au cours du temps la position du corpuscule (ou ce qui revient au même de trouver l'expression de ses coordonnées en fonction du temps); nous devons introduire une fonction, la fonction d'onde Ψ du corpuscule qui satisfait à une équation aux dérivées partielles et présente une analogie de forme marquée avec les ondes de la Physique classique. Pour former l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction Ψ , on part de l'expression Hamiltonienne classique de l'énergie, c'est-à-dire de la fonction des coordonnées xyz , des moments de Lagrange $p_x p_y p_z$ et du temps t qui exprime l'énergie du corpuscule. Soit $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t)$ cette fonction. Si dans cette expression Hamiltonienne, nous considérons chacun des p_k comme représentant non pas un nombre comme dans la théorie classique, mais un opérateur ou symbole d'opération, savoir l'opérateur — $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$, nous transformons la fonction Hamiltonienne en un opérateur Hamiltonien $H\left(x, y, z, \frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}, t\right)$ et nous admettrons que l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit la fonction Ψ du corpuscule est:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (1)$$

$H\Psi$ désignant le résultat de l'opération H appliquée à la fonction Ψ .

Pour un corpuscule se mouvant dans un champ de force qui dérive d'un potentiel $U(x, y, z, t)$, c'est-à-dire tel que la force soit en chaque point le gradient changé de signe de la fonction U , la fonction Hamiltonienne classique est:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t) \quad (2)$$

et par suite l'équation (1) s'écrit explicitement:

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U\Psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (3)$$

La forme (1) de l'équation en Ψ se justifie par diverses considérations dans le détail desquelles je ne puis entrer ici et qui montrent comment la Mécanique fondée sur cette équation (1) est bien l'extension, la généralisation naturelle de l'ancienne Mécanique.

L'équation (1) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées d'espace. Si l'on connaît la forme de la fonction Ψ à un instant initial $t = 0$, son évolution ultérieure sera entièrement déterminée par l'équation (1). L'équation (1) est une équation parabolique qui au premier abord paraît semblable à l'équation fondamentale de la théorie de la chaleur, mais à cause de la nature purement imaginaire du coefficient $\frac{h}{2\pi i}$, c'est en réalité une équation de propagation d'ondes qui, pour $U = 0$, admet comme solutions des ondes planes monochromatiques.

Maintenant supposons que nous connaissons la forme initiale $\Psi(x, y, z, 0)$ de la fonction d'onde et que nous sachions trouver la solution bien déterminée de l'équation (1) qui correspond à cette donnée initiale. En quoi nous servira alors la connaissance de la fonction $\Psi(x, y, z, t)$ pour la description du mouvement du corpuscule ? La réponse à cette question fait intervenir le caractère probabiliste de la nouvelle Mécanique sur lequel, je crois, M. Born a été le premier à attirer nettement l'attention. Tandis que la Mécanique classique, quand elle connaissait l'état initial d'un corpuscule, était en principe capable d'assigner à chaque instant une valeur bien déterminée à toutes les grandeurs caractéristiques du corpuscule, la nouvelle Mécanique ne peut avec l'aide de sa fonction Ψ qu'assigner à chaque grandeur certaines valeurs possibles affectées chacune d'une certaine probabilité.

Voici comment brièvement on peut résumer la manière dont la nouvelle Mécanique peut obtenir ces prévisions affectées de probabilités. A chaque grandeur attachée à un corpuscule, on fait correspondre un certain opérateur appartenant à la catégorie des opérateurs linéaires et hermitiques. Pour une coordonnée, x par exemple, l'opérateur est x ; pour un moment

conjugué tel que p_x , l'opérateur est $\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$. Toutes les autres grandeurs définies par la Mécanique classique sont des grandeurs dérivées s'exprimant à l'aide des coordonnées et des moments; les opérateurs correspondants s'obtiennent en remplaçant dans les expressions classiques x par x , p_x par $\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, etc. sans qu'il y ait d'ambiguïté quand on emploie comme nous le supposons des coordonnées Cartésiennes rectangulaires. On voit alors que l'opérateur Hamiltonien précédemment défini est celui qui correspond à l'énergie.

Ceci posé, la nouvelle Mécanique admet comme premier principe que les seules valeurs que puissent prendre une grandeur mécanique attachée au corpuscule et à laquelle correspond un opérateur linéaire et hermitique sont les valeurs propres toujours réelles de l'équation:

$$A\varphi = \alpha\varphi \quad (4)$$

pour le domaine D de variation des variables xyz résultant de la nature du problème, domaine qui est très souvent l'espace tout entier. Les valeurs propres en question sont les seules valeurs que puissent fournir une mesure précise de la grandeur A.

