Relation entre les abscisses des extrémités d'un spectrogramme stellaire

PAR

Paul ROSSIER

I. Cas des étoiles de même type spectral.

1. — Soit un ensemble d'étoiles de même constitution physique et dont le fond continu du spectre est facilement observable. Photographions-en le spectre au prisme objectif, en provoquant un élargissement suffisant pour rendre négligeable l'épanouissement dû au chromatisme de l'objectif. Sur le spectrogramme, choisissons une certaine raie comme origine des abscisses, et mesurons les distances r et v de cette raie aux extrémités (dites rouge et violette) du spectre.

Il doit exister une relation entre ces deux longueurs, qui varient notamment avec la magnitude de l'étoile, la durée de pose, l'espèce de plaque, l'instrument, l'atmosphère.

2. — Ces longueurs sont caractérisées par trois fonctions:

a) dispersion du système:

$$\lambda = \varphi(l) , \tag{1}$$

b) la répartition de l'énergie dans le spectre de l'étoile:

$$Ce(\lambda) , \tag{2}$$

où C dépend notamment de la magnitude de l'étoile, *c*) et la sensibilité de la plaque, en fonction de la longueur d'onde :

$$\sigma(\lambda) \; . \tag{3}$$

Considérons l'énergie reçue par la plaque, entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$, qui correspondent aux obscisses l et $l + dl$ sur le spectrogramme. Cette énergie est:

$$dW = Ce(\lambda)\, d\lambda = Ce(\lambda)\, \varphi'(l)\, dl \; . \tag{4}$$

Le noircissement est proportionnel à:

$$dW' = \sigma(\lambda)\, dW = C\sigma(\lambda)\, e(\lambda)\, \varphi'(l)\, dl = C\psi(l)\, dl \; . \tag{5}$$

3. — Les extrémités du spectrogramme sont définies par un certain seuil s du noircissement de la plaque. Les valeurs de l correspondant au seuil sont définies par l'équation:

$$C\psi(l) = s \; . \tag{6}$$

Si la courbe de sensibilité des plaques ne comporte qu'un seul maximum, il y aura deux équations (6) dont les solutions r et v correspondent aux deux extrémités du spectre.

La fonction $\psi'(l)$ varie peu au voisinage des extrémités du spectre. Il est donc permis de poser, en prenant l_1 (pour l_r et l_v) au voisinage des abscisses r et v:

$$\psi(l) = \psi(l_1) + \psi'(l_1)\,(l - l_1) \; . \tag{7}$$

L'équation (6) donne alors:

$$C[\psi(l_1) + \psi'(l_1)\,(l - l_1)] = s \; . \tag{8}$$

Résolvons (8); on a, en introduisant des constantes R et V dont la valeur est immédiate:

$$r = R\left[\frac{s}{C} - \psi(l_r)\right] + l_r \; , \tag{9}$$

$$v = V\left[\frac{s}{C} - \psi(l_v)\right] + l_v \; . \tag{10}$$

4. — Eliminons le terme en C. Il vient, en appelant A une nouvelle constante:

$$Rv - Vr = A \; . \tag{11}$$

Les longueurs des portions rouge et violette de spectrogrammes d'étoiles de même spectre satisfont à une relation linéaire, pour autant que les éclats ne sont pas trop différents et que la courbe de sensibilité de la plaque est constante de cliché à cliché et ne présente pas plus d'un maximum.

Cette dernière restriction peut tomber si, par exemple, le spectrogramme est d'un seul tenant, donc si l'on opère toujours en des portions de spectre suffisamment éloignées des maxima de sensibilité. Sauf les remarques précédentes concernant le maximum de sensibilité, nous n'avons fait aucune hypothèse autre que la continuité sur la forme des fonctions $\varphi(l)$, $e(\lambda)$ et $\sigma(\lambda)$.

II. Changement de type spectral.

5. — Il faut alors tenir compte de la température T de l'étoile, qui entre dans la seule fonction $e(\lambda)$.

