Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 14 (1932)

Artikel: Exemples simples de fonctions harmoniques multiformes

Autor: Vasilesco, F. / Wavre, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740823

F. Vasilesco et R. Wavre. — *Exemples simples de fonctions harmoniques multiformes.*

Considérons une couche sphérique homogène de rayon a et de masse totale m. Sur cette sphère détachons une calotte C et soit U_C son potentiel newtonien. Soit B la partie restante et U_B son potentiel; si r est la distance d'un point au centre de la sphère l'on a, c'est élémentaire:

$$U_C + U_B = \frac{m}{r} \qquad U_C + U_B = \frac{m}{a}$$

suivant que le point potentié est à l'extérieur ou à l'intérieur de la sphère. Le potentiel U_C représente à l'extérieur de la sphère un élément de fonction harmonique; soit Ψ cette fonction

$$\Psi = U_C = \frac{m}{r} - U_B \ .$$

Lorsque l'on traverse la calotte la dernière expression ne cesse d'être harmonique et l'on parvient ainsi en un point intérieur où l'on peut écrire

$$\Psi = \frac{m}{r} - U_B = \frac{m}{r} - \frac{m}{a} + U_C \ .$$

Enfin, on peut regagner le point de départ en traversant B où U_C reprend la même valeur qu'avant, tandis que l'on a:

$$\Psi_{\text{arrivée}} - \Psi_{\text{départ}} = \frac{m}{r} - \frac{m}{a} \ .$$

Ainsi le pourtour de la calotte est une ligne de ramification de la fonction harmonique dont un élément coïncide avec le potentiel newtonien de la calotte. Le second membre de l'équation précédente n'est autre que la fonction période. En résumé: *Toute calotte sphérique homogène permet d'engendrer une fonction harmonique multiforme admettant le pourtour de la calotte comme* *ligne de ramification.* La fonction période ne dépend pas de la forme de la calotte.

Envisageons maintenant une répartition de matière créant un potentiel V et soit S une surface de niveau fermée contenant toute la matière à son intérieur. On sait qu'une couche de densité

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{dU}{dn}$$

étalée sur S, crée à l'extérieur le potentiel V et à l'intérieur un potentiel constant V_S. Détachons à nouveau de S une calotte C et soit B la partie restante. On a de nouveau

$$U_C + U_B = V \qquad U_C + U_B = V_S$$

suivant que l'on est à l'extérieur ou à l'intérieur de S. Comme précédemment partons d'un point extérieur et posons

$$\Psi = U_C = V - U_B\ .$$

Cette fonction harmonique est prolongeable au travers de C et l'on parvient à l'intérieur avec la détermination

$$\Psi = V - U_B = V - V_S + U_C$$

et l'on peut regagner le point initial en traversant B ; l'on trouve

$$\Psi_{\text{arrivée}} - \Psi_{\text{départ}} = V - V_S\ .$$

La fonction période admet des singularités à l'intérieur de S. En prenant comme potentiel V le potentiel d'une calotte sphérique, la fonction période sera elle-même une fonction harmonique multiforme.

Ces propriétés et la possibilité de prolonger comme nous venons de le faire le potentiel d'un corps au travers de ce corps tiennent, au fond, à ce que les deux parties B et C sont potentiellement équivalentes à des fonctions près qui sont harmoniques au voisinage des deux corps.

Un potentiel de double couche, pour une densité constante, permet par le même procédé de construire des fonctions harmoniques multiformes avec la période 4π.