Si l'équation (4) admet un spectre discret de valeurs propres, il n'y a qu'une suite discrète de valeurs possibles de la grandeur A. C'est ce qui se produit pour l'énergie (opérateur H) dans le cas des systèmes que l'ancienne théorie des quanta étudiait déjà avant l'apparition de la nouvelle Mécanique sous le nom de « systèmes quantifiés ». Aussi est-ce en déterminant les valeurs propres de leur opérateur H que l'on peut calculer les niveaux d'énergie des systèmes quantifiés par la méthode si brillamment instaurée par M. Schrödinger.

Les valeurs possibles des grandeurs mécaniques se trouvent ainsi déterminées par un procédé qui ne fait pas intervenir la fonction Ψ du corpuscule considéré. Mais la fonction Ψ intervient pour la détermination des probabilités respectives de ces diverses valeurs possibles et cela grâce à un second principe dont je donnerai l'énoncé en m'en tenant au cas simple où l'équation (4) admet un spectre discret de valeurs propres non

dégénérées, c'est-à-dire où il y a une suite discontinue de valeurs propres $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots$ à chacune desquelles correspond une seule fonction propre $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k \dots$. Nous admettrons que le système des fonctions propres est un système complet d'où résulte que la fonction $\Psi(xyzt)$ peut se développer sous la forme:

$$\Psi(xyzt) = \sum_k c_k \varphi_k \quad (5)$$

les c_k pouvant dépendre du temps. Nous énoncerons alors le principe suivant: « La probabilité pour que la grandeur A ait la valeur α_k est égale à $c_k c_k^* = |c_k|^2$ ».

Appliqué à l'énergie (opérateur H), ce principe général donne comme cas particulier ce qu'on peut appeler le « principe de Born » car il a été énoncé pour la première fois par M. Born. Appliqué à la position du corpuscule, ce principe général indique que la probabilité pour que le corpuscule soit contenu dans l'élément de volume $dx dy dz$ est $\Psi^* \Psi dx dy dz$.

Connaissant à l'aide des deux principes généraux les valeurs possibles d'une grandeur A et leurs probabilités, il est facile d'en déduire la valeur moyenne de A qui est par définition:

$$\bar{A} = \sum_k \alpha_k |c_k|^2. \quad (6)$$

L'on trouve aisément¹:

$$\bar{A} = \iint_D \Psi^* A \Psi dx dy dz. \quad (7)$$

Si la valeur moyenne a un sens bien net, il ne me paraît pas en être de même de la quantité $\Psi^* A \Psi$ qu'on peut appeler d'après (7) la « densité de valeur moyenne ». Si l'on réfléchit aux définitions et principes qui précédent, on voit que cette quantité $\Psi^* A \Psi$ ne peut guère avoir un sens physique: c'est seulement la quantité qu'il faut intégrer pour obtenir la valeur moyenne \bar{A} . En fait, tandis que la valeur moyenne d'après sa définition (6) est essentiellement une grandeur

¹ Les fonctions étant supposées « normées » ainsi que la fonction d'ondes Ψ .

réelle, la quantité $\Psi^* A \Psi$ ne l'est pas nécessairement, ce qui ne permet guère de lui attribuer d'une façon générale une signification physique. Nous nous servirons de cette remarque pour la théorie de Dirac que nous abordons maintenant.