Posons comme précédemment:

$$\psi(l, T) = \sigma(\lambda) e(\lambda, T) \varphi'(l) . \tag{5'}$$

Il vient:

$$l = \left\{ \frac{s}{C} - \psi(l_1, T) \right\} \frac{1}{\left[\frac{\partial \psi(l, T)}{\partial l}\right]_{l=l_1}} + l_1 . \tag{10'}$$

Il s'agit de voir quelle peut être la forme en T des fonctions ci-dessus. Pour cela, posons avec Wien:

$$e(\lambda) = \lambda^{-5} e^{\frac{a}{\lambda T}} .$$

Nous avons montré ailleurs [1], qu'en première approximation, l'équation spectrale de Wien donne des résultats amplement suffisants et que dans l'état actuel des mesures astro-photométriques, il est rare qu'il y ait intérêt à la remplacer par celle de Plank, plus exacte.

[1] P. Rossier, Le problème de l'index de couleur en astrophysique, *Archives* [5], 12, p. 61 et 129 (1930); (le même) *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 11.

On a alors:

$$\psi(l,\ T) = g(l)\,.\,e^{\frac{a}{\lambda T}}\ . \tag{12}$$

où $g(l)$ est une fonction de l seulement.

Admettons une relation de Hartmann-Cornu entre l et λ:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{b}{l - l_0}\ . \tag{13}$$

Il vient:

$$\psi(l\,.\ T) = g(l)\,e^{\frac{a}{T\left(\lambda_0 + \frac{b}{l - l_0}\right)}}\ , \tag{14}$$

et:

$$\frac{\partial\psi(l\,.\ T)}{\partial l} = e^{\frac{a}{T\left(\lambda_0 + \frac{b}{l - l_0}\right)}}\left[T^{-1}\,h(l) + g'(l)\right]\ . \tag{15}$$

où $h(l)$ est une nouvelle fonction de l seulement.

L'équation (10′) donne alors:

$$l = \frac{T}{h(l_1) + Tg'(l_1)}\left\{\frac{s}{C}\,e^{-\frac{a}{T\left(\lambda_0 + \frac{b}{l_1 - l_0}\right)}} - g(l_1)\right\}\ ,$$

ou, en abrégeant:

$$\begin{aligned} r &= \frac{T}{R_1 + TR_2}\left\{\frac{s}{C}\,e^{-\frac{R_3}{T}} + r_0\right\}\ , \\ v &= \frac{T}{V_1 + TR_2}\left\{\frac{s}{C}\,e^{-\frac{V_3}{T}} + v_0\right\}\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Eliminons C, il vient:

$$R(T)\,.\,r - V(T)\,v = r_0\,R(T) - v_0\,V(T)\ , \tag{17}$$

où:

$$\left|\begin{aligned} R(T) &= \frac{e^{-\frac{R_3}{T}}}{R_1 + R_2 T} \\ V(T) &= \frac{e^{-\frac{V_3}{T}}}{V_1 + V_2 T} \end{aligned}\right|\ . \tag{18}$$

On retombe évidemment sur la formule (11) en fixant T dans les expressions (17) et (18). Mais la formule en T repose sur deux hypothèses supplémentaires: l'équation spectrale de Wien et la formule de Hartmann-Cornu sont applicables à l'astre et à l'appareil considérés.

6. — L'équation (17) contient huit constantes. Deux d'entre elles, R_3 et V_3, sont faciles à déterminer. (16) donne en effet:

$$R_3 = \frac{a}{\lambda_0 + \dfrac{b}{l_r - l_0}} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{a}{\lambda_0 + \dfrac{b}{l_v - l_0}} ; \qquad (19)$$

λ_0, l_0 et b sont les constantes de la formule de dispersion de Hartmann-Cornu; a est la constante de Planck; l_r et l_v sont les abscisses moyennes des extrémités du spectre.

Les autres constantes, au contraire, dépendent en particulier de la fonction $\sigma(\lambda)$ et des constantes qui y figurent. En principe, on pourrait déterminer leurs valeurs par des mesures de laboratoire et l'équation (17) permettrait alors des mesures absolues de températures stellaires. Dans l'état actuel de la technique des mesures, cette méthode n'offre aucun avantage.

Si les constantes sont déterminées par les mesures faites sur les spectrogrammes, l'homogénéité de (17) réduit immédiatement leur nombre d'une unité. Il ne reste donc que cinq constantes à déterminer.

