Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 15 (1933)

Artikel: Quelques remarques sur la théorie des fonctions harmoniques

Autor: Wavre, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740658

Séance du 7 décembre 1933.

R. Wavre. — *Quelques remarques sur la théorie des fonctions harmoniques.*

a) *Sur un théorème inverse.*

Soient S une surface analytique fermée puis g et f deux densités holomorphes sur S. Supposons que l'on ait, r étant la distance de deux points et n la normale à la surface S dirigée vers l'extérieur

$$\int \left(\frac{g}{r} - f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\mathrm{S} = 0 \qquad \text{à l'extérieur de S .} \qquad (1)$$

Je prétends que f et g sont les valeurs sur S d'une fonction, harmonique φ à l'intérieur de S, et de sa dérivée normale. En effet, le principe de Dirichlet permet d'affirmer l'existence d'une fonction φ harmonique à l'intérieur de S et telle que l'on ait sur cette surface $\varphi = f$. Comme f est analytique, la fonction harmonique φ est prolongeable au travers de S et la dérivée normale existe sur toute la surface et y représente une fonction continue.

L'on a

$$\int \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\mathrm{S} = 0 \qquad \text{à l'extérieur de S .} \qquad (2)$$

En soustrayant (1) et (2) l'on trouve

$$\int \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dn} - g \right) d\mathrm{S} = 0 \qquad \text{à l'extérieur de S .}$$

Cette relation a encore lieu à l'intérieur de S car le premier membre y est encore harmonique et il est nul sur S donc identiquement nul. Mais alors $g = \frac{d\varphi}{dn}$ et c'est ce qu'il fallait démontrer.

La valeur de l'intégrale (1) à l'intérieur de S est évidemment $4\pi\varphi$.

Les propriétés « *analogues* » existent pour le potentiel logarithmique dans le cas du plan et aussi en intervertissant les deux domaines intérieurs et extérieurs.

b) *Sur les potentiels admettant une ligne de ramification donnée.*

Envisageons une ligne fermée C puis une fonction harmonique p dans un volume V de connexion simple et contenant C.

Soit, enfin, S une surface située dans V et s'appuyant sur C. Le potentiel

$$U = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{dp}{dn} - p\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)dS$$

admet la fonction période p pour la frontière C de S. Envisageons une autre surface S′ et formons de même le nouveau potentiel

$$U' = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{dp}{dn} - p\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)dS'.$$

Puis soustrayons les deux formules obtenues. On aura, hors de la surface fermée σ constituée par S et S′: $U = U'$.

Donc, les deux potentiels U et U′ coïncident dans cette région-là. Ce fait est digne de remarque, car l'on s'est imposé simplement d'avoir un potentiel qui engendre p comme fonction période.

c) *Sur l'intégrale de Poisson.*

Soient: P un point du cercle unité, ρ et θ ses coordonnées polaires, $M(1, \psi)$ un point de la circonférence unité et r la distance des deux points. L'intégrale de Poisson

$$U(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,.\,\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi$$

représente une fonction harmonique dans le cercle unité. Elle tend vers $+f$ quand P tend vers la circonférence par l'intérieur.

Elle tend vers $-f$ quand P tend vers la circonférence par l'extérieur. Si la fonction $f(\psi)$ est harmonique sur la circonférence, les deux fonctions U sont prolongeables au travers de la circonférence. Leur différence serait une fonction période pour l'intégrale précédente, si on l'étendait à un arc: ψ_1, ψ_2 de la circonférence. D'autre part, l'on peut écrire en développant le second membre de (1),

$$U(P) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \qquad (2)$$

et l'on aurait

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi \,, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi \,. \qquad (3)$$

En résumé, si dans (3) l'on prend les coefficients de Fourier ordinaires d'une fonction ψ analytique, la fonction harmonique U(P) donnée par (2) est holomorphe sur la circonférence tandis que si l'on prend les intégrales (3) sur un arc seulement de la circonférence, la fonction U(P) donnée par (2) admet les points ψ_1 et ψ_2 de la circonférence comme points de ramification.

G. Tiercy. — *Le nouveau réflecteur de 40 cm de l'Observatoire* (avec 1 figure et 1 planche).

On sait [1] qu'il s'agit ici du dernier grand réflecteur taillé par le regretté Emile Schaer; c'est un miroir de 40 cm de diamètre et de 240 cm de distance focale. Le miroir n'est pas percé, et la monture est newtonienne.

Ce nouveau réflecteur, qui vient s'ajouter à notre série de trois gros télescopes de type Cassegrain, nous a été généreusement offert par les enfants d'Emile Schaer en souvenir de leur père.

L'Observatoire est entré en possession de l'instrument en

[1] G. Tiercy. Un astronome artiste-opticien, Emile Schær, 1862-1931; *Archives*, 5 (14), 1932; le même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 18.