* * *

La Mécanique ondulatoire de l'électron telle que nous venons de la résumer rapidement dans ses grands lignes a remporté de magnifiques succès dans les domaines étendus de la Physique. Néanmoins on ne peut pas réellement la considérer comme satisfaisante. D'abord elle n'est pas en accord avec la théorie de la Relativité, ce qui peut se voir de bien des manières par exemple en observant que l'équation (1) fait jouer au temps et à l'espace un rôle dissymétrique puisqu'elle est du premier ordre en t et du second ordre en xyz . De plus, l'équation ne contient aucunement les propriétés de rotation propre (spin) et de magnétisme propre de l'électron dont l'intervention s'était montrée nécessaire, dès avant l'éclosion de la nouvelle Mécanique, pour interpréter la structure fine des spectres et les anomalies magnétiques (anomalies de l'effet Zeeman). La théorie électromagnétique indique que si un corps électrisé de charge totale ϵ et de masse μ est en rotation autour d'un axe, le moment de rotation \vec{M} et le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ produit par ce moment sont de même sens et que leur rapport $|\mathcal{M}| / |\vec{M}|$ doit être égal à $\frac{\epsilon}{2\mu c}$. L'existence des anomalies magnétiques suggère que l'électron possède un moment magnétique propre et un moment de rotation propre comme les posséderait dans l'image classique une petite boule d'électricité tournant autour d'un de ses diamètres; seulement le rapport $|\mathcal{M}| / |\vec{M}|$ possède la valeur $\frac{e}{mc}$ et non $\frac{e}{2mc}$ et c'est précisément cette différence qui explique les anomalies de l'effet Zeeman. MM. Uhlenbeck et Goudsmit ont été amenés, il y a une dizaine d'années déjà, à supposer que l'électron a un moment magnétique propre égal à un magnéton de Bohr $\frac{eh}{4\pi mc}$ et un moment de rotation propre égal à une demi-unité quantique de moment de rotation, soit $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. Cette hypothèse s'est montrée très

fructueuse et il est devenu nécessaire de l'incorporer dans la nouvelle Mécanique ondulatoire de l'électron. Ce n'était pas possible sur la base de l'équation (1), mais cette incorporation se trouve automatiquement réalisée par l'équation de Dirac.

M. Dirac a trouvé l'équation d'onde fondamentale de sa théorie en considérant d'abord le cas simple de l'absence de champ et en cherchant à construire une Mécanique ondulatoire relativiste qui conserverait pour la densité de probabilité de présence une forme analogue à la forme $\Psi^* \Psi$ de la théorie antérieure. On était en effet parvenu en cherchant à rendre relativiste la Mécanique ondulatoire à proposer une théorie dans laquelle la densité de probabilité de présence n'avait plus la forme $\Psi^* \Psi$, mais une forme plus compliquée. M. Dirac a considéré cette forme comme inadmissible parce qu'elle n'a pas nécessairement des valeurs positives et il a considéré comme nécessaire de conserver pour la probabilité de présence la forme définitive positive $\Psi^* \Psi$ ou du moins la forme légèrement plus générale $\sum_k \Psi_k^* \Psi_k$ en admettant l'existence de plusieurs fonctions d'onde Ψ_k comme l'avait déjà suggéré M. Pauli. Mais dès que l'on a admis cette hypothèse, on peut voir aisément que l'équation en Ψ , ou plutôt le système des équations en Ψ_k , doit être du premier ordre par rapport au temps sans quoi la condition évidemment nécessaire que la probabilité totale $\int \int \int \Psi^* \Psi dx dy dz$ de toutes les positions dans l'espace soit égale à l'unité ne pourrait pas se trouver automatiquement réalisée. La symétrie relativiste entre espace et temps indique alors que l'on doit chercher un système d'équations aux dérivées partielles simultanées pour les Ψ_k qui soit du premier ordre par rapport aux quatre variables d'espace-temps.

On sait que la forme relativiste de l'Hamiltonien du point matériel libre de masse propre m_0 est :

$$H(p_x p_y p_z) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} . \quad (8)$$

Pour éviter d'avoir un opérateur H défini par une irrationnelle, on avait proposé avant la théorie de Dirac de poser

$$\left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = H^2 \Psi = [c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m_0^2 c^4] \Psi \quad (9)$$

$p_x p_y p_z$ étant les opérateurs $\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, etc. Mais c'était là une équation du second ordre qui conduisait pour la probabilité de présence à la forme non définie positive dont nous avons déjà parlé.

M. Dirac a admis qu'il y a 4 fonctions d'onde Ψ_k et que chacune d'elles obéit à l'équation (9), mais pour les raisons indiquées plus haut il considère les 4 équations de la forme (9) en Ψ_k comme devant être des *conséquences* d'un système d'équations linéaires du premier ordre. Considérons 4 matrices hermitiques à 4 lignes et 4 colonnes $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ jouissant des propriétés suivantes:

$$\alpha_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4) \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i \quad (i \neq j) \quad (10)$$

$$(\alpha_i)_{kl} = (\alpha_i)_{lk}^* \quad (\text{condition d'hermiticité}) \quad (10')$$

et définissons l'opération $\alpha_i \Psi_k$ par l'équation:

$$\alpha_i \Psi_k = \sum_l (\alpha_i)_{kl} \Psi_l \quad (11)$$

où $(\alpha_i)_{kl}$ désigne l'élément de la matrice α_i appartenant à la k^e ligne et à la l^e colonne. Posons alors comme système d'équations d'ondes:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + (\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \alpha_4 m_0 c) \Psi_k = 0 \quad (12)$$

où k peut prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4 et où l'on a $p_x = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \dots$
On a évidemment:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_1 p_x - \alpha_2 p_y - \alpha_3 p_z - \alpha_4 m_0 c \right) \\ & \times \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \alpha_4 m_0 c \right) \Psi_k = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

puisque la quantité qui suit la première parenthèse est nulle. Or d'après les propriétés admises pour les matrices α_i , (13) peut s'écrire:

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m_0^2 c^2 \right] \Psi_k = 0 \quad (14)$$

c'est-à-dire que chaque Ψ_k se trouve obéir à l'équation (9),

mais les Ψ_k doivent satisfaire au système plus restrictif d'équations simultanées (12) qui sont les vraies équations d'ondes de la théorie de Dirac.

S'inspirant de la Mécanique relativiste ancienne de l'électron, Dirac a ensuite généralisé les équations (12) pour le cas où un électron se déplace dans un champ électromagnétique défini par un potentiel scalaire V et un potentiel vecteur \vec{A} en posant à la place de (12):

$$\left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} V \right) \Psi_k + \left[\alpha_1 \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) + \alpha_3 \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) + \alpha_4 m_0 c \right] \Psi_k = 0 . \quad (15)$$

On peut écrire les équations (12) et (15) sous la forme:

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = H(\Psi_k) \quad (16)$$

analogue à la forme (1) avec la définition:

$$H = - \left\{ eV + \frac{c}{2} \left[\alpha_1 \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_2 \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) + \alpha_3 \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) + \alpha_4 m_0 c \right] \right\} . \quad (17)$$

L'expression (17) est donc l'opérateur Hamiltonien pour la théorie de Dirac.

Les conditions (10) et (10') pour les matrices α_i n'imposent pas d'une façon univoque un certain choix de ces matrices. Ce choix reste en partie arbitraire. Rappelons qu'il est souvent commode de les choisir comme il suit:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

C'est ce que nous supposerons désormais.

M. Dirac a démontré le fait fondamental suivant: Si l'on passe d'un système de référence Galiléen à un autre qui est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier en soumettant les coordonnées $xyzt$ à une transformation de Lorentz générale, on peut conserver les équations (12-15) avec les mêmes valeurs des matrices α_i , la seule différence étant que les nouvelles fonctions d'onde Ψ_k sont des combinaisons linéaires des anciennes, combinaisons dont les coefficients dépendent bien entendu du changement de système de référence effectué. Si l'on examine cette transformation linéaire des Ψ_k correspondant à un changement d'axes dans l'espace-temps, on s'aperçoit que les quatre Ψ_k ne se comportent pas comme les quatre composantes d'un vecteur quadridimensionnel d'espace-temps. Les Ψ_k sont des grandeurs d'un type inconnu en Relativité classique. Ce sont des « demi-vecteurs » ou « spineurs ». On pourrait donc déjà soutenir que la théorie de Dirac n'est que partiellement en accord avec l'esprit de la Relativité puisque, si la forme des équations de base (12-15) est bien invariante pour une transformation de Lorentz, les grandeurs Ψ_k ne se transforment pas d'une manière tensorielle. Mais nous allons rappeler dans un instant qu'il existe des grandeurs formées bilinéairement à l'aide des Ψ_k et de leurs conjuguées qui, elles, ont le caractère tensoriel et sur la nature desquelles nous aurons à réfléchir.

Lorsqu'on écrit explicitement les équations (12-15), on constate tout de suite qu'elles sont très dissymétriques et font jouer un rôle tout particulier à l'axe des z . Pour expliquer ce fait, il faut se souvenir que le rôle des fonctions d'onde est toujours en Mécanique ondulatoire de permettre l'évaluation de certaines probabilités. Or, comme M. Pauli l'avait remarqué avant la théorie de Dirac, pour l'électron avec spin les questions de probabilité doivent être posées par rapport à un axe de référence. On peut se demander par exemple quelles sont les valeurs possibles et les probabilités correspondantes pour la composante du moment de rotation propre (ou du moment magnétique propre) de l'électron dans une direction de référence D ? Les équations de Dirac (12-15) (quand on emploie

la forme (18) des α_i) correspondent au cas où l'on a choisi la direction de référence D comme axe des z; les Ψ_k donnent alors les probabilités des diverses valeurs possibles pour la composante z des moments propres. Si donc l'on peut répondre à une question de probabilité pour laquelle la direction de référence D ne coïncide pas avec l'axe des z initialement choisi, il faut d'abord faire un changement de coordonnées qui amène l'axe des z sur la direction D et ce sont les nouveaux Ψ_k (combinaisons linéaires des Ψ_k initiaux) qui fourniront les probabilités cherchées.