Remarquons encore que le seuil de sensibilité s a été éliminé en même temps que la magnitude de l'étoile. Les coefficients de (17) en sont donc indépendants. On pourra donc sur un même spectrogramme effectuer plusieurs paires de mesures (à seuil constant dans chaque paire) qui toutes devront satisfaire à la même équation (17), sans changement de coefficients. On peut ainsi remplacer l'estimation des extrémités de spectrogramme par celle plus précise d'une paire de points du spectrogramme d'égal noircissement. Il ne faudrait cependant pas prendre des noircissements trop différents les uns des autres, car le développement en série (5) ne serait plus valable sans une modification des valeurs l_r et l_v, donc sans une variation des constantes des fonctions R(T) et V(T).

III. Vérification numérique.

7. — Nous disposons pour cela de mesures effectuées sur 200 clichés obtenus dès 1928 au prisme-objectif Schaer-Boulanger [1] de l'Observatoire de Genève, suivant un programme établi par M. Tiercy, directeur de l'Observatoire. Seules les étoiles du type A_0 ont été mesurées (dans un autre but). Nous ne pourrons donc vérifier que la formule (11). Les clichés, obtenus sur plaques « Capelli-blu », ont été posés 20 minutes et développés pendant huit minutes au métol-hydroquinone peu concentré. L'appareil de mesure utilisé est le spectrocomparateur de la « Société genevoise pour la construction d'instruments de physique », offert à l'Observatoire par la *Société académique* de Genève. En même temps que les longueurs, on a mesuré (toujours dans un autre but) la position et la largeur des raies visibles sur les spectres (Hydrogène, Calcium). Comme origine des abscisses sur les spectres, on a pris la moyenne des lectures des trois raies H_γ, H_δ et $H + H_\varepsilon$. Les lectures sont effectuées deux fois, au micron près. Dans la suite de ce travail, nous avons arrondi à 5 μ près.

8. — Les extrémités des spectres sont généralement assez mal définies, d'autant plus que, surtout dans l'ultra-violet, les spectrogrammes présentent un élargissement très sensible dû au chromatisme résiduel de l'objectif. Cet élargissement n'a au fond pour effet qu'une diminution de la sensibilité $\sigma(\lambda)$ vers les extrémités du spectre. Cela ne change rien à nos calculs, tant qu'on ne détermine pas *a priori* les constantes R et V de la formule (11).

La précision obtenue dans la détermination de r et v est assez délicate à évaluer.

Les lectures successives sont en effet relativement homogènes. Mais, au fond, elles ne sont pas indépendantes, car

[1] Pour la description de l'instrument voir P. Rossier, L'Equatorial Plantamour de l'Observatoire de Genève, *Archives* [5], 10, p. 243 (1928) ; (le même) *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 4.

pratiquement l'observateur fait défiler le spectre devant le microscope et pointe un défaut de plaque, une figure formée par les grains d'argent ou tout autre objet qui lui paraît occuper la position de la limite du spectre. S'il répète ses mesures à bref intervalle, l'observateur ne peut oublier l'estimation précédente et retombe sur le même objet, donc sur la même lecture. Mais, au contraire, des séries de mesures réellement indépendantes donnent des résultats qui peuvent être très différents, parfois de plus de 100 μ.

Dans ces conditions l'erreur sur l'origine est négligeable. En effet les pointés sur les raies sont obtenus à 10 μ ou tout au plus à 20 μ près. Les trois raies H_γ, H_δ et H sont les mieux marquées et les plus nettes du spectre. L'erreur sur la moyenne est donc insensible, pour l'objet de cette étude.

9. — L'allure des courbes de Planck, la faible dispersion des prismes du côté le moins réfrangible, tout tend à diminuer les variations de r par rapport à celles de v. Nous écrirons donc l'équation (11) sous la forme:

$$\alpha r - v = \beta\ ,$$

où α sera supérieur à 1.

Nous ferons porter le calcul sur des clichés comportant chacun plusieurs étoiles A_0 et dont il n'y a pas lieu, *a priori*, de suspecter la qualité; nous éliminons des clichés obtenus par temps peu clair, accidentés au développement ou au guidage, etc. Le tableau ci-dessous est obtenu en prenant les vingt premiers clichés de notre série satisfaisant à ces conditions. Aucun cliché n'a été éliminé *a posteriori*.