Ce qu'il y a de vraiment très remarquable dans la théorie de Dirac, c'est qu'étant partie d'un effort pour se rapprocher de la Relativité, sans aucune hypothèse relative à l'existence d'un moment de rotation propre et d'un moment magnétique propre de l'électron, elle se soit trouvée introduire automatiquement ces deux éléments. Dirac a montré d'abord que si l'on considère le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique conformément à l'équation (15), tout se passe comme si l'électron possédait un moment magnétique propre et un moment électrique propre, chacun défini par un opérateur comme cela doit être dans une théorie quantique. Le moment magnétique a comme valeurs possibles $\pm \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c}$, soit ± 1 magnéton de Bohr; le moment électrique apparaît conformément à la Relativité grâce à la translation de l'aimant électronique. Le raisonnement développé par Dirac conduit à faire correspondre aux composantes du moment magnétique propre les opérateurs suivants:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_x &= \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i \alpha_2 \alpha_3 & \mathfrak{M}_y &= \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i \alpha_3 \alpha_1 \\ \mathfrak{M}_z &= \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i \alpha_1 \alpha_2\end{aligned}\quad (19)$$

et aux composants du moment électrique propre les opérateurs:

$$\mathcal{L}_x = \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i \alpha_1 \quad \mathcal{L}_y = \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i \alpha_2 \quad \mathcal{L}_z = \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i \alpha_3 . \quad (20)$$

En réalité, ce résultat n'est pas satisfaisant comme nous le verrons dans un instant en examinant les densités de moyenne et comme cela résulte dès l'abord du fait que les opérateurs (20) ne sont pas hermitiques contrairement à la règle générale de la nouvelle Mécanique.

En modifiant légèrement le raisonnement de Dirac, on peut montrer qu'il y a lieu d'ajouter le facteur α_4 dans les définitions (19) et (20) et poser :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_x &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & \mathfrak{M}_y &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 \\ \mathfrak{M}_z &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 & & \\ \mathcal{Q}_x &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \alpha_1 \alpha_4 & \mathcal{Q}_y &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \alpha_2 \alpha_4 & \mathcal{Q}_z &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \alpha_3 \alpha_4 .\end{aligned}\tag{21}$$

Toutes les difficultés sont alors levées : en particulier tous les opérateurs (21) sont hermitiques.

En ce qui concerne le moment de rotation de l'électron, on constate qu'en général le moment de rotation dû au mouvement d'ensemble de l'électron sur sa trajectoire ne satisfait pas aux mêmes théorèmes de conservation que dans l'ancienne mécanique, par exemple ne reste pas constant dans un champ de force central ; pour obtenir une grandeur qui jouisse des propriétés classiques de conservation, il faut ajouter au moment de rotation orbital un moment de rotation propre de l'électron défini par les opérateurs :

$$M_x = \frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_2 \alpha_3 \quad M_y = \frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_3 \alpha_1 \quad M_z = \frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_1 \alpha_2 .\tag{22}$$

En comparant (22) avec (21), on retrouve le rapport normal $|\mathfrak{M}| / |M| = \frac{e}{m_0 c}$ qui caractérise l'électron.

* * *

Nous devons maintenant nous poser la question suivante : « La théorie de Dirac se concilie-t-elle avec le formalisme général

de la théorie quantique que nous avons précédemment exposé ? La réponse est entièrement affirmative.

Comme dans la Mécanique ondulatoire, on fait correspondre en Mécanique de Dirac un certain opérateur linéaire et hermitique à chaque grandeur attachée au corpuscule, mais ici ces opérateurs pourront contenir à côté des symboles d'opérations employés antérieurement des symboles d'opération agissant sur les indices des fonctions Ψ_k tels que les matrices α_i ou leurs combinaisons hermitiques (voyez par exemple les opérateurs (21) et (22)).

Les valeurs possibles de la grandeur qui correspond à un opérateur A seront ici définies par les valeurs propres réelles des équations:

$$A(\varphi_k) = \alpha \varphi_k \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (23)$$

dont les fonctions propres sont à quatre composantes $\varphi_1^l \varphi_2^l \varphi_3^l \varphi_4^l$. Les fonctions propres φ_k^l sont orthogonales, c'est-à-dire que l'on a

$$\int \int \int \sum_k \varphi_k^{l*} \varphi_k^{l'} dx dy dz = 0 \quad (l \neq l') \quad (24)$$

et on peut les normer par la condition:

$$\int \int \int \sum_k \varphi_k^{l*} \varphi_k^l dx dy dz = 1 . \quad (25)$$

De plus, elles forment un système complet, c'est-à-dire qu'on peut développer les fonctions Ψ_k du corpuscule sous la forme:

$$\Psi_k = \sum_l c_l \varphi_k^l . \quad (26)$$

La probabilité de la valeur propre α_l est alors donnée par $c_l c_l^* = |c_l|^2$. On en déduit aisément que la valeur moyenne de la grandeur A est donnée par:

$$\bar{A} = \sum_l \alpha_l |c_l|^2 = \int \int \int \sum_k \Psi_k^* A \Psi_k dx dy dz . \quad (27)$$

Nous retrouvons donc bien ici tous les principes généraux de la Mécanique quantique. Il y a lieu seulement de tenir compte de l'existence de 4 fonctions Ψ_k et d'introduire dans les

formules données antérieurement une sommation supplémentaire sur l'indice k chaque fois qu'il y a une intégration dans l'espace.

D'après (27), on voit que la densité de valeur moyenne pour la grandeur A est $\sum_k \Psi_k^* A \Psi_k$. Comme précédemment, on peut soutenir que cette grandeur n'a pas vraiment un sens physique, étant seulement la quantité qu'il faut intégrer pour obtenir la valeur moyenne $\sum_l \alpha_l |c_l|^2$. Et ce sont précisément les densités de valeur moyenne qui se révèlent en théorie de Dirac comme ayant un caractère tensoriel analogue à celui des grandeurs de la Relativité classique. Ainsi, par exemple, les densités des composantes de moment magnétique et de moment électrique forment en Relativité classique un tenseur antisymétrique du second ordre. En théorie de Dirac, si l'on forme à l'aide des 6 opérateurs $\mathcal{M}_x \dots \mathcal{P}_z$ du moment magnétique propre et du moment électrique propre les densités correspondantes:

$$\frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} \sum_k \Psi_k^* i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \Psi_k \dots \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} \sum_k \Psi_k^* i \alpha_1 \alpha_4 \Psi_k , \quad (28)$$

ces densités forment les six composantes distinctes d'un tenseur antisymétrique du second ordre. Nous sommes ici en accord avec la théorie de la Relativité, mais seulement pour des grandeurs qui ont un sens de moyennes et qui, du point de vue quantique pur, ne paraissent pas avoir de signification physique. Nous voyons bien ici se dessiner une opposition entre le point de vue quantique pur où règne l'idée de discontinuité (caractère discret des valeurs propres) et le point de vue plus classique de la Relativité qui utilise toujours le continu.

Pour préciser, considérons comme exemple la composante z du moment de rotation propre de l'électron. L'opérateur correspondant (voir (22)) est: $\frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_2 \alpha_3$. Les valeurs propres de cet opérateur, c'est-à-dire les valeurs possibles de M_z , sont $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$. On prouve à l'aide des principes généraux que la probabilité de la valeur $+\frac{\hbar}{4\pi}$ est

$$\iiint \left[|\Psi_1|^2 + |\Psi_3|^2 \right] dx dy dz$$

et que la probabilité de $-\frac{h}{4\pi}$ est

$$\int \int \int \left[|\Psi_2|^2 + |\Psi_4|^2 \right] dx dy dz .$$

La valeur moyenne est

$$\bar{M}_z = \frac{h}{4\pi} \int \int \int \left[|\Psi_1|^2 + |\Psi_3|^2 - |\Psi_2|^2 - |\Psi_4|^2 \right] dx dy dz \quad (29)$$

ou en tenant compte de la valeur des α_i

$$\bar{M}_z = \frac{h}{4\pi} \int \int \int \sum_k \Psi_k^* i \alpha_2 \alpha_3 \Psi_k dx dy dz \quad (30)$$

conformément à la formule générale (27).