10. — Pour déterminer la constante α nous avons simplement construit un graphique en portant les longueurs r et v en coordonnées. La droite passant à l'œil, au mieux, par tous les points *a* donné:

$$\alpha = 1,8\ ,$$

à quelques centièmes près.

Le tableau a été construit avec cette valeur.

La moyenne des valeurs trouvées pour β donne:

$$\beta = 7{,}52 \text{ mm} ,$$

et la moyenne arithmétique des écarts est $\pm$ 0,37 mm.

11. — Nous ne pourrons considérer la formule (11) comme vérifiée que lorsque nous nous serons rendu compte de l'ordre de grandeur des écarts à attendre, *a priori*, sur β. Pour cela nous avons pris 10 plaques consécutives de notre série (numéros 198 à 207) et les avons mesurées 3 fois, à plusieurs jours d'intervalle et chaque fois dans un ordre différent. La moyenne arithmétique des 30 écarts obtenus entre les 3 valeurs de r et v, et leur moyenne, pour chaque cliché a donné:

$$\text{pour } r \qquad \pm\ 0{,}11 \text{ mm} ,$$
$$\text{» } v \qquad \pm\ 0{,}18 \text{ mm} .$$

Il est naturel que l'écart sur v soit plus grand, à cause de l'étalement des spectres.

L'écart *a priori* sera donc:

$$\sqrt{(1{,}8 \times 0{,}11)^2 + 0{,}18^2} \qquad \text{soit} \qquad \pm\ 0{,}26 \text{ mm} .$$

12. — La différence entre l'écart moyen *a priori* (0,26) et *a posteriori* (0,37) s'explique aisément: il arrive fréquemment que l'extrémité ultra-violette tombe sur le bord d'une des larges raies de l'hydrogène. Il suffirait alors d'une légère augmentation d'éclat ou de pose pour que le deuxième bord soit visible, donc pour repousser l'extrémité du spectre d'une quantité très sensible, au moins égale à la largeur d'une raie ultra-violette; or cette largeur est précisément de l'ordre de 0,1 mm. La formule (11) est donc vérifiée, aussi bien que le permettent les mesures utilisées.

Les écarts du second membre ne présentent pas de caractère systématique fonction de r ou v. Par contre, plus de la moitié des clichés (B 18, 20, 79, 82, 87, 89, 92, 98, 99, 102, 104, 105) présentent des écarts de signes constants. Ceci semble indiquer une variation, de cliché à cliché, de la sensibilité relative aux extrémités du spectre, ou une transparence relative variable de l'atmosphère pour les diverses longueurs d'onde.

13. — Une expression de la forme $\alpha r - \nu - \beta$, déduite de la formule (11), pourrait jouer, pour des étoiles de magnitude peu variable, un rôle analogue à celui de l'index de couleur. En effet ν croît, relativement à r, dès que la température de l'étoile augmente. Il y a peut-être là un critère, probablement de portée modeste, pour vérifier une classification spectrale d'étoiles, ou pour des identifications sommaires, dans le cas de spectrogrammes sans raies suffisamment nettes.

Les moyens nous manquent actuellement pour trouver la relation entre l'index de couleur et la quantité $\alpha r - \nu - \beta$.

Appendice.

Dispersion du prisme-objectif Schaer-Boulenger de l'Observatoire de Genève.

En se basant sur nos mesures de spectrogrammes, M^lle^ Blaser, aide-astronome à l'Observatoire, a tracé la courbe de dispersion de cet appareil.

Elle a utilisé les résultats obtenus sur 100 étoiles-guides, prises sur des clichés choisis parmi les meilleurs. Les raies observées sont celles de la série de l'hydrogène (H_β à H_θ). Toutes les étoiles mesurées sont du type A_0. La moyenne a donné des lectures normales, d'où 7 équations de condition pour les trois coefficients de la formule de Hartmann-Cornu. L'application de la méthode des moindres carrés a donné:

$$(l + 23{,}795)(\lambda - 2018{,}1) = 50162$$

où l est l'abscisse en mm lue sur le spectre, en choisissant comme origine le centre de gravité des trois raies, $H\gamma$, $H\delta$ et $H + H_\varepsilon$, et où les lectures croissent avec la réfrangibilité; λ est en angströms. Le tableau ci-dessous donne, pour quelques raies, la variation de longueur d'onde correspondant à une variation de 1 mm sur l.

H_β	161	K	73
H_γ	107	H_ζ	72
H_δ	86	H_η	65
H_ε	75	H_θ	57

Vérification numérique de la formule $1{,}8\, r - v = 7{,}52$.

N°	Cliché	Etoile HD	r	v	$1{,}8\,r-v$	Ecart	Remarques
1	B 16	126128,9	7,54	6,12	7,45	— 0,07	étoile guide
2		126200	6,86	4,33	8,02	+ 0,50	
3		126676	5,93	3,06	7,61	+ 0,09	
4	B 18	116235	7,23	5,11	7,90	+ 0,38	étoile guide
5		115709	6,80	3,93	8,31	+ 0,79	
6	B 19	126128,9	7,41	6,01	7,33	— 0,19	
7		126200	7,00	4,43	8,17	+ 0,65	étoile guide
8		126676	5,85	2,99	7,55	+ 0,03	
9	B 20	130109	8,03	6,71	7,74	+ 0,22	
10		130256	6,20	3,53	7,63	+ 0,11	
11	B 69	188260	7,21	5,15	7,83	+ 0,31	étoile guide
12		188485	6,52	4,35	7,39	— 0,13	
13	B 73	163641	6,92	4,35	8,11	+ 0,59	étoile guide
14		164257	6,17	3,82	7,29	— 0,23	
15	B 74	170878	7,31	5,47	7,69	+ 0,17	étoile guide
16		171623	7,03	5,43	7,22	— 0,30	
17		170597	5,56	3,89	7,12	— 0,40	
18	B 76	183056	7,52	6,10	7,44	— 0,08	étoile guide
19		183986	7,08	4,88	7,86	+ 0,34	
20		181470	6,85	4,85	7,48	— 0,04	
21		183184	5,76	2,48	7,88	+ 0,36	
22	B 79	179527	6,62	4,83	7,09	— 0,43	étoile guide
23		181119	5,97	3,65	7,12	— 0,40	
24		179708	5,89	3,66	6,94	— 0,58	
25	B 82	199629	8,02	7,26	7,18	— 0,34	étoile guide
26		199099	6,10	3,73	7,25	— 0,27	
27	B 83	202850	7,94	7,22	7,07	— 0,45	étoile guide
28		203696	6,69	4,11	7,93	+ 0,41	
29		203112	6,57	4,91	6,92	— 0,60	
30		203856	6,12	3,65	7,37	— 0,15	
31	B 87	196724	7,84	6,83	7,28	— 0,24	étoile guide
32		196821	6,84	5,12	7,19	— 0,33	
33	B 89	196724	7,27	5,06	8,03	+ 0,51	
34		196821	6,59	3,61	8,25	+ 0,73	étoile guide
35	B 92	206774	7,11	5,12	7,68	+ 0,16	étoile guide
36		206807	6,07	2,61	8,32	+ 0,80	
37	B 98	196606	7,02	5,55	7,09	— 0,43	étoile guide
38		197329	5,83	3,70	6,79	— 0,73	
39	B 99	198069	7,34	5,66	7,55	+ 0,03	étoile guide
40		197448	6,55	3,73	8,06	+ 0,54	
41		197832	6,33	3,70	7,69	+ 0,17	
42	B 102	192640	7,63	7,40	6,33	— 1,19	
43		193369	7,33	6,12	7,07	— 0,45	étoile guide
44		193621	6,94	5,11	7,38	— 0,14	

Vérification numérique de la formule $1{,}8\,r - v = 7{,}53$ (suite).

Nº	Cliché	Etoile HD	r	v	$1{,}8\,r - v$	Ecart	Remarques
45	B 103	198391	6,95	4,39	8,12	+ 0,60	étoile guide
46		197832	6,01	3,90	6,93	— 0,59	
47	B 104	202850	7,85	6,64	7,49	— 0,03	
48		203112	5,96	3,84	6,89	— 0,63	étoile guide
49	B 105	192425	7,96	6,72	7,61	+ 0,09	étoile guide
50		193707	7,20	4,79	8,17	+ 0,65	

Observatoire de Genève.