Dans tout système galiléen, la mesure de M_z ne pourra donner que $\pm \frac{h}{4\pi}$. Il n'y a rien ici qui rappelle la transformation vectorielle ou tensorielle des grandeurs en Physique classique ou en Relativité. Le point de vue quantique pur qui n'envisage que les valeurs propres ignore complètement la représentation géométrique classique des grandeurs physiques par des vecteurs ou des tenseurs dans l'espace ou dans l'espace-temps. C'est seulement lorsqu'on envisage les valeurs moyennes (ou plus exactement ici les densités de valeurs moyennes) que l'on retrouve les transformations du type tensoriel. On aperçoit ainsi l'opposition profonde qui existe entre la physique quantique et la physique classique et en même temps la possibilité de leur raccordement statistique.

Tant qu'on ne considère que les valeurs moyennes, l'accord avec la Relativité est complet. Nous voulons en donner un exemple intéressant. Si on examine le moment magnétique propre *moyen* et le moment de rotation propre *moyen* dans un système de référence où l'électron est en repos, on leur trouve même direction et l'on a la relation vectorielle

$$\frac{\overrightarrow{\mathfrak{M}}}{\overrightarrow{\mathbf{M}}} = \frac{e}{m_0 c} .$$

Si maintenant on évalue ces deux moments moyens dans des systèmes de référence où l'électron a des vitesses de plus en plus grandes, de plus en plus voisines de celle de la lumière dans le vide, on constate que le moment magnétique propre moyen est de plus en plus normal à la direction du mouvement tandis que le moment de rotation propre moyen tend à se coucher sur cette direction. On n'a donc plus alors la relation vectorielle écrite ci-dessus ce dont, au premier abord, on pourrait être surpris. En réalité il n'y a pas lieu de l'être et nous sommes ici parfaitement en accord avec la théorie de Relativité car les vecteurs « moment magnétique » et « moment de rotation » ne sont pas des « covariants relativistes » et s'ils se trouvent avoir même direction dans un système où l'électron repose, ils ne doivent pas l'avoir dans un système où l'électron a un mouvement rapide.

* * *

D'après ce que nous venons de dire, on voit que la théorie de Dirac n'est en accord avec la Relativité que dans la mesure où une théorie quantique peut être en accord avec les conceptions continues de l'ancienne Physique c'est-à-dire en ce qui concerne les valeurs moyennes. Pour cette raison déjà, la théorie de Dirac n'est conciliable avec la Relativité qu'envisagée sous certains aspects. Mais en dehors des divergences qui viennent de la nature discontinue des quanta, il existe encore d'autres divergences entre la théorie de Dirac et la Relativité. En effet, dans toutes les théories quantiques sous leurs formes actuelles et dans celle de Dirac comme dans les autres, la variable temps joue un rôle tout à fait différent des variables d'espace contrairement à l'une des tendances fondamentales de la Relativité. Les problèmes de détermination des valeurs propres qui jouent un rôle essentiel en Mécanique quantique sont en effet posés dans un domaine d'espace et il en résulte que les valeurs moyennes elles-mêmes sont définies par des intégrations dans l'espace (voir formule (27)). De telles définitions ne sont évidemment pas relativistes: il faudrait employer pour la définition des valeurs propres des domaines d'espace-temps et

pour celle des valeurs moyennes des intégrations dans l'espace-temps. Mathématiquement cela est évidemment possible, mais on obtiendrait, me semble-t-il, ainsi une Physique entièrement statique dont toute évolution dans le temps serait bannie. Il faut à la théorie quantique un paramètre d'évolution ayant un rôle tout à fait différent des variables de configuration auxquelles correspondent des opérateurs. La théorie quantique actuelle prend comme paramètre d'évolution le temps et brise ainsi la symétrie relativiste entre temps et espace. Peut-être trouvera-t-on une manière de tourner cette difficulté, mais cette manière ne m'apparaît pas du tout pour l'instant.

Il est intéressant de préciser la difficulté qui vient d'être mentionnée. Quand avec les principes actuels de la Mécanique nouvelle, nous « quantifions » un système, un atome d'hydrogène par exemple, en calculant les valeurs propres de son énergie, nous isolons par la pensée ce système du reste de l'univers. Rigoureusement parlant, ceci n'est pas permis: pour déterminer les valeurs propres de l'Hamiltonien, il faudrait en principe tenir compte de tous les champs de force existant dans l'univers entier. Fort heureusement, l'influence des champs de force extérieurs à un atome sur la forme des ondes Ψ de l'atome est tout à fait négligeable parce que ces ondes Ψ tendent très rapidement vers zéro dès qu'on s'éloigne du domaine atomique. Bref, en principe, la détermination des valeurs et fonctions propres exigerait la considération de l'espace tout entier, mais en pratique la structure du monde matériel se prête à ce que nous y découpons des systèmes suffisamment indépendants pour pouvoir être considérés isolément. Mais si nous voulions définir les valeurs et fonctions propres dans l'espace-temps, nous ne pourrions pas, me semble-t-il, découper l'existence d'un individu physique, tel qu'un atome, en sections indépendantes les unes des autres. Or un atome au cours du temps subit des actions très diverses, est le siège d'effets Zeeman et Stark etc. Si nous voulons définir les valeurs et fonctions propres dans l'espace-temps, nous trouverons que les états stationnaires de l'atome sont invariables, étant déterminés par tout l'ensemble des actions qu'il a subi ou subira au cours du temps. Il n'y aurait plus évolution.

Cette difficulté me paraît se rattacher profondément à la structure du monde physique. En réalité, même dans la théorie de Relativité sous sa forme classique, les variables de temps et d'espace sont loin d'être équivalentes (même en faisant abstraction du facteur $\sqrt{-1}$ qui partout multiplie la coordonnée temps). La variable temps varie toujours dans le même sens et les lignes d'Univers de toutes les unités matérielles sont inclinés dans le sens du temps. Autrement dit, l'espace-temps possède une « polarité » essentielle.

A cette polarité est liée la persistance des unités matérielles qui se traduit à notre échelle par la persistance des objets matériels qui nous entourent. Cette persistance est symbolisée en Relativité classique par les lignes d'Univers: en théorie quantique, une symbolisation aussi précise n'est pas possible parce que le principe d'incertitude d'Heisenberg s'oppose à une définition précise des lignes d'Univers. Néanmoins la persistance existe et peut être en première approximation symbolisée par une ligne d'Univers. Or dans la conception relativiste usuelle, un observateur A considère comme simultanés les points de l'espace-temps qui sont contenus dans une section tridimensionnelle de cet espace-temps. En raison de la polarité dont nous avons parlé, cette section coupe les lignes d'Univers de toutes les unités matérielles et c'est ce qui permet à l'observateur A de découper dans son espace des systèmes permanents presque indépendants. Mais un tel découpage en sections indépendantes serait évidemment impossible dans le sens des lignes d'Univers. En raison de la persistance des unités physiques, l'espace-temps présente une sorte de structure fibreuse dans le sens du temps: c'est cette structure fibreuse qui nous gène ici et nous voyons que cette difficulté a sa racine dans la Relativité classique elle-même.

* * *

Pour résumer, nous dirons que la théorie de Dirac est une très belle et très fructueuse théorie qui constitue aujourd'hui le stade le plus avancé de la Mécanique ondulatoire de l'électron. Parti d'un effort pour rapprocher la Mécanique quantique de

la Relativité, elle a introduit automatiquement le « spin » de l'électron et a ainsi interprété aisément tous les phénomènes qui se rattachent à l'existence de ce spin depuis la structure fine des spectres jusqu'aux effets Zeeman anormaux. Elle rencontre assurément certaines difficultés dont la plus connue est la prévision pour l'électron d'états à énergie négative qui ne paraissent pas réellement exister dans la Nature. Mais même là, on peut se demander si elle ne finira pas par remporter la victoire puisque la découverte expérimentale des électrons positifs ou « positrons » pourrait peut-être être interprétée précisément en faisant intervenir les états d'énergie négative.

Mais si la théorie de Dirac a d'incontestables mérites, il n'est pas exact de dire qu'elle réconcilie complètement la nouvelle Mécanique et la Relativité. La théorie de la Relativité, bien qu'ayant paru révolutionnaire en son jeune temps, est en réalité une théorie du type classique, le couronnement, pourrait-on dire, de la Physique du continu. Prise dans son état actuel et même sans parler des difficultés relatives au temps, elle ne peut pas être mise en accord complet avec les idées si nouvelles introduites par la théorie quantique. Profondément imprégnée de l'idée de continuité, la théorie de la Relativité ne peut pas, sans avoir subi de modifications essentielles, s'accommoder de la discontinuité fondamentale dont l'existence et l'indivisibilité du quantum d'action sont la mystérieuse